Curitiba, 10.10.2018

Prova 2

Matemática Aplicada I

Tobias Bleninger
Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, Bloco V, Caixa Postal 19011, 81531-990, Curitiba - PR, Brasil

Nome: _____

GRR: _____

Pontuação (preenchido pelo Professor):

Questão	Pontos obtidos	Pontos totais		
1		40		
2		13		
3		10		
4		12		
5		15	Porcentagem	
Soma				Nota
Final (corrigido)				

Questões

1. (40) Dado o problema $2y'' - 2y' - 4y = 6te^t$, $y(t=0) = 4$, $y'(t=0)=1$
   a. Classifique a edo (ordem, linearidade, homogeneidade).
   b. Calcule a solução analítica da equação homogênea, transformando a edo obrigatoriamente em um sistema e utilizando autovetores e autovalores.
   c. Dado a solução particular, $y_p = (1{,}5t^2 - 3t)e^t$ para a equação não homogênea, descreva a solução geral.
   d. Calcule a solução final aplicando as condições iniciais.

Solução:

a) edo2, linear, não homogêneo com coeficientes constantes

3P

b) Solução homogênea

$2y'' - 2y' - 4y = 0 \rightarrow$ dividido por 2 $\rightarrow y'' - y' - 2y = 0$

$\mathbf{y} = \mathbf{y_h} = [y_h(t)\ y_h'(t)]^t = [y_{1h}(t)\ y_{2h}(t)]^t$

$\mathbf{y_h'} = [y_h'(t)\ y_h''(t)]^t = [y_{1h}'(t)\ y_{2h}'(t)]^t = [y_{2h}(t)\ (2y_{1h}(t)\ y_{2h}(t))]^t$

em forma matricial:

$$\mathbf{y_h'} = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}\ \mathbf{y_h} = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}\ \begin{matrix} y_{1h}(t) \\ y_{2h}(t) \end{matrix}$$

7P

$$A-\lambda I = \begin{matrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{matrix}$$

$\det(A-\lambda I) = (-\lambda)(1-\lambda) - 2 = -\lambda+\lambda^2 - 2 = 0$

$\rightarrow (1+/-\text{sqrt}(1-4*1*(-2)))/2 = (1+/-3)/2$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$:

5P

Autovetores correspondentes:

$\lambda_1 = 2$:

$Ax = \lambda x$

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}\ \mathbf{x} = 2\mathbf{x} \Leftrightarrow \quad x_2 = 2x_1,\quad 2x_1 + x_2 = 2x_2 \rightarrow 2x_1 = x_2,\quad x_1 = 1 \rightarrow x_2 = 2$$

$\lambda_2 = -1$:

$Ax = \lambda x$

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}\ \mathbf{x} = -\mathbf{x} \Leftrightarrow \quad x_2 = -x_1,\quad 2x_1 + x_2 = -x_2 \rightarrow -2x_2 = 2x_1,\ x_2 = 1 \rightarrow x_1 = -1$$

5P

$y_{1h} = y_h = c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t}$

$y_{2h} = y_h' = c_1 2e^{2t} + c_2 e^{-t}$

5P

((Solução não homogênea, não necessário deducir esta parte

$y_p = (at^2 + bt)e^t$

$y_p' = (2at + b)e^t + (at^2 + bt)e^t$

$y_p'' = 2ae^t + (2at + b)e^t + (2at + b)e^t + (at^2 + bt)e^t$

$2ae^t + (2at + b)e^t + (2at + b)e^t + (at^2 + bt)e^t - (2at + b)e^t + (at^2 + bt)e^t - 2(at^2 + bt)e^t = 3te^t$

$\rightarrow 2a + 2at + b = 3t$

$2a = 3 \rightarrow a = 1{,}5$

$3 + b = 0 \rightarrow b = -3)))$

$\mathbf{y} = \mathbf{y_h} + y_p$

$y_p = (1{,}5t^2 - 3t)e^t$

Solução geral

$y = c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} + (1{,}5t^2 - 3t)e^t$

