Curitiba, 18.9.2018

Exercício E2
Matemática Aplicada I

Tobias Bleninger
Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, Prédio Administração, 3º andar, sala 13

Data de entrega (em sala ou até 12h): 28.09.2018
(trabalhos atrasados receberão a nota 0)

Estes são os exercícios da disciplina Matemática Aplicada I. Não é permitido copiar ou entregar trabalhos em grupos. As soluções deverão ser por escrito, não impressas (apenas gráficos, tabelas ou códigos computacionais). Obs.: Figuras sem descrição dos eixos e legenda e números com dígitos significativos exagerados causarão redução significativo de pontos. Os trabalhos computacionais podem ser feitos com programas de livre escolha (se não for indicado um especifico na questão), desde que providenciado a informação da ferramenta e o código fonte do exercício (impresso em anexo).

O trabalho corrigido será devolvido depois e conta para a nota final.

Informações adicionais (software, livros textos, avaliação, etc.):
http://www.ambiental.ufpr.br/portal/professores/tobias/teaching/matematica-aplicada-i/

Nome: ____

Matricula: ____

Assinatura (garantindo que o trabalho foi feito sem copiar):

____

E-mail (somente para avisos importantes):

____

Pontuação (preenchido pelo Professor):

Questão	Pontos	Pontos totais		
1				
2				
3				
4				
5				
6			Porcentagem	
Soma				Nota
Final				

Questões

1. Estude e refaça os cálculos (não precisa anexar os cálculos manuais ao trabalho) do capitulo 4.1 de Kreyszig (http://www.ambiental.ufpr.br/portal/wp-content/uploads/2018/09/material.zip) e
    a. Calcule os resultados de todos os exemplos (1,2,3) utilizando Matlab ou Octave ou Python (especialmente para o calculo de autovetores e autovalores) e visualize os resultados em graficos para o problema original e no mínimo uma variação (livre escolha) no mesmo grafico.
    b. Compare e discute os resultados todos em no maximo 5 linhas de texto

Solução: veja rotina na pagina. Para calculo de constantes importante definir condições iniciais antes e assim definir os constantes. Por exemplo para exemplo 3:

$$y = 2c_1 e^{-0,5t} + c_2 e^{-1,5t}$$

$$y(0) = 2$$

$$2 = 2c_1 + c_2$$

$$y' = -c_1 e^{-0,5t} - 1,5c_2 e^{-1,5t}$$

$$y'(0) = 0$$

$$0 = -c_1 - 1,5c_2$$

$$\Rightarrow c_1 = -1,5c_2$$

$$2 = -3c_2 + c_2 = -2c_2$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_2 &= -1 \\ c_1 &= 1,5 \end{aligned}}$$

2. Determine as soluções do sistema de equações diferenciais (dx/dt = 2y e dy/dt=-6x + 7y) utilizando autovetores e autovalores (por exemplo seguindo o esquema da questão 1) ou seguindo o exemplo do Livro de Nelson Dias, p. 159, https://nldias.github.io/teaching.html#sec-1-5 ou inspirando se em outras referencias (por exemplo https://www.youtube.com/watch?v=vAG26jZgnpo ou http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/RealEigenvalues.aspx):
    a. Manualmente
    b. Utilizando Matlab ou Octave ou Python (especialmente para o calculo de autovetores e autovalores).
    c. Compare, visualize (gráficos) e interprete os resultados obtidos para constantes de livre escolha e utilizando características matriciais (determinante, autovetores, autovalores, simetria, etc.).

Solucao
https://www.youtube.com/watch?v=N_-YgCOWE0k

$$\lambda_1 = 3 \quad K_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 4 \quad K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$$

C.I.: Por exemplo x(0)=0: 2c1 + c2 = 0 e y(0) = 1: 3c1 + 2c2 = 1.
Segue: c2 = -2c1 e assim 3c1-4c1 = 1 e assim -c1 = 1 e assim c1 = -1 e c2 = 2

3. Dada a função

$$z = f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

a. Visualize a função
b. Determine a equação das curvas de nível analiticamente e visualize as curvas de nível
c. Determine a equação do gradiente da função f analiticamente e calcule df/ds no ponto $P = (\pi/(2\sqrt{2}), \pi/(2\sqrt{2}))$ ao longo da direção e sentido dados por $\boldsymbol{t} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.
d. Visualize o resultado de c) usando setas na mesma figura do item a)

