Curitiba, 05.09.2018

Prova 1

Matemática Aplicada I

Tobias Bleninger
Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, Bloco V, Caixa Postal 19011, 81531-990, Curitiba - PR, Brasil

Nome: ________________________________

GRR: ____________________________

Pontuação (preenchido pelo Professor):

Questão	Pontos obtidos	Pontos totais		
1				
2				
3				
4			Porcentagem	
Soma				Nota
Final (corrigido)				

Questões

1. Dada a função f(x)=xe^{-x} e a integral analitica $\int_0^4 xe^{-x}dx = [(-x-1)e^{-x}]_0^4$ =0,9084
    a. Descreva em poucas palavras um algoritmo para calcular a integral numericamente.
    b. Calcule a integral utilizando o método dos retângulos com no mínimo dois retângulos.
    c. Compare o resultado com a solução analítica e explique como poderia ser aprimorado o calculo numérico.
    d. Descreva em poucas palavras um algoritmo para calcular a derivada numericamente no mesmo intervalo.
    e. Calcule a derivada analiticamente e numericamente no ponto x=0 e compare os resultados e explique como poderia ser aprimorado o cálculo numérico.
    f. Descreva em poucas palavras para qual situação precisa integrais ou derivadas numéricas.

Solução:

a) (3P)
- *Separar o intervalo [a b] em n trechos equidistantes w = (b-a)/n*
- *Calcule o valor da função no ponto intermédio para cada trecho, h_i = f(a+w/2) +iw*
- *Calcule o valor de cada retângulo (A_i=wh_i)*
- *Calcule a soma de todos retângulos A=soma(Ai)*

*b) (5P) 4 trechos com largura w = 1. Integral = 1*f(0,5) + 1*f(1,5) + 1*f(2,5) + 1* f(3,5) = 0,033 + 0,3347 + 0,2052 + 0,1057 = 0,9489*

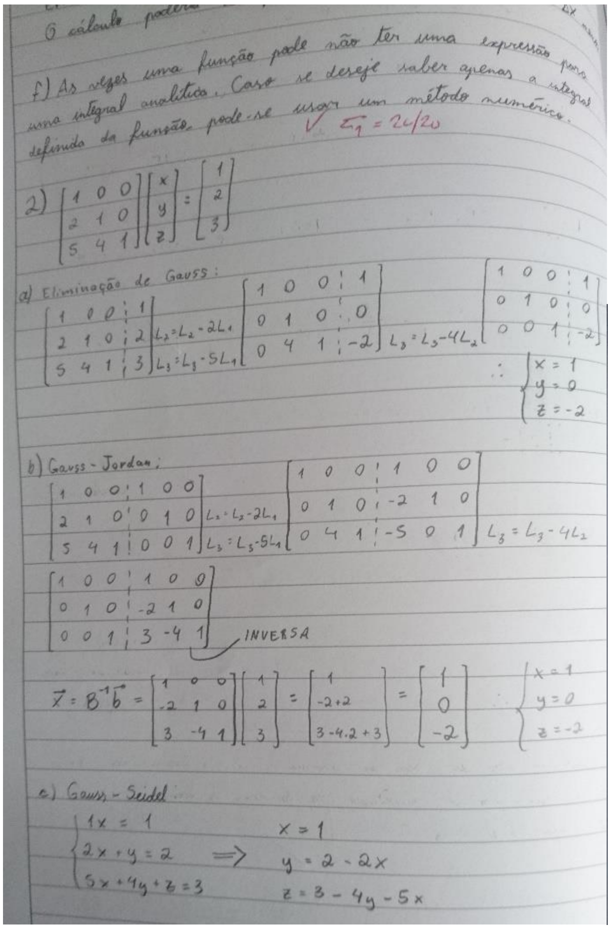
c) (2P) Erro absoluto: 0,0405. Erro relativo: 4,45%. Aumentar numero de divisões do intervalo ou usar trapézios.

d) (3P)
- *Separar o intervalo [a b] em n trechos equidistantes w = (b-a)/n*
- *Calcule o valor da função em cada ponto*
    - *Calcular a diferença finita dos valores da função dividido pela distância entre os pontos*

e) (5P) Analitico: e^{-x} - xe^{-x} em x = 0 é e^{-0} - 0e^{-0} = 1. Numerico: usando deltax=0,2. f(0,1) - f(-0,1) / 0,2 = 1,005. Erro absoluto = 0,005. Erro relativo = 0,5%. Reduzir intervalo da diferença.

f) (2P) Para conjunto de dados discretos, por exemplo medições

2. Dada a matriz B=[1 0 0; 2 1 0; 5 4 1] e o vetor *b*=[1;2;3] calcule o vetor *x* para qual B*x*=*b*
    a. 3P Seguindo o método de eliminação de Gauss
    b. 5P Seguindo o método de Gauss-Jordan
    c. 5P Seguindo o método de Gauss-Seidel
    d. 1P Compare e discute os resultados e os métodos utilizados
    e. 1P A transformação feita por B aumenta/reduz/mantem o volume? Justifique e quantifique sua resposta.
    f. 5P Calcule os autovalores e autovetores.