$y' = c_1 2e^{2t} + c_2 e^{-t} + (3t-3)e^t + (1{,}5t^2 - 3t)e^t = c_1 2e^{2t} + c_2 e^{-t} + (-3 + 1{,}5t^2)e^t$

5P

Cond. Iniciais:

$y(0) = 4,$

$y(0) = c_1 - c_2 = 4 \rightarrow c_2 = c_1 - 4$

$y'(0) = c_1\, 2 + c_2 - 3 = 1 \rightarrow 2c_1 + c_1 - 4 - 3 = 3c_1 - 7 = 1 \rightarrow c_1 = 8/3,\ c_2 = 8/3 - 4 = -4/3$

$y = 8/3\, e^{2t} + 4/3e^{-t} + (1{,}5t^2 - 3t)e^t$

10P

2. (13) Dado o problema $2y' - 2x^2y = -2y^2 + 6$, $y(3) = 7$
   a. Classifique a edo (ordem, linearidade, homogeneidade).
   b. Faça a discretização usando o método de Euler regressivo
   c. Descreva o algoritmo para obter a solução numérica deste problema (em poucas palavras, equações e/ou comandos)
   d. Escolhe um passo espacial e calcule os resultados numéricos para no mínimo quatro passos.

Solucao

a) Edo1, não linear, não homogêneo,

3P

b) $2y' - 2x^2y = -2y^2 + 6$

$y' = x^2y - y^2 + 3$

$y_i' \approx (y_i - y_{i-1})/\Delta x$

$(y_i - y_{i-1})/\Delta x = x_i^2y_i - y_i^2 + 3$

$y_i - (x_i^2y_i - y_i^2)\,\Delta x = y_{i-1} - 3\Delta x$

5P

c)

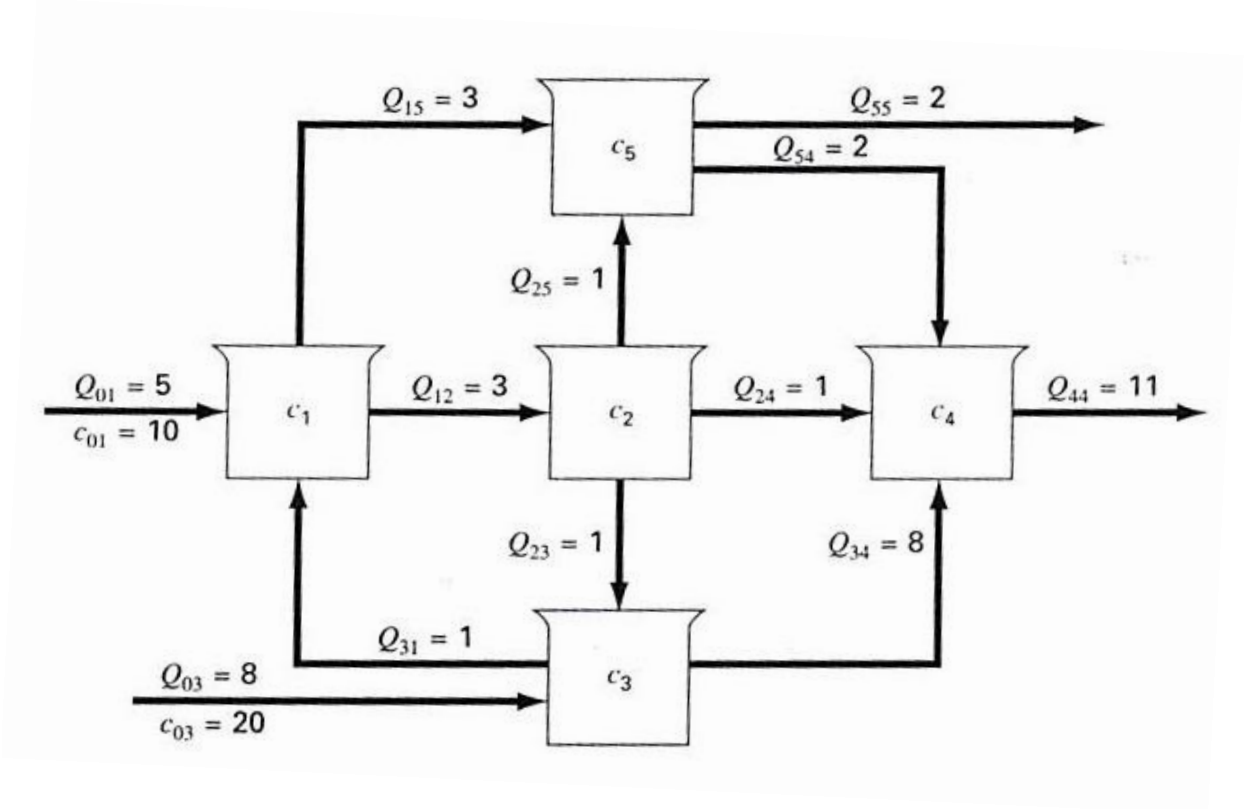
```
Define dx;
Define intervalo x = [3:dx:5.0];
Inicializa vetor
Define condição inicial
Loop com iteração para obtenção de yi

5P
```

