

Tobias Bleninger

MATEMÁTICA APLICADA I

- **Graduação:** Engenharia Civil, *Karlsruhe Institute of Technology (KIT), Alemanha (2000)*
- **Doutorado:** Hidráulica Ambiental, *KIT, (2006)*
- **Líder do Grupo de Pesquisa** “Environmental Fluid Mechanics”, *KIT, (2007-2011)*
- **Professor Visitante** no DHS, *UFPR (2009-2011)*
- **Professor efetivo** no Departamento de Engenharia Ambiental (DEA), *UFPR (desde 2011)*
- **Membro** do Programa de pós-graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental (PPGERHA) e Engenharia Ambiental (PPGEA)

Disciplinas ofertadas na UFPR

Graduação Engenharia ambiental:

- Mecânica dos Fluidos Ambiental I
- Mecânica dos Fluidos Ambiental II
- Matemática Aplicada I
- Matemática Aplicada II

Pós-Graduações

- Fenômenos de Transporte
- Hidrodinâmica de Sistemas Ambientais
- Mecânica dos Fluidos Experimental I e II
- Hidráulica de Canais

Cursos de curta duração

- Curso de Delft3D
- Curso de CORMIX
- Mini-curso de MatLab/Octave/Freemat

Linhas de pesquisa:

- ***Mecânica dos fluidos ambientais:*** jatos e plumas, fenômenos de mistura e transporte, emissários submarinos, transferência de gases
- ***Hidráulica ambiental:*** difusores, rios, tanques de mistura, hidráulica em tanques de estações de tratamento de água e esgoto

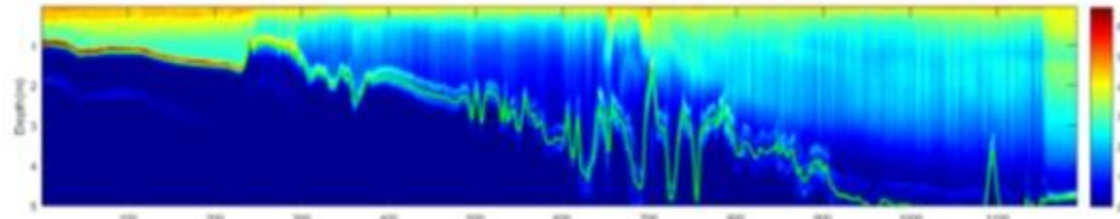
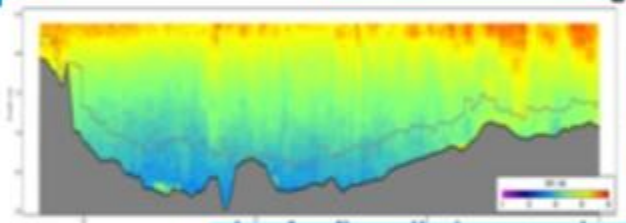
Métodos:

- ***Modelagem numérica e modelos físicos:*** 1D nível de água, 2D e 3D escoamentos com superfície livre e modelos de transporte para rios, lagos e águas costeiras, qualidade de água
- ***Medição em campo e laboratório de processos hidrodinâmicos***
(Particle Image and Particle Tracking Velocimetry, PIV, PTV)

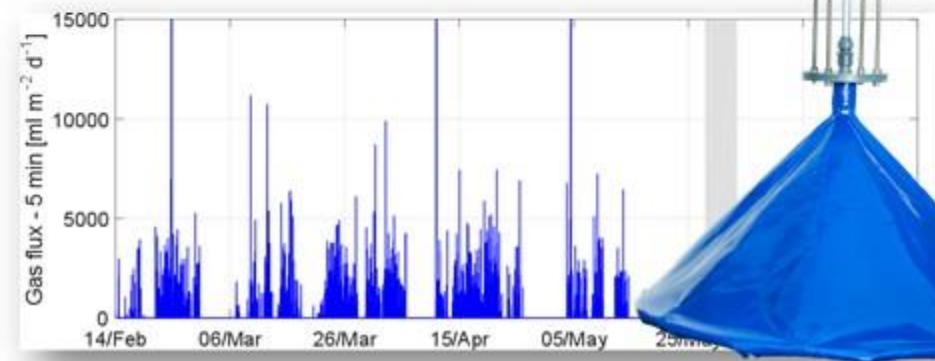
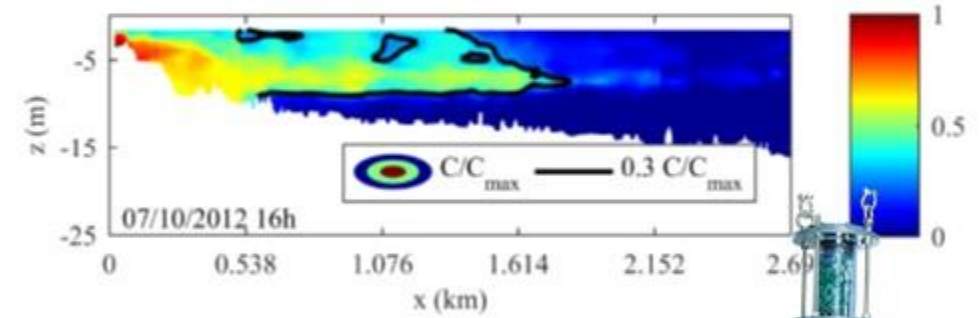
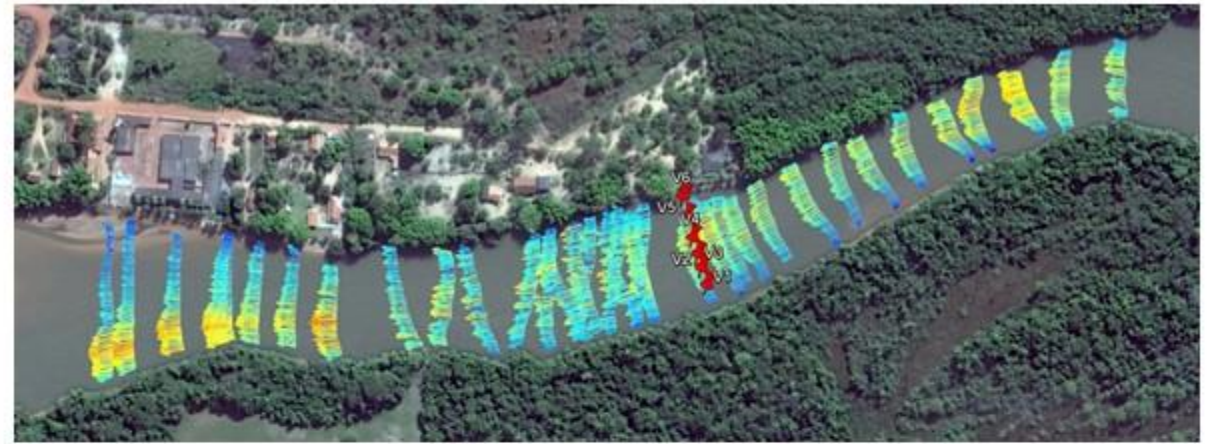
- “MuDaK: Multidisciplinary Data Acquisition as a Key for a globally applicable Water Resource Management”, financed by BMBF within the GROW program.
- “Elaboração de Estudo de Implementação e Aplicação de Modelos Hidrodinâmicos e de Qualidade das Águas Superficiais de Domínio da União como apoio à Tomada de Decisões em Proposta de Enquadramento – Estudo de caso dos Rios Paranapanema e Itararé integrados aos reservatórios em suas calhas na UGRH Paranapanema” Financed by Agencia Nacional de Água (ANA).
- “SeWaMa: Innovative approaches for future sediment and water management in Brazil”, financed by CAPES and DAAD within the NoPa program.
- Simulações em 3-D do escoamento e transporte e qualidade de água para águas costeiras, fluviais e reservatórios