O cálculo poder...

f) As vezes uma função pode não ter uma expressão para uma integral analítica. Caso se deseje saber apenas a integral definida da função pode-se usar um método numérico.

✓ $\Sigma_1 = 26/20$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

a) Eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - 5L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] L_3 = L_3 - 4L_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\therefore \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases}$$

b) Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - 5L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] L_3 = L_3 - 4L_2$$

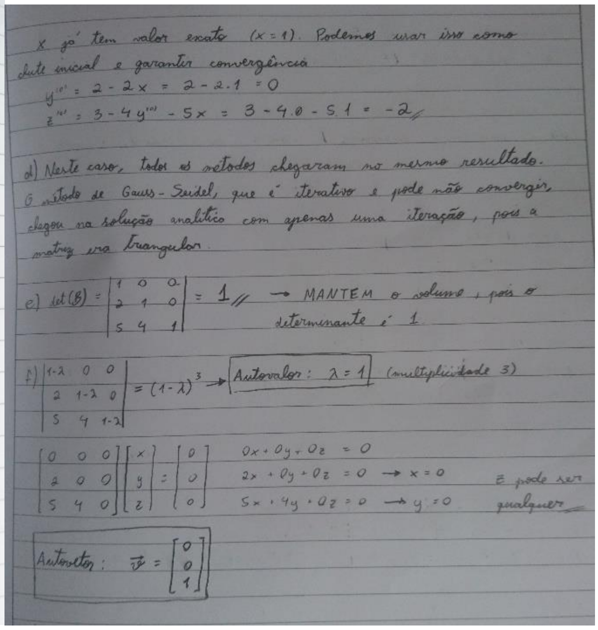
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

INVERSA

$$\vec{x} = B^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2+2 \\ 3-4.2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases}$$

c) Gauss-Seidel

$$\begin{cases} 1x = 1 \\ 2x + y = 2 \\ 5x + 4y + z = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 - 2x \\ z = 3 - 4y - 5x \end{array}$$



x já tem valor exato $(x = 1)$. Podemos usar isso como chute inicial e garantir convergência

$y^{(0)} = 2 - 2x = 2 - 2.1 = 0$

$z^{(0)} = 3 - 4y^{(0)} - 5x = 3 - 4.0 - 5.1 = -2$

d) Neste caso, todos os métodos chegaram no mesmo resultado. O método de Gauss-Seidel, que é iterativo e pode não convergir, chegou na solução analítica com apenas uma iteração, pois a matriz era triangular.

e) $\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$ → MANTEM o volume, pois o determinante é 1

f) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 5 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 \rightarrow \boxed{\text{Autovalor: } \lambda = 1}$ (multiplicidade 3)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 0x + 0y + 0z = 0 \\ 2x + 0y + 0z = 0 \rightarrow x = 0 \\ 5x + 4y + 0z = 0 \rightarrow y = 0 \end{array}$$