d) 7.0000 7.1700 7.3355 7.4965 7.6527 7.8043 7.9512

5p

3. (10 Pontos) Considera o sistema permanente de reatores interligados (todos completamente misturados) na seguinte figura onde Q define a vazão (m^3/min.) e c a concentração (mg/m^3) para cada tubulação.



a. Descreva **uma** équação de conservação de massa para **o reator 5** do sistema.
b. Descreva quantas equações e quantas incógnitas se obtém para o sistema todo.
c. Descreva o algoritmo e/ou o(s) comandos para obter o resultado de concentrações em cada reator (uma frase somente, não é necessário fazer o calculo!).

Solução

$$Q_{12}c_1 + Q_{15}c_1$$

Because the system is at steady state, the inflows and outflows must be equal:

$$5(10) + Q_{31}c_3 = Q_{12}c_1 + Q_{15}c_1$$

or, substituting the values for flow from Fig. 12.3,

$$6c_1 - c_3 = 50$$

Similar equations can be developed for the other reactors:

$$-3c_1 + 3c_2 = 0$$
$$-c_2 + 9c_3 = 160$$
$$-c_2 - 8c_3 + 11c_4 - 2c_5 = 0$$
$$-3c_1 - c_2 + 4c_5 = 0$$

... method can be used to solve these five equations for the five unknown

a. 5P Q15*C1 + Q25*C2 = Q54*C5 + Q55*C5 com valores: -3C1 - C2 + 4C5 = 0
b. 3P 5 reatores = 5 equações. 5 concentrações = 5 incognitas

```
[6 0 -1 0 0          50
 -3 3 0 0 0          0
 0 -1 9 0 0     *C =  160
 0 -1 -8 11 -2       0
 -3 -1 0 0 4         0
```

c. 2P C = A\b

4. (12 P) Dado a função f(a,b,c) = ab² - 3c³ calcule a derivada de f no ponto (1, -2, 4) na direção normal á superfície ab + ac + bc = -6

Exemplo 7.14 Calcule a derivada de $g(x, y, z) = xy^2 - 3z^3$ no ponto $(1, -2, 4)$ na direção normal à superfície $xy + xz + yz = -6$.