Pesquisa

Cross-Section



Density Current Formation



Informações gerais

- **Disciplina: Matemática Aplicada I**
TEA 010, 6 créditos, disciplina obrigatória, carga horária: 90h
- **Professor: Dr.-Ing. Tobias Bleninger**
bleninger@ufpr.br
www.bleninger.info
Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, Prédio Administração, 3º andar, sala 13
- **Horários e sala:**
 - Segundas (PK-01), Quartas (PF-01) e Sextas (PL-04)
 - 07:30-09:10h com compensações (em forma de tutoriais) a tarde ou 07:30-09:25h
- **Consultas: Por favor, agendar por email ou telefone**
- **Home Page:** <http://www.ambiental.ufpr.br/portal/professores/tobias/teaching/matematica-aplicada-i/>

Alunos

- Nome
- Já fez Matemática Aplicada 1?
- Programação:
 - Matlab
 - Python
 - C++
 - Fortran
- Tem notebook ou PC disponível?
- Qual sistema operacional?

Avaliações

- 1 Prova **P1** (sem consulta)
- 2 Exercícios **E1** (individual) e **E2** (grupo com apresentação oral e arguição)
- Nota **N** = $1/2\mathbf{P1} + 1/4\mathbf{E1} + 1/4\mathbf{E2}$
- se $N \geq 7$ aprovado com nota final $N_F = N$
- se $N < 4$ reprovado
- se $4 \leq N < 7$ prova final F
- se $(F+N)/2 \geq 5$ aprovado com nota final $N_F = (F+N)/2$
- se $(F+N) < 5$ reprovado
- Presença: se faltas maior de 25%: reprovado

No.	Dia	Data	Conteúdo
1	seg.	05/08/2019	Apresentação e Introdução. Temas. Calendário. Motivação e contexto (notas em pdf)
2	qua.	07/08/2019	1) Ferramentas computacionais. Introdução a formatos. Programas e conceitos. Revisão de programação científica. Editores e Software matemático (veja notas em pdf e software (links na bibliografia) e tutoriais em Matlab).
3	sex.	09/08/2019	Exemplos (dados-ascii-1 ou dados2) e visualização e plotagem. Processamento simbólico.
4	seg.	12/08/2019	2) Funções e polinômios. Integração analítica e numérica (notas em pdf). Exemplo polinômios (m-files).
5	qua.	14/08/2019	Iteração, interpolação, aproximação (veja tutorial em Matlab).
6	sex.	16/08/2019	Exercícios computacionais com notebook em sala
7	seg.	19/08/2019	Extrapolação. Expansão em series de Taylor
8	qua.	21/08/2019	3) Geometria e álgebra. Vetores e matrizes. Determinantes e Hipervolumes. Soluções de sistemas de equações lineares.
9	sex.	23/08/2019	Eliminação de Gauss. Inversão de Matrizes. Método Gauss-Jordan, Gauss-Seidel, Jacobi (exemplos computacionais de Wen Shen, Penn State University)
10	seg.	26/08/2019	Transformações Lineares. (Tutoriais e rotinas em Matlab (-> Matrices)) Exemplos e exercícios (casa.zip). Autovalores e autovetores (veja filme1 , filme2 , filme2).
11	qua.	28/08/2019	Exercícios computacionais com notebook em sala
12	sex.	30/08/2019	Aplicações de problemas de autovalores. Aplicações geométricas.
–	seg.	02/09/2019	a confirmar – sem aula – professor afastado
–	qua.	04/09/2019	a confirmar – sem aula – professor afastado
–	sex.	06/09/2019	a confirmar – sem aula – professor afastado
13	seg.	09/09/2019	Exercícios computacionais com notebook em sala
14	qua.	11/09/2019	Aplicações usando Matlab ou Octave para problemas de autovalores e autovetores. Entrega E1
15	sex.	13/09/2019	Geometria Diferencial e Integral. Funções vetoriais. Transferência de coordenadas.
16	seg.	16/09/2019	Gradiente, divergente, rotacional (pdf , m-files)
17	qua.	18/09/2019	Discussão E1

18	sex.	20/09/2019	4) Equações diferenciais ordinárias (ver video aulas do MIT e da Mathworks).
19	seg.	23/09/2019	Campos direcionais (m-file do GUI ou online).
20	qua.	25/09/2019	Prova P1
21	sex.	27/09/2019	Soluções numéricas de edo – Metodo de Euler. Diferenças progressivas e regressivas (m-files).
22	seg.	30/09/2019	Métodos multiiterativos – Runge Kutta (pdf , m-files da aula). Soluções analíticas e numéricas de edo – ordem 2, com coeficientes constantes.
–	qua.	02/10/2019	EVINCI
23	sex.	04/10/2019	Exercícios computacionais com notebook em sala
24	seg.	07/10/2019	Soluções de sistemas de edos. Soluções numéricas de sistemas de edos (m-files).
25	qua.	09/10/2019	Exercícios computacionais com notebook em sala
–	sex.	11/10/2019	sem aula – professor afastado
–	seg.	14/10/2019	sem aula – recesso
–	qua.	16/10/2019	sem aula – professor afastado
–	sex.	18/10/2019	sem aula – professor afastado
–	seg.	21/10/2019	sem aula – professor afastado
–	qua.	23/10/2019	sem aula – professor afastado
–	sex.	25/10/2019	sem aula – professor afastado
26	seg.	28/10/2019	Soluções analíticas e numéricas de edo de ordem superior, homogêneas.
27	qua.	30/10/2019	Soluções analíticas e numéricas de edo de ordem superior, não homogêneas. Exercícios (plano de fase)
28	sex.	01/11/2019	Soluções numéricas de sistemas de edos (abaixe, extraia, adicione local para comandos de Matlab ou Octave usando <code>>>addpath c:\...\exm</code> , link), modelo predador-presa , aplicações e m-files e descrições de White).
29	seg.	04/11/2019	Equações de Legendre.
30	qua.	06/11/2019	Método de Frobenius.