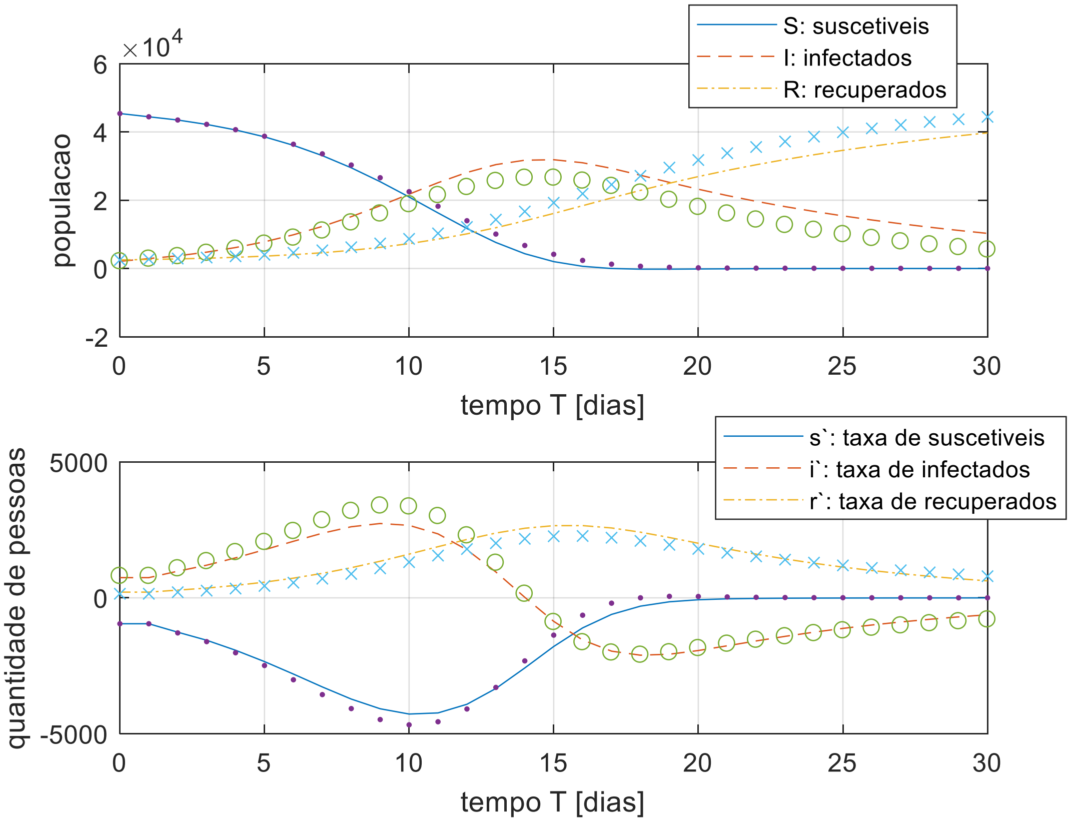
z pode ser qualquer

$\boxed{\text{Autovetor: } \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$

3. Explique em poucas palavras como o cálculo no sistema binário pode influenciar/prejudicar a precisão dos resultados.

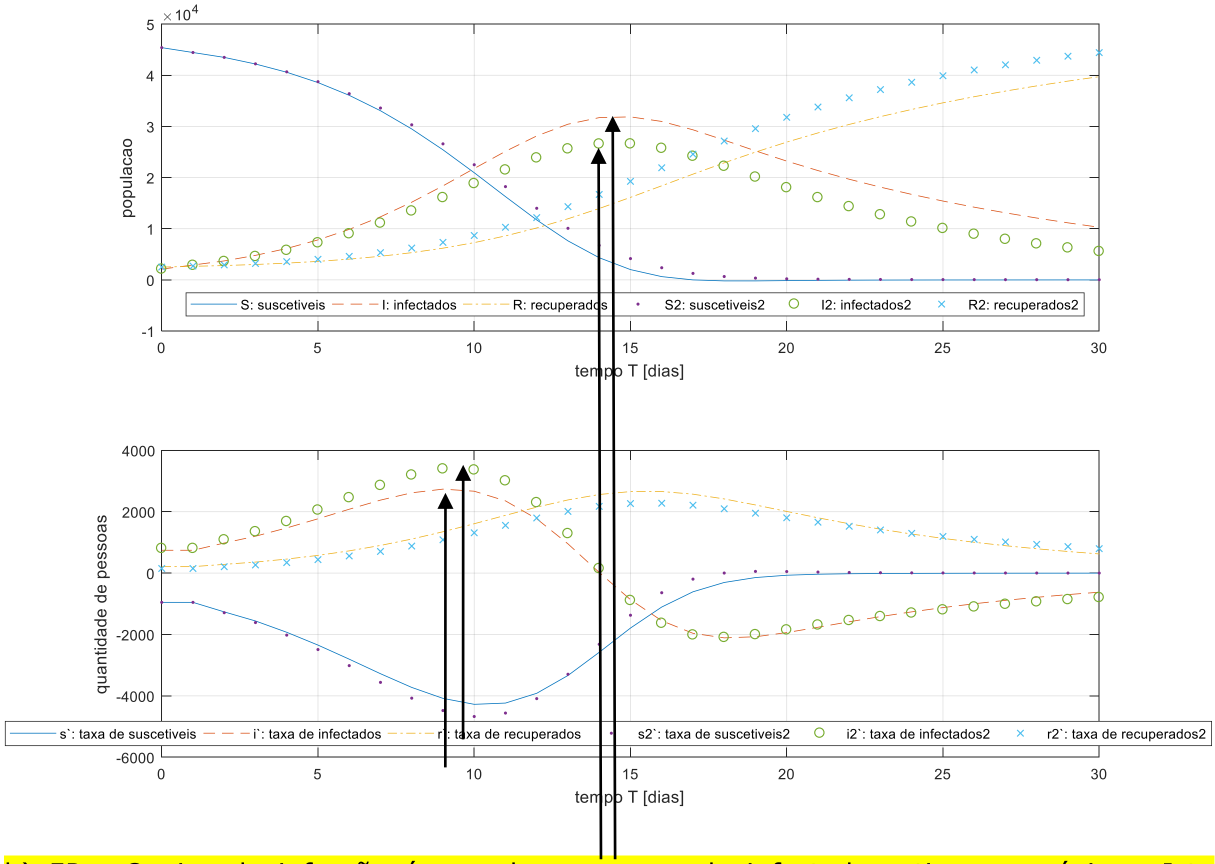
Numeros decimais com números finitos podem ter infinitos números quando representado em sistema binário que são truncados quando usado um computador. Cálculos com muitas iterações podem assim apresentar erros de truncamento quando executado em computadores em sistema binario.