SOLUÇÃO

Se $G(s) = g(x(s), y(s), z(s))$, A derivada direcional é dada por

$$\frac{dG}{ds} = \boldsymbol{t} \cdot \nabla g,$$

portanto precisamos calcular o gradiente de g no ponto e também o vetor unitário $\boldsymbol{t}$ que dá a direção de variação de g. Comecemos pelo segundo: o vetor normal à superfície $F(x, y, z) = 0$ é ∇F; portanto, se

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= xy + xz + yz + 6, \\ \nabla F &= (y + z)\boldsymbol{i} + (x + z)\boldsymbol{j} + (x + y)\boldsymbol{k} \\ &= (-2 + 4)\boldsymbol{i} + (1 + 4)\boldsymbol{j} + (1 - 2)\boldsymbol{k} \\ &= 2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 1\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

O vetor normal *unitário* é

$$\boldsymbol{t} = \frac{1}{\sqrt{30}}(2, 5, -1).$$

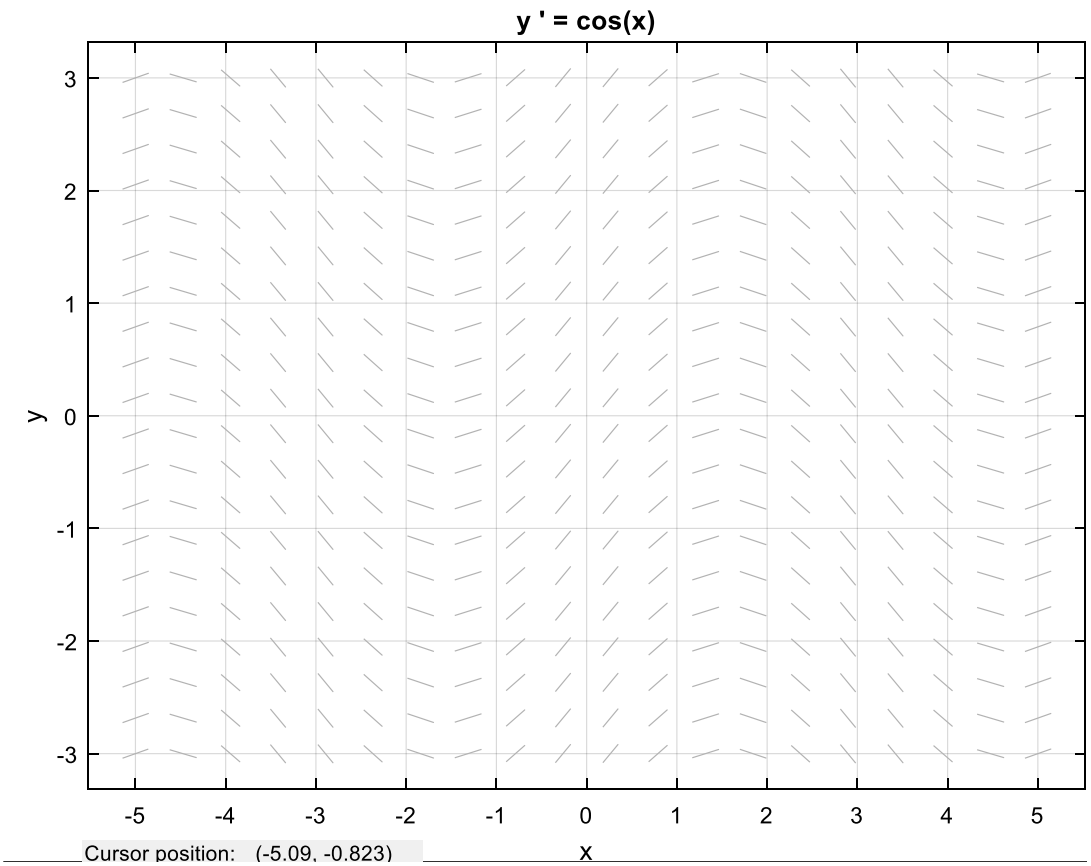
O gradiente de g no mesmo ponto é

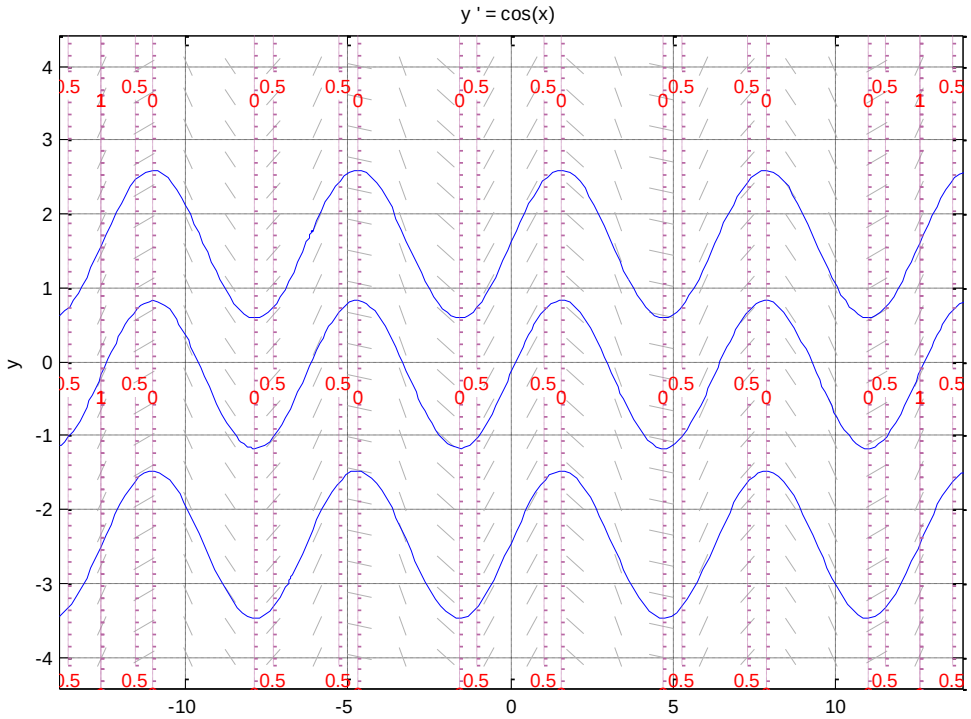
$$\begin{aligned} \nabla g &= y^2\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j} - 9z^2\boldsymbol{k} \\ &= 4\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 144\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

Finalmente,

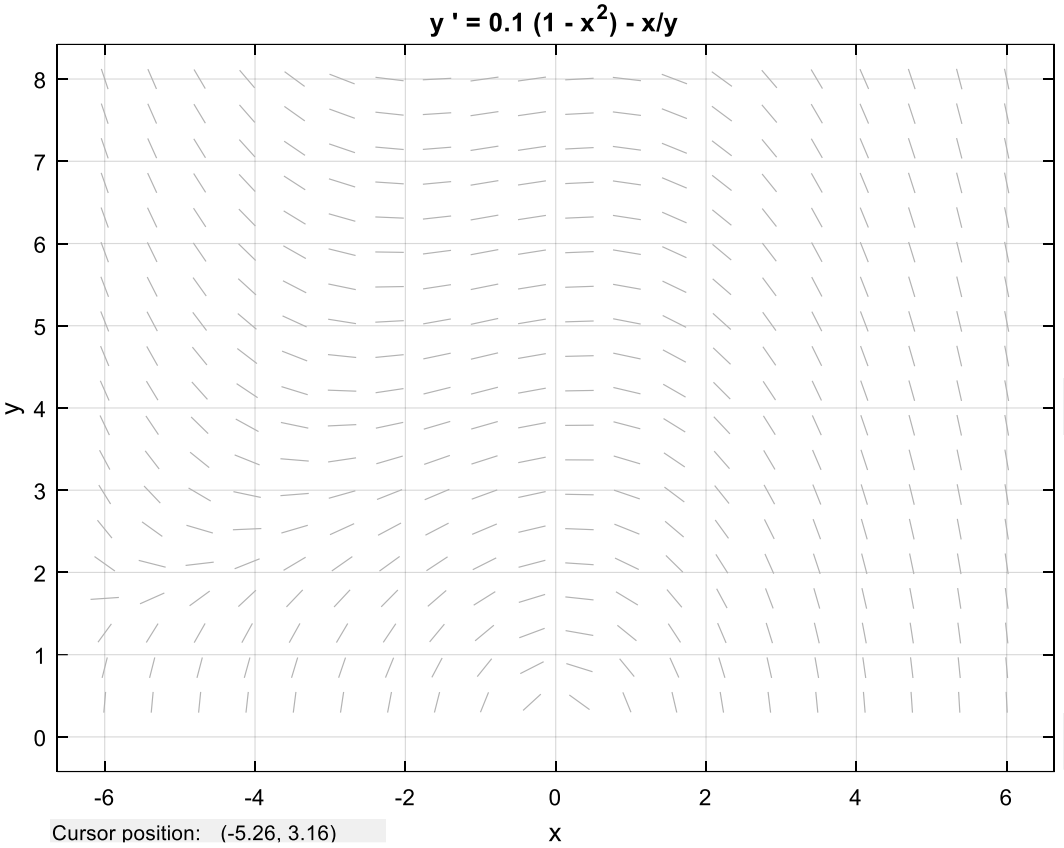
$$\frac{dG}{ds} = \frac{1}{\sqrt{30}}(2, 5, -1) \cdot (4, -4, -144) = \frac{132}{\sqrt{30}} \approx 24{,}0997 \blacksquare$$