33	qua.	13/11/2019	Transformada de Laplace para edos.
–	sex.	15/11/2019	sem aula – feriado
34	seg.	18/11/2019	Aplicações de transformadas de Laplace para edos.
35	qua.	20/11/2019	Aplicações de series e transformadas e funções especiais em Matlab/Octave (m-files).
36	sex.	22/11/2019	Problemas de valor de contorno (veja por exemplo pdf e codigos no Matlab e pdf e aplicação1 e aplicação2 (Octave) e código Octave)
–	seg.	25/11/2019	sem aula – recesso vestibular
–	qua.	27/11/2019	sem aula – professor afastado
–	sex.	29/11/2019	sem aula – professor afastado. Entrega E2
37	seg.	02/12/2019	Apresentação final E2
38	qua.	04/12/2019	Apresentação final E2
39	seg.	09/12/2019	Prova Final

Bibliografia

- Steven Chapra, Métodos Numéricos para Engenharia, 5a edicao, McGraw Hill, Sao Paulo, 2008 (link para apresentacoes, link para m-files)
- Parkhurst, David F. Introduction to applied mathematics for environmental science. Springer Science & Business Media, 2007.
- Kreyszig, E., 1999, Advanced Engineering Mathematics, Wiley & Sons, ISBN: 0-471-15496-2 (existe tambem versao em portugues, veja em baixo)
- Erwin Kreyszig, 2009, “Matematica superior para engenharia”, Volumes 1-3, ISBN: v. 1 9788521616436 : v. 2 9788521616443 : v. 3 9788521616450, Rio de Janeiro, LTC
- Nelson, L.D., 2011, Apostila de Matematica Aplicada a Engenharia, Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
- Mais informações e referencias online na pagina da disciplina:
<http://www.ambiental.ufpr.br/portal/professores/tobias/teaching/matematica-aplicada-i/>

Software

- [MatLab](#) (programa computacional, existem licenças acadêmicas). [Tutoriais!](#) e [Mini-Curso!](#) ou [Octave](#) (alternativa grátis parecido com MatLab)
- [Maple](#) (programa matemático, profissional, especialmente para operações simbólicas) ou [Maxima](#) (alternativa grátis parecido)
- [UltraEdit](#) (editor de texto profissional, pode editar colunas) ou [PSPad](#) (editor de texto grátis, pode editar colunas)
- Microsoft [Excel](#) (programa de calculo em tabelas) ou [Calc](#) (programa de calculo em tabelas grátis, do sistema OpenOffice)

Definição e objetivos

- A Matemática Aplicada cria a habilidade de **aplicar métodos matemáticos** a conceitos e modelos da **engenharia ambiental**.
- Apresentar **exemplos de aplicações** e elaborar cálculos relacionados a problemas típicos de Mecânica dos Fluidos, Fenômenos de Transporte, nos **ambientes atmosféricas, águas superficiais e subterrâneos e processos tecnológicos**.
- Isto inclui aplicações de álgebra linear, equações diferenciais ordinárias, transformações, campos escalares e vetoriais usando soluções analíticas e numéricas. Introdução e aplicação de ferramentas computacionais para resolução de problemas matemáticas.

Porque?

- Modelos matemáticos são ferramentas que ajudam em projetos da engenharia para quantificar e determinar características relevantes (por exemplo velocidades, níveis, concentrações, populações, temperaturas, ...).
- Especialmente antes da construção ou antes de ações e para fazer cenários (simulação e previsão).
- Assim, complementando estudos com modelos reduzidos e estudos em campo.

Aplicações

Porque EDOs?

$\frac{dN}{dt}$ = rates of population change

$\frac{dm}{dt}$ = mass flow rates

$\frac{dx}{dt}$ = velocities

$\frac{dT}{dt}$ = rates of temperature change

$\frac{dT}{dz}$ = vertical temperature gradients (lapse rates)

$\frac{dP}{dz}$ = pressure gradients

$\frac{dC}{dx}$ = concentration gradients.

momentum equation :

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p + g\hat{z} = 0,$$

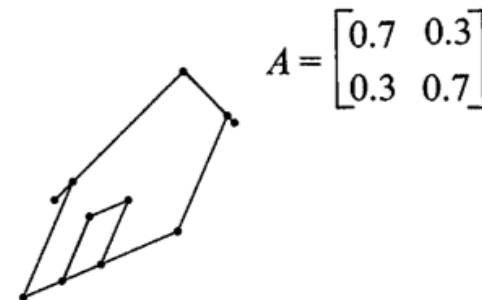
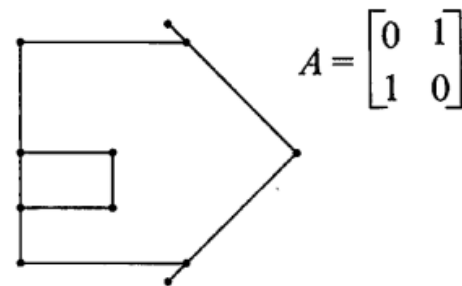
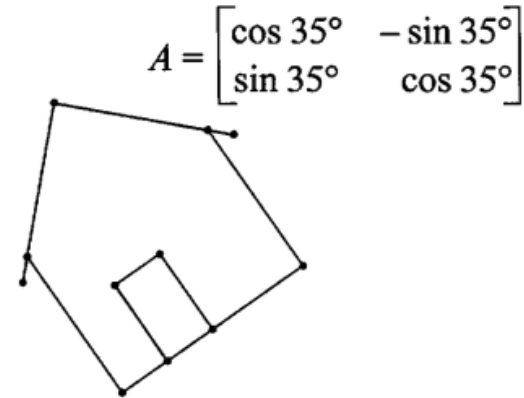
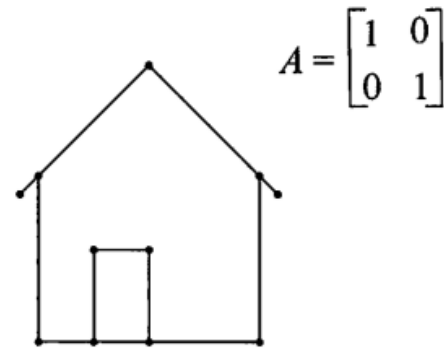
continuity equation :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

Aplicações

Porque Matrizes ?