4. Dado o resultado de um modelo epidêmico do tipo modelo SIR ($I'=aSI-bI$; $S'=-aSI$; $R'=bI$) aplicado para dois cenários com as mesmas condições iniciais ($S=45400$, $I=2100$, $R=2500$) variando somente o coeficiente b ($b_1 = 1/14$; $b_2 = 1/10$) e mantendo os demais constantes ($a=0,00001$)



a. Interpretando a figura, define qual resultado corresponde com qual cenário.
b. Define o pico da infecção para ambos cenários e descreva e discute os resultados para S, I e R e S´, I´e R´ neste momento.
c. Em qual dia ocorreu o número máximo de infecções? Quantos?

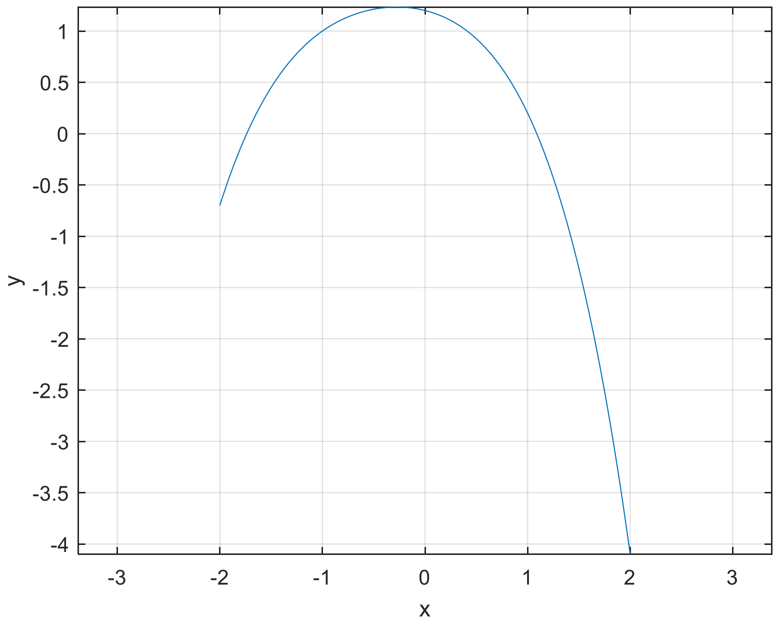
a) 5P - Linhas: cenário 1 (b1). Pontos: cenário 2 (b2) b)



b) 5P - O pico da infecção é quando o numero de infectados atinge o máximo. Isto acontece em aproximadamente 14 dias (cenário1) e um pouco antes no cenário2.
- Neste momento a taxa de infectados deveria estar no valor zero que pode ser visto na figura abaixo. E a taxa de recuperados esta quase no máximo.

c) 5P - O número máximo de infecções ocorre no dia com valor máximo da taxa de infectados. Sendo assim aproximadamente no dia 9 (cenário 1) e um pouco depois no cenário 2.