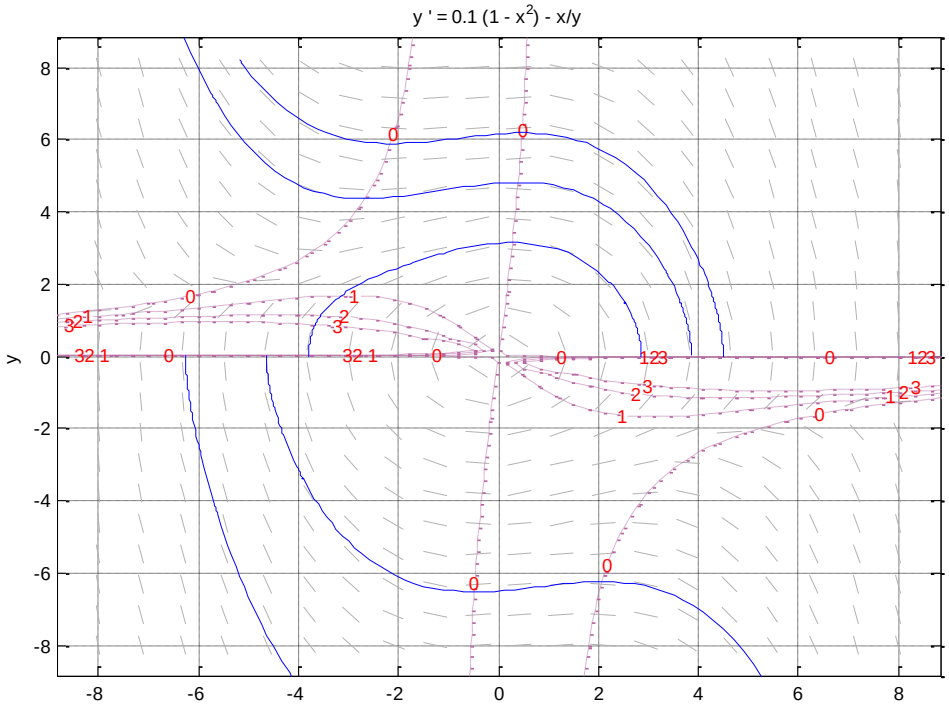
5. Dados os campos direcionais das equações, i) trace as duas soluções no próprio gráfico dado e ii) trace no mínimo duas linhas de nível, indicando o valor estimado do nível escolhido.
   a. y'=cos x, y(-2) = -2 e y(-5) = 2