House matrix $H = \begin{bmatrix} -6 & -6 & -7 & 0 & 7 & 6 & 6 & -3 & -3 & 0 & 0 & -6 \\ -7 & 2 & 1 & 8 & 1 & 2 & -7 & -7 & -2 & -2 & -7 & -7 \end{bmatrix}.$

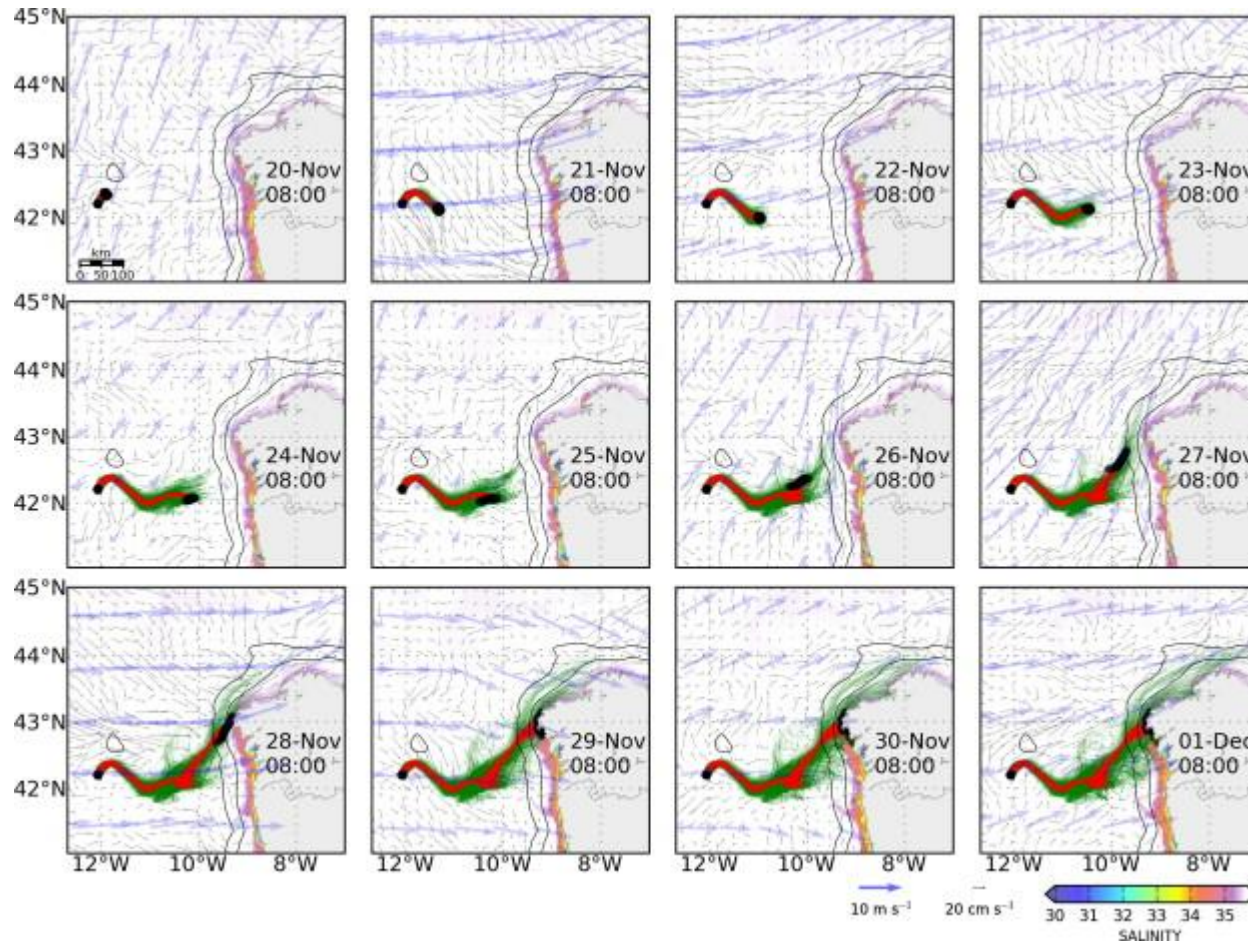


Aplicar **transformações**
 a 12 diferentes pontos no domínio
 uma vez

Figure 7.2: Linear transformations of a house drawn by `plot2d(A * H)`.

Gilbert Strang, MIT Open Course Ware,
 Massachusetts Institute of Technology,
 Course: [Computational Science and Engineering I](#),
 exercícios, aulas em video, provas

Aplicações: Shallow Water Equation



Efficient tools for marine operational forecast and oil spill tracking
Author links open overlay panel
MartinhoMarta-AlmeidaabManuelRuiz-VillarrealcJaniniPereirabdPabloOterocMauroCiranobdXiaoqianZhangaeRobert DHetlanda
<https://doi.org/10.1016/j.marpolbul.2013.03.022>

To derive the shallow-water equations, we start with Euler's equations without surface tension,

$$\text{free surface condition : } p = 0, \quad \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \eta = w, \quad \text{on } z = \eta(x, y, t) \quad (1)$$

$$\text{momentum equation : } \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p + g\hat{z} = 0, \quad (2)$$

$$\text{continuity equation : } \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

$$\text{bottom boundary condition : } \mathbf{u} \cdot \nabla(z + h(x, y)) = 0, \quad \text{on } z = -h(x, y). \quad (4)$$

The shallow-water equations can be written in the matrix form

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \eta \\ u \\ v \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} u & \eta + h & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \eta \\ u \\ v \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} v & 0 & \eta + h \\ 0 & v & 0 \\ g & 0 & v \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \eta \\ u \\ v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Source:

<https://www.whoi.edu/files/server.do?id=136564&pt=10&p=85713>

Aplicar transformações
a milhões de pontos no domínio e tempos diferentes

Aplicações: Texto para equação

Your laboratory keeps two stock solutions of ethanol, one with 90% and one with 40% of alcohol in water. How much of each of these two solutions must be mixed to produce 1 liter of a solution that is $\frac{2}{3}$ alcohol?

f_1 = fraction of alcohol in Solution 1 = 0.9 L alcohol/L solution

f_2 = fraction of alcohol in Solution 2 = 0.4 L alcohol/L solution

f_3 = fraction of alcohol in final solution = $\frac{2}{3}$ L alcohol/L solution

V_3 = liters of final solution = 1 liter.