5. Utiliza a expansão em series de Taylor com a ordem $n = 0$ a 4 para aproximar a função $y(x) = -0{,}1x^4 - 0{,}15x^3 - 0{,}5x^2 - 0{,}25x + 1{,}2$ (veja figura abaixo) em $x_{i+1} = 1$ na base do valor de $y(x)$ e das derivadas em $x_i = 0$.
    a. Calcule os valores e o erro absoluto e relativo para cada aproximação.
    b. Visualize as aproximações na figura abaixo
    c. Baseado no resultado obtido explique a diferença do uso de aproximações com series de Taylor aplicados a polinômios comparado com séries e Taylor aplicados a outras funções (por exemplo sen(x)).



Solution. Because we are dealing with a known function, we can compute values for $f(x)$ between 0 and 1. The results (Fig. 4.1) indicate that the function starts at $f(0) = 1.2$ and then curves downward to $f(1) = 0.2$. Thus, the true value that we are trying to predict is 0.2.

The Taylor series approximation with $n = 0$ is [Eq. (4.2)]

$$f(x_{i+1}) \simeq 1.2$$

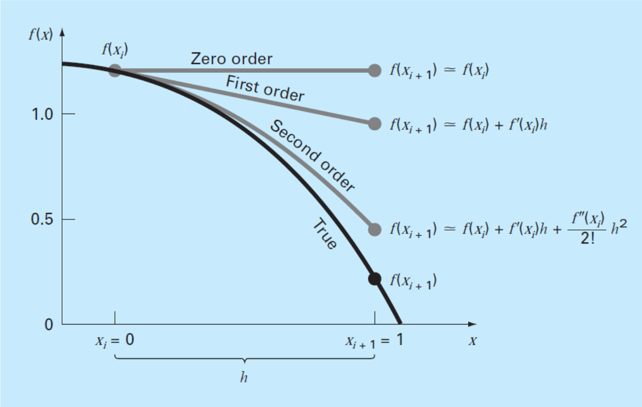


FIGURE 4.1
The approximation of $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ at $x = 1$ by zero-order, first-order, and second-order Taylor series expansions.

Thus, as in Fig. 4.1, the zero-order approximation is a constant. Using this formulation results in a truncation error [recall Eq. (3.2)] of

$$E_t = 0.2 - 1.2 = -1.0$$

at $x = 1$.

For $n = 1$, the first derivative must be determined and evaluated at $x = 0$:

$$f'(0) = -0.4(0.0)^3 - 0.45(0.0)^2 - 1.0(0.0) - 0.25 = -0.25$$

Therefore, the first-order approximation is [Eq. (4.3)]

$$f(x_{i+1}) \simeq 1.2 - 0.25h$$

which can be used to compute $f(1) = 0.95$. Consequently, the approximation begins to capture the downward trajectory of the function in the form of a sloping straight line (Fig. 4.1). This results in a reduction of the truncation error to

$$E_t = 0.2 - 0.95 = -0.75$$

For $n = 2$, the second derivative is evaluated at $x = 0$:

$$f''(0) = -1.2(0.0)^2 - 0.9(0.0) - 1.0 = -1.0$$

Therefore, according to Eq. (4.4),

$$f(x_{i+1}) \simeq 1.2 - 0.25h - 0.5h^2$$

and substituting $h = 1$, $f(1) = 0.45$. The inclusion of the second derivative now adds some downward curvature resulting in an improved estimate, as seen in Fig. 4.1. The truncation error is reduced further to $0.2 - 0.45 = -0.25$.

Additional terms would improve the approximation even more. In fact, the inclusion of the third and the fourth derivatives results in exactly the same equation we started with:

$$f(x) = 1.2 - 0.25h - 0.5h^2 - 0.15h^3 - 0.1h^4$$

where the remainder term is

$$R_4 = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}h^5 = 0$$

because the fifth derivative of a fourth-order polynomial is zero. Consequently, the Taylor series expansion to the fourth derivative yields an exact estimate at $x_{i+1} = 1$:

$$f(1) = 1.2 - 0.25(1) - 0.5(1)^2 - 0.15(1)^3 - 0.1(1)^4 = 0.2$$

In general, the nth-order Taylor series expansion will be exact for an nth-order polynomial. For other differentiable and continuous functions, such as exponentials and sinusoids, a finite number of terms will not yield an exact estimate. Each additional term will contribute some improvement, however slight, to the approximation. This behavior will be demonstrated in Example 4.2. Only if an infinite number of terms are added will the series yield an exact result.