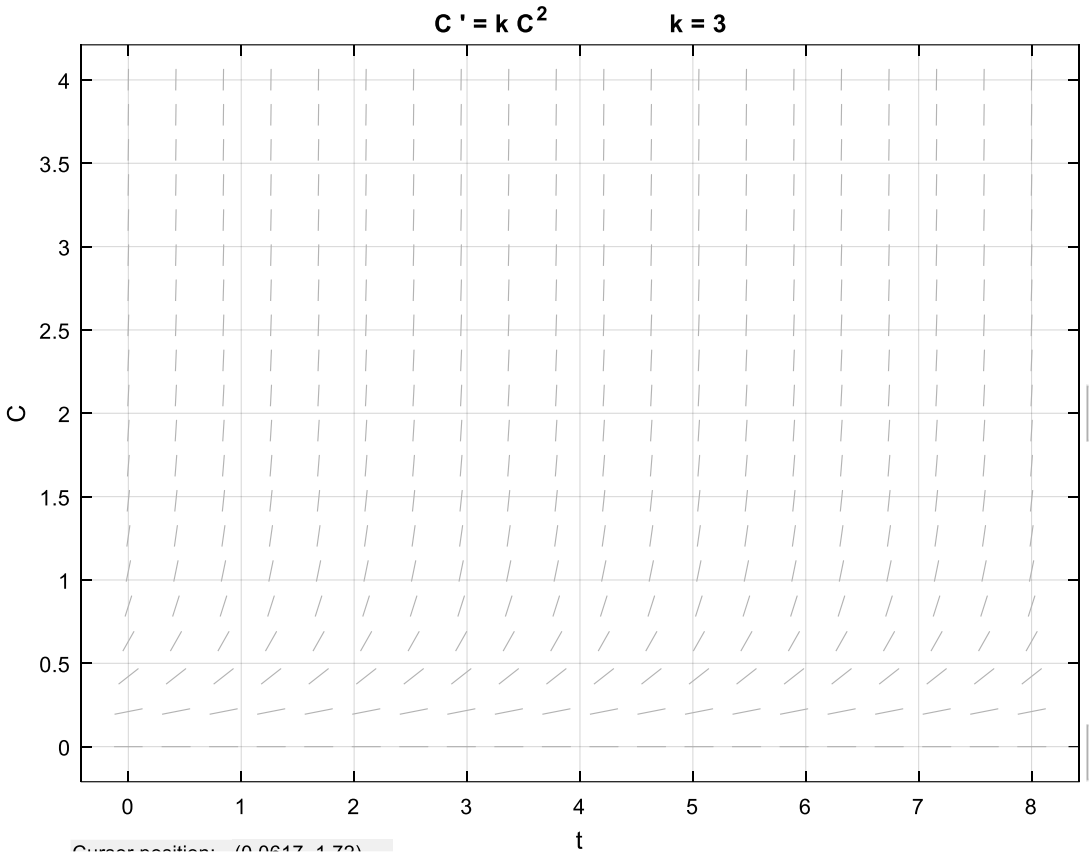


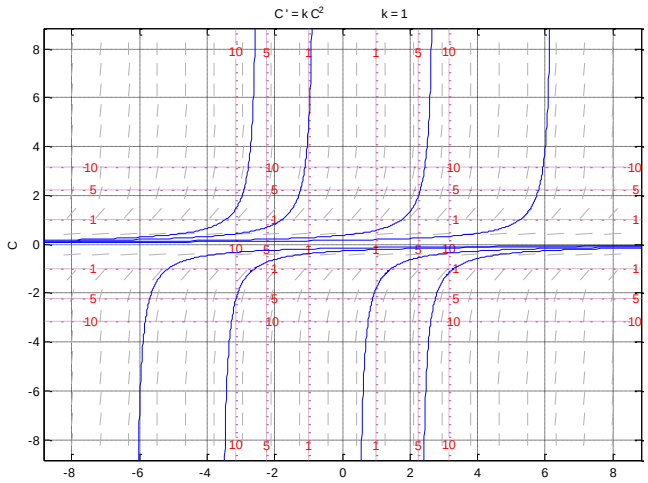
b. $y'=0{,}1(1-x^2)-x/y$, $y(-6) = 8$ e $y(-6) = 1$





c. dC/dt=kC², C(0)=0,25 e C(5)=0,25





Boa sorte!