Aplicações: escrever equação envolvendo as incógnitas

Next write descriptions of quantities that you *don't* know. Again use symbols and give units.

V_1 = liters of Solution 1 needed = unknown

V_2 = liters of Solution 2 needed = unknown

Many problems in environmental science involve mass balances or energy balances. Here we write the mass-balance relationships that must hold for all problems of this particular type:

$$V_1 + V_2 = V_3 \quad (\text{total liters must add up}) \quad (1.1)$$

$$f_1 V_1 + f_2 V_2 = f_3 V_3 \quad (\text{total alcohol must add up}) \quad (1.2)$$

Aplicações: resolve equações

Next solve the general case. One way to do that is to set $V_2 = V_3 - V_1$ (by rearranging the first equation) and substitute to obtain

$$f_1 V_1 + f_2 (V_3 - V_1) = f_3 V_3.$$

Solve this for V_1 , as follows:

$$f_1 V_1 + f_2 V_3 - f_2 V_1 = f_3 V_3$$

$$f_1 V_1 - f_2 V_1 = f_3 V_3 - f_2 V_3$$

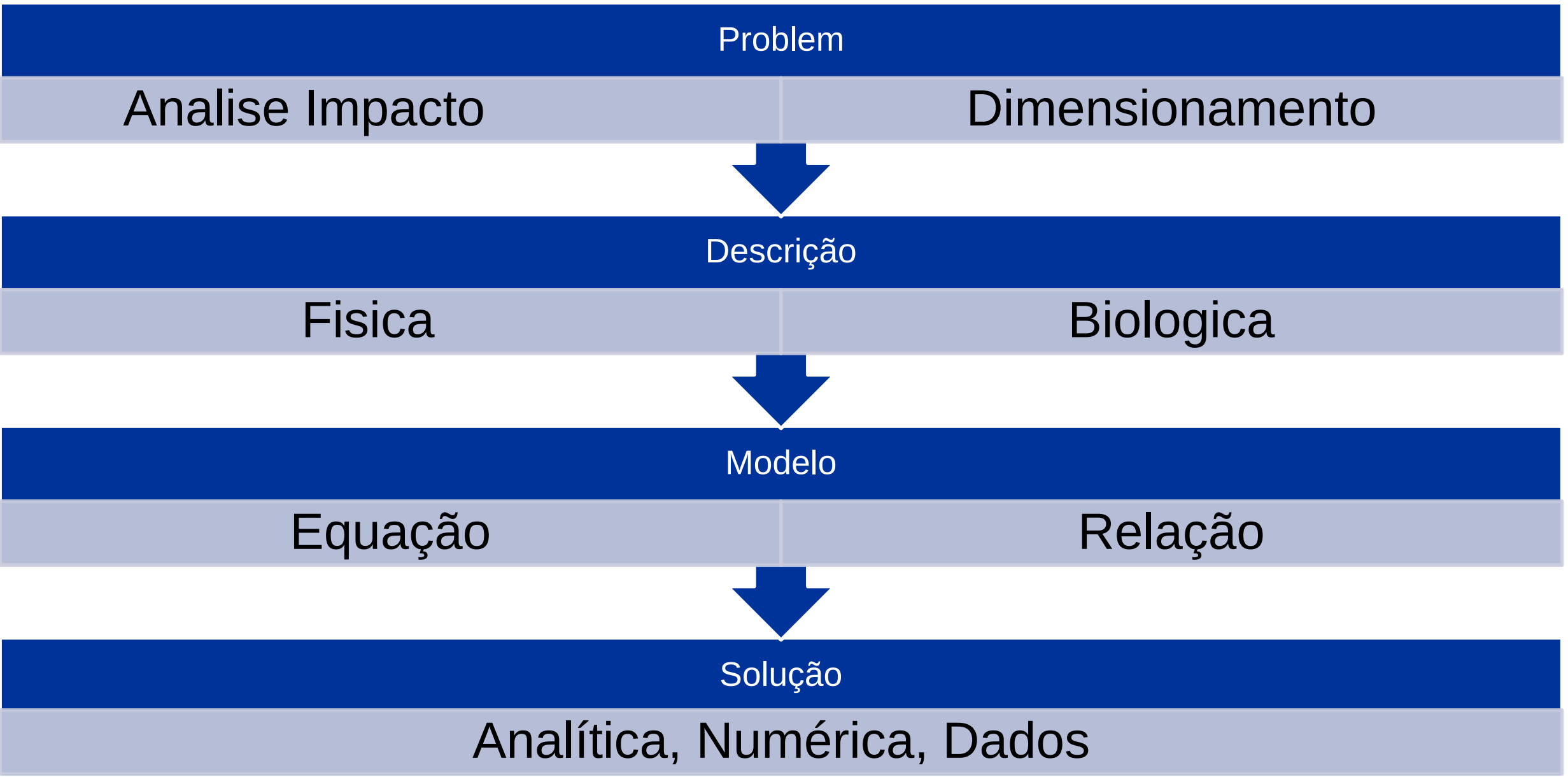
$$(f_1 - f_2) V_1 = (f_3 - f_2) V_3$$

$$V_1 = \frac{f_3 - f_2}{f_1 - f_2} V_3 \quad \text{and} \quad V_2 = V_3 - V_1 \quad (1.3)$$

$$V_1 = \left[\frac{(2/3) - 0.4}{0.9 - 0.4} \right] 1 = \frac{0.6\bar{6} - 0.4}{0.5} = 2(0.2\bar{6}) = 0.5\bar{3} \text{ liters} \quad (1.4)$$

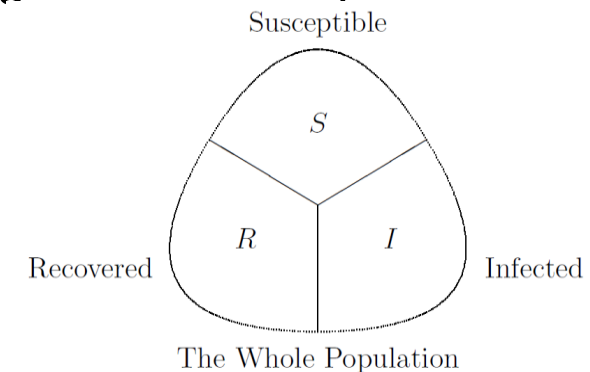
$$V_2 = 1 - 0.5\bar{3} = 0.4\bar{6} \text{ liters}$$