Although the above is true, the practical value of Taylor series expansions is that, in most cases, the inclusion of only a few terms will result in an approximation that is close enough to the true value for practical purposes. The assessment of how many terms are required to get "close enough" is based on the remainder term of the expansion. Recall that the remainder term is of the general form of Eq. (4.8). This relationship has two major drawbacks. First, ξ is not known exactly but merely lies somewhere between x_i and x_{i+1}. Second, to evaluate Eq. (4.8), we need to determine the $(n + 1)$th derivative of $f(x)$. To do this, we need to know $f(x)$. However, if we knew $f(x)$, there would be no need to perform the Taylor series expansion in the present context!

Despite this dilemma, Eq. (4.8) is still useful for gaining insight into truncation errors. This is because we *do* have control over the term h in the equation. In other words, we can choose how far away from x we want to evaluate $f(x)$, and we can control the number of terms we include in the expansion. Consequently, Eq. (4.8) is usually expressed as

$$R_n = O(h^{n+1})$$

Ordem	0	1	2	3	4
Valor	1,2	0,95	0,45	0,3	0,2
Erro	1	0,75	0,25	0,1	0

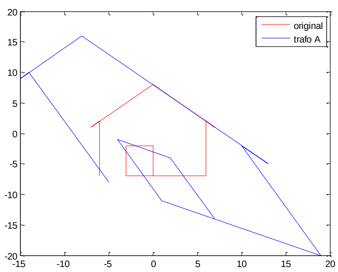
5P (inclusive figura) Taylor é polinomio, assim converge para valor real quando ordem da sério é igual a do polinomio. Para outras função teremos infinitos termos da série de Taylor.

6. Consideramos uma elemento quadrado no plano x-y delimitada pelo dois vetores unitários **i** e **j** e que é transformada de forma que um ponto P:(x_1, x_2) vai até o ponto Q:(y_1, y_2) dado por $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
   a. Encontre as direções principais, isto é, as direções do vetor-posição $\vec{x}$ de P para as quais a direcao do vetor-posição $\vec{y}$ de Q é a mesma ou exatamente a oposta.
   b. Qual é o angulo entre as direções principais?
   c. Que forma assume o quadrado sob essa deformação? Faça um desenho esquemático com o quadrado, os vetores das direções principais e a deformação final.
   d. A deformação modifique a área do quadrado (justifique e quantifique sua resposta com uma frase)?
   e. A deformação mantém o sentido do quadrado? Justifique sua resposta com poucas palavras.
   f. Mostre que a matriz A pode ser escrita como A = $S\Lambda S^{-1}$ = $S\Lambda S^{-1}$ sendo S a matriz dos autovetores e Λ a matriz dos autovalores.
   g. Mostre com f) que $A^2 = S\Lambda^2 S^{-1}$
   h. Explique em uma frase a utilidade de g)

Solução:

a) $(2-\lambda)(2-\lambda)-1=0$
   $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$
   $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$
   $\lambda_1 = 3$: $-x_1 - x_2 = 0$; $-x_1 = x_2$; escolhe $x_2 = 1 \rightarrow x_1 = -1$
   $\lambda_2 = 1$: $x_1 - x_2 = 0$; $x_1 = x_2$; escolhe $x_2 = 1 \rightarrow x_1 = 1$

b) $autovet_1 * autovet_2 = |autovet_1||autovet_2| \cos(\varphi) \iff (-1+1)/2 = 0 = \cos(\varphi) \rightarrow \varphi = 90°$



c)

d) det(A) = 4-1 = 3, modifique área três vezes maior

e) Mantem sentido porque det(A) é positivo (porta não muda do lado)

f) Matriz dos autovetores (normalizado) S = 1/sqrt(2)* [-1 1; 1 1]
   det (S) =-1
   $S\Lambda S^{-1}$ = 1/sqrt(2)*[-1 1; 1 1]*[3 0; 0 1]*1/(-1)*1/sqrt(2)*[1 -1; -1 -1] = A
   $S\Lambda S^{t}$ = 1/raiz(2)[-1 1; 1 1]*[3 0; 0 1]*1/raiz(2)[-1 1; 1 1] = A

g) $A^2 = (S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1}) = (S\Lambda S^{-1}S\Lambda S^{-1}) = (S\Lambda I\Lambda S^{-1}) = (S\Lambda\Lambda S^{-1}) = S\Lambda^2 S^{-1}$

h) O quadrado da matriz de autovalores é muito fácil para calcular, já que somente faz quadrado dos elementos na diagonal.Assim cálculos repetidos podem ser simplificados.

Equações dadas:

Serie de Taylor: $f(x) = \Sigma^{\infty}_{m=0} (x-a)^m f^{(m)}(a)/m!$

Boa sorte!