Solução
Curvas de nível: z = const.
Códigos na pagina
Nelson, p. 210

Exemplo 7.12 Para a função $z = f(x, y)$ dada pela equação (7.75) e ilustrada na figura 7.8, calcule $\mathrm{d}F/\mathrm{d}s$ no ponto $P = (\pi/(2\sqrt{2}), \pi/(2\sqrt{2}))$ ao longo da direção e sentido dados por $\boldsymbol{t} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

SOLUÇÃO
Em P,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2\left(\frac{\pi}{(2\sqrt{2})}\right)^2} = \sqrt{2\frac{\pi^2}{2 \times 4}} = \frac{\pi}{2},$$

donde

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 1, \qquad \cos\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 0.$$

As derivadas parciais de f em relação a x e a y são

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -x\frac{\left[\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) - \sqrt{x^2 + y^2}\cos\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)\right]}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{2^{3/2}}{\pi^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y\frac{\left[\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) - \sqrt{x^2 + y^2}\cos\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)\right]}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{2^{3/2}}{\pi^2}.$$

A derivada direcional no ponto será

$$\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}\right|_P = \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right) \cdot \left(-\frac{2^{3/2}}{\pi^2}, -\frac{2^{3/2}}{\pi^2}\right) = -\frac{4}{\pi^2} \blacksquare$$

4. Dado a função $g(x,y,z) = xy^2 - 3z^3$
   a. Visualize a função e curvas de nível e o gradiente
   b. Calcule a derivada de $g(x,y,z) = xy^2 - 3z^3$ no ponto (1, -2, 4) na direção normal á superfície xy + xz + yz = -6
   c. Discute e interprete o resultado.

Exemplo 7.14 Calcule a derivada de $g(x, y, z) = xy^2 - 3z^3$ no ponto $(1, -2, 4)$ na direção normal à superfície $xy + xz + yz = -6$.

SOLUÇÃO
Se $G(s) = g(x(s), y(s), z(s))$, A derivada direcional é dada por

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{t} \cdot \nabla g,$$

portanto precisamos calcular o gradiente de g no ponto e também o vetor unitário $\boldsymbol{t}$ que dá a direção de variação de g. Comecemos pelo segundo: o vetor normal à superfície $F(x, y, z) = 0$ é ∇F; portanto, se

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= xy + xz + yz + 6, \\ \nabla F &= (y + z)\boldsymbol{i} + (x + z)\boldsymbol{j} + (x + y)\boldsymbol{k} \\ &= (-2 + 4)\boldsymbol{i} + (1 + 4)\boldsymbol{j} + (1 - 2)\boldsymbol{k} \\ &= 2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 1\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

O vetor normal *unitário* é

$$\boldsymbol{t} = \frac{1}{\sqrt{30}}(2, 5, -1).$$

O gradiente de g no mesmo ponto é

$$\begin{aligned} \nabla g &= y^2\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j} - 9z^2\boldsymbol{k} \\ &= 4\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 144\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{30}}(2, 5, -1) \cdot (4, -4, -144) = \frac{132}{\sqrt{30}} \approx 24{,}0997 \blacksquare$$

5. Pesquise sobre "analise de componentes principais" ou "principal componente analysis, PCA" (por exemplo: https://www.youtube.com/watch?v=4vD302OQ9GY, https://www.youtube.com/watch?v=FgakZw6K1QQ, https://www.mathworks.com/help/stats/pca.html), e
   a. Descreva o método em no máximo 10 linhas de texto e destacando a utilização de autovetores.
   b. Descreva (no máximo 5 linhas de texto) no mínimo 3 aplicações.

6. *Questão para treinamento (não conta para esta lista, mas importante fazer, não precisa anexar nada a respeito, mas pode ser discutido em sala ou consultas)!*
   a. Refaça os exercícios de Chapra (http://www.ambiental.ufpr.br/portal/wp-content/uploads/2018/09/material.zip) manualmente.
   b. Solve os sistemas resultantes em Matlab, Octave ou Python (a solução encontra se também no material adicional).
   c. Avalie os arquivos m-files da solução e identifique as modificações feitas ao sistema original que consta no código.
   d. Discute e interprete os resultados.