Proposta didática



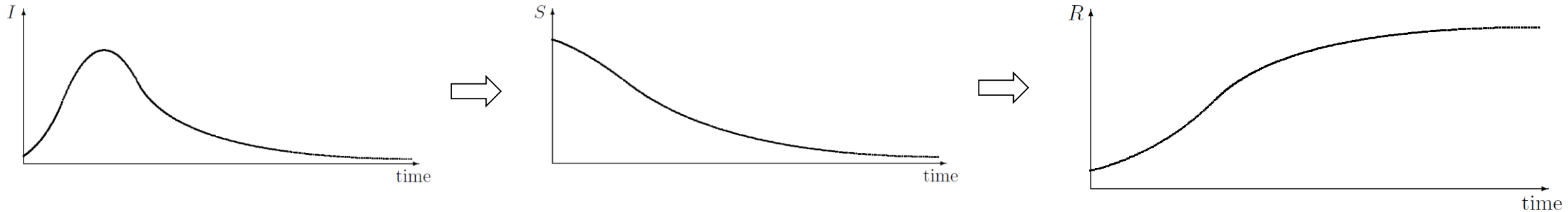
Exemplo modelo epidêmico

- Espalhamento de uma doença (por exemplo gripe)
- Modelo epidêmico
- Premissas:
 - Gripe não é letal, tudo mundo cura
 - Gripe do mesmo vírus pode ter so uma vez, depois fica imune
 - População grande, mas definido em tamanho e confinado geograficamente (todos alunos de Curitiba)
- Estados:
 - S: suscetível: não pegou ainda e pode pegar
 - I: infectado: tem gripe e podem repassar
 - R: recuperado: tinham a gripe e são imunes
 - Como população é confinado, pode ser considerado misturado (S pode encontrar I ou R)
- Objetivo:
 - Saber a variação da quantidade de S, I e R ao longo do tempo



Exemplo modelo epidêmico

- Pensar no resultado, utilizando intuição

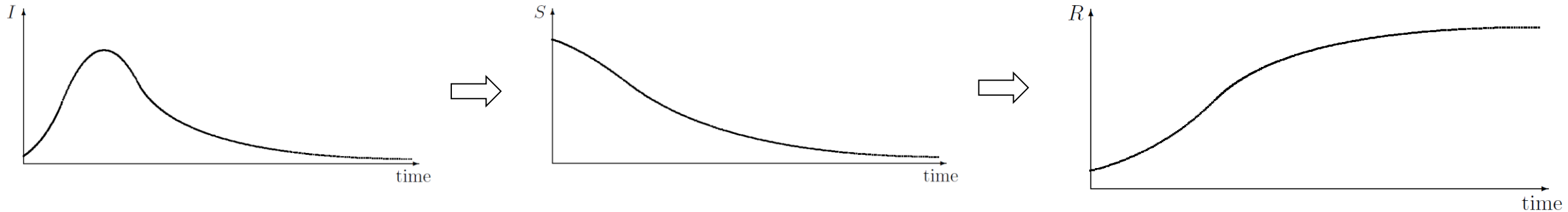


- Perguntas: Pico acontece quando? Falta quantificação.
- Suponha que sabemos I , R e S hoje, podemos calcular para amanhã (vendo o futuro)?
- Uma maneira é:
 - sabendo o passado e o estado de hoje e “extrapolando” o futuro

days after today	accumulated number of new infections	remaining number of susceptibles
0	0	20 000
1	470	19 530
2	940	19 060
3	1410	18 590
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Exemplo modelo epidêmico

- Pensar no resultado, utilizando intuição



- Suponha que sabemos I , R e S hoje, podemos calcular para amanhã (vendo o futuro)?

- Mais geral: sabendo como I , R e S variam

- Por exemplo:

- Estudo diz para sarampo que tem 470 novas infecções a cada dia
- Se começamos com 20.000 alunos suscetíveis, segue:

days after today	accumulated number of new infections	remaining number of susceptibles
0	0	20 000
1	470	19 530
2	940	19 060
3	1410	18 590
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Exemplo modelo epidêmico

- Importante então de saber as taxas (alteração por tempo) de mudanças, $S' = dS/dt$
- Aqui: $S' = -470$ (negativo porque decresce)
- Se $S' = \text{const.}$ podemos usar a equação para calcular S :

$$S = 20000 + S' * t = 20000 - 470 * t$$

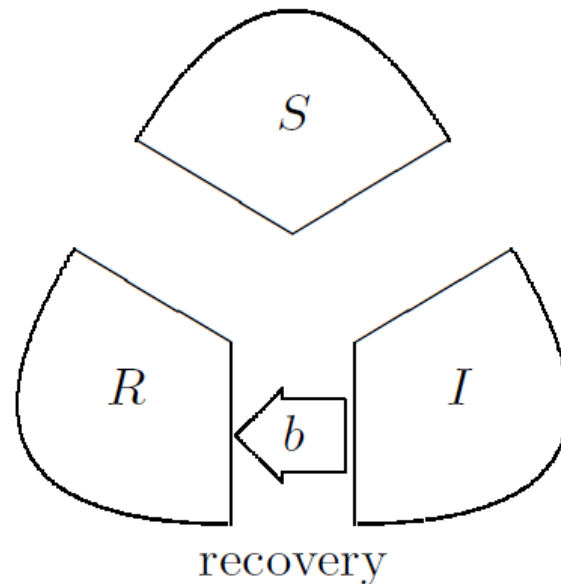
- $S' = \text{const.}$ é um “modelo” que nos permitiu chegar numa equação (solução)
- Também é possível usar para o passado (dois dias atrás):
$$S = 20000 - 470 * (-2) = 20940$$
- Vantagem é:
 - nos sabemos o passado e assim podemos analisar a “precisão” do nosso modelo
- Porém: precisamos um “ponto de partida” (condição inicial) $S(t=0) = 20000$

Exemplo modelo epidêmico

- Montamos um modelo completo e mais complexo com estes conhecimentos
- Iniciamos com o mais fácil, a taxa de recuperação, $R' = dR/dt$, o tempo necessário para curar
- Por exemplo: 14 dias
- Olhando assim os infectados I: tem uns que pegaram ontem, outros dois dias atrás, e o ultimo grupo vai curar hoje
- Consideramos que estes 14 grupos tem a mesma população, assim 1/14 de infectados recupera hoje:
 - $R' = 1/14 I$
 - Isto permite de calcular R no futuro quando I e R foram conhecidos hoje (e.g.: $I=2100$, $R = 2500$)
 - $R' = 1/14 I = 1/14 * 2100 = 150$ pessoas por dia $\rightarrow R$ amanhã = $2500 + 150 = 2650$
- **Problemas:**
 - Não funciona bem no inicio, já que ninguém foi infectado por vários dias ainda
 - Modelo não é perfeito, mas va com calma
 - vamos ver se conseguimos entender como “funciona” uma epidemia e depois aprimorar o modelo
 - I varia cada dia/

Exemplo modelo epidêmico

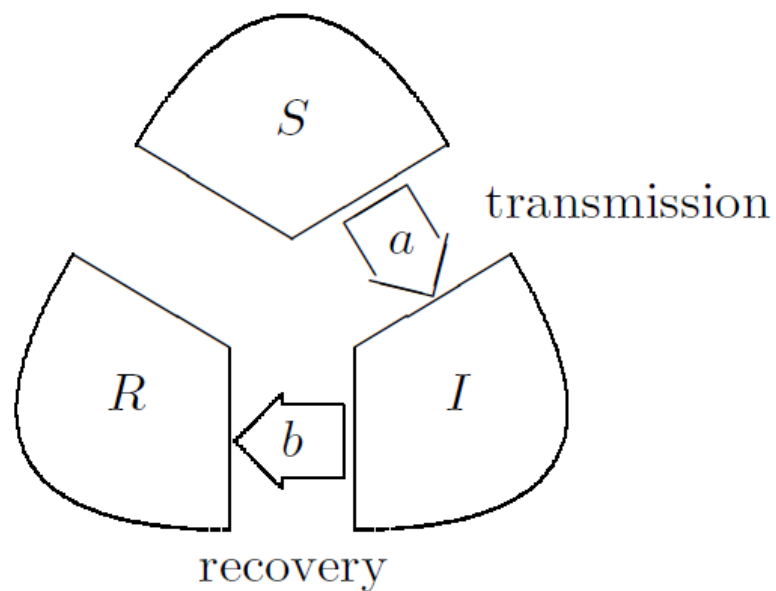
- Se for doença diferente, digamos com taxa k (taxa de recuperação)
- Pode escrever $b = 1/k$ como coeficiente de recuperação
- b somente depende da doença e é igual para toda população
- Significado geral de recuperação: pessoas “vão” da população infectada para recuperada



Exemplo modelo epidêmico

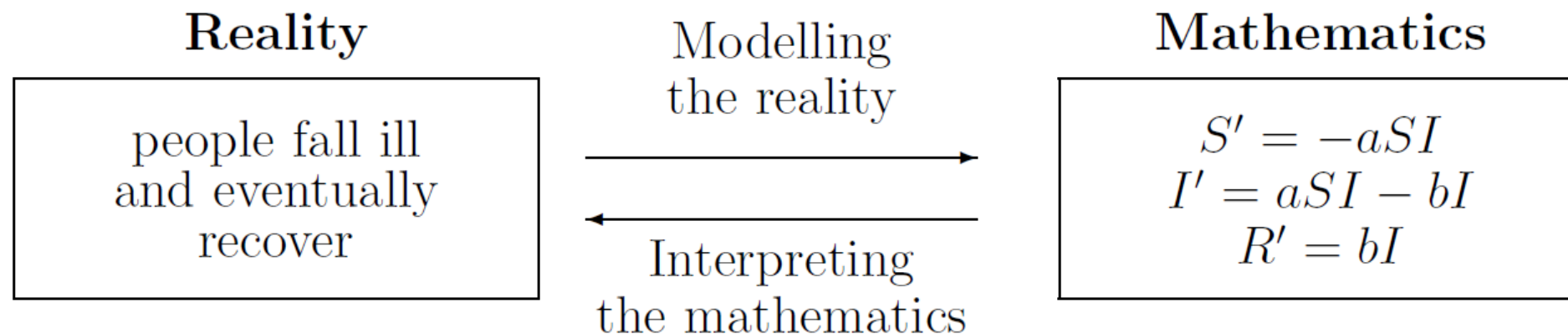
- R' dependia somente de I , mas S' depende de S e de I
- Construção do modelo de transmissão:
- Considere uma pessoa suscetível num dia. Em media, esta pessoa encontrará uma fração pequena, p , da população infectada
- Por exemplo, $I = 5000$, e somente 2 na mesma sala em media estarão com pessoas suscetíveis, assim, a fração de contatos é $p = 2/I = 2/5000 = 0,0004$.
- Os dois contatos podem ser expressados como $2 = (2/I)*I = pI$ contatos por dia por pessoa suscetível
- Para a população total corresponde com o produto $pI*S = pSI$
- Mas não todos os contatos levem a infecção, somente uma fração q (o mais contagioso o maior o q).
- O contato diário pSI assim leva a infecções diárias $q*pSI$.
- Isto resulta em aSI , se $a = qp$
- a depende da interação entre pessoas e da saúde delas (em contrario do b), a pode ser influenciado por nos (quarentena, dispensar aulas, ...)
- $\rightarrow S' = -aSI$ (pessoas por dia), com a sendo o coeficiente de transmissão

Exemplo modelo epidêmico



Exemplo modelo epidêmico

- I' resulta dos demais: perda em I é ganho em R ou ganho em I e perda em S
- $\rightarrow I' = aSI - bI$
- $I' = aSI - bI$
- $S' = -aSI$
- $R' = bI$
- 3 edos, primeira ordem, lineares, não homogêneos



Exemplo modelo epidêmico

Rate equations:

$$S' = -.00001SI,$$

$$I' = .00001SI - I/14,$$

$$R' = I/14.$$

Initial values: when $t = 0$,

$$S = 45400, \quad I = 2100, \quad R = 2500.$$

Tomorrow. From our earlier discussion, $R' = 2100/14 = 150$ persons per day, giving us an estimated value of $R = 2650$ persons for tomorrow. To estimate S we use

$$S' = -.00001SI = -.00001 \times 45400 \times 2100 = -953.4 \text{ persons/day.}$$

Hence we estimate that tomorrow

$$S = 45400 - 953.4 = 44446.6 \text{ persons.}$$

Since $S + I + R = 50000$ and we have $S + R = 47096.6$ tomorrow, a final subtraction gives us $I = 2903.4$ persons. (Alternatively, we could have used the rate equation for I' to estimate I .)

The fractional values in the estimates for S and I remind us that the S - I - R model describes the behavior of the epidemic only approximately.

Exemplo modelo epidêmico

Rate equations:

$$S' = -.00001SI,$$

$$I' = .00001SI - I/14,$$

$$R' = I/14.$$

Initial values: when $t = 0$,

$$S = 45400, \quad I = 2100, \quad R = 2500.$$

Several days hence. According to the model, we estimate that tomorrow $S = 44446.6$, $I = 2903.4$, and $R = 2650$. Therefore, from the new I we get a new approximation for the value of R' tomorrow; it is

$$R' = \frac{1}{14}I = \frac{1}{14} \times 2903.4 = 207.4 \text{ persons/day.}$$

Hence, two days from now we estimate that R will have the new value $2650 + 207.4 = 2857.4$. Now follow this pattern to get new approximations for S' and I' , and then use those to estimate the values of S and I two days from now.

Exemplo modelo epidêmico

Rate equations:

$$\begin{aligned}S' &= -.00001SI, \\I' &= .00001SI - I/14, \\R' &= I/14.\end{aligned}$$

Initial values: when $t = 0$,

$$S = 45400, \quad I = 2100, \quad R = 2500.$$

Estimates for the first three days

t	S	I	R	S'	I'	R'
0	45 400.0	2100.0	2500.0	−953.4	803.4	150.0
1	44 446.6	2903.4	2650.0	−1290.5	1083.1	207.4
2	43 156.1	3986.5	2857.4	−1720.4	1435.7	284.7
3	41 435.7	5422.1	3142.1			

Exemplo modelo epidêmico

Yesterday. We already pointed out, on page 5, that we can use our models to go *backwards* in time, too. This is a valuable way to see how well the model fits reality, because we can compare estimates that the model generates with health records for the days in the recent past.

To find how S , I , and R change when we go one day into the future we multiplied the rates S' , I' , and R' by a time step of $+1$. To find how they change when we go one day into the past we do the same thing, except that we must now use a time step of -1 . According to the table above, the rates at time $t = 0$ (i.e., today) are

$$S' = -953.4, \quad I' = 803.4, \quad R' = 150.0.$$

Therefore we estimate that, one day ago,

$$S = 45400 + (-953.4 \times -1) = 45400 + 953.4 = 46353.4,$$

$$I = 2100 + (803.4 \times -1) = 2100 - 803.4 = 1296.6,$$

$$R = 2500 + (150.0 \times -1) = 2500 - 150.0 = 2350.0.$$

Exemplo modelo epidêmico

There and back again. What happens when we start with tomorrow's values and use tomorrow's rates to go back one day—back to today? We should get $S = 45400$, $I = 2100$, and $R = 2500$ once again, shouldn't we? Tomorrow's values are

$$\begin{aligned} S &= 44446.6, & I &= 2903.4, & R &= 2650.0, \\ S' &= -1290.5, & I' &= 1083.1, & R' &= 207.4. \end{aligned}$$

To go backwards one day we must use a time step of -1 . The predicted values are thus

$$\begin{aligned} S &= 44446.6 + (-1290.6 \times -1) = 45737.2, \\ I &= 2903.4 + (1083.1 \times -1) = 1820.3, \\ R &= 2650.0 + (207.4 \times -1) = 2442.6. \end{aligned}$$

These are *not* the values that we had at the start, when $t = 0$. In fact, it's worth noting the difference between the original values and those produced by “going there and back again.”

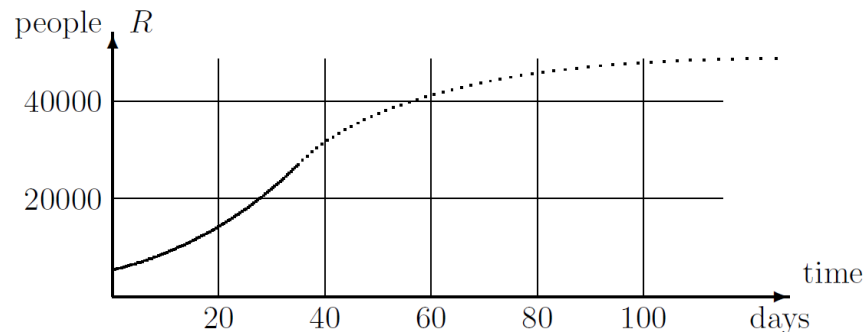
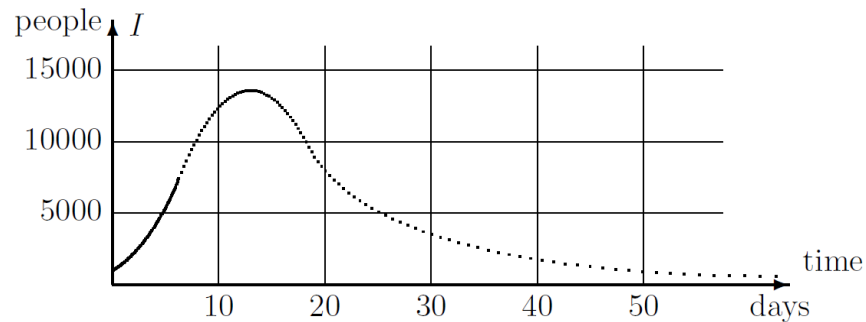
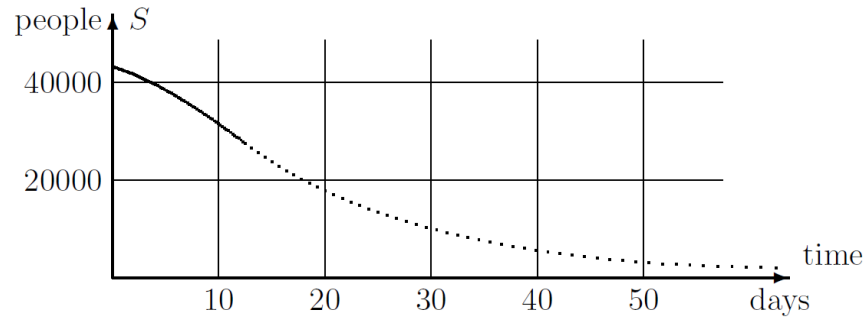
	original value	there and back again	difference
S	45400	45737.1	337.1
I	2100	1820.3	-279.7
R	2500	2442.6	-57.4

Exemplo modelo epidêmico

Do you see why there are differences? We went forward in time using the rates that were current at $t = 0$, but when we returned we used the rates that were current at $t = 1$. Because these rates were different, we didn't get back where we started. These differences do not point to a flaw in the model; the problem lies with the way we are trying to extract information from the model. As we have been making estimates, we have assumed that the rates don't change over the course of a whole day. We already know that's not true, so the values that we have been getting are not exact. What this test adds to our knowledge is a way to measure just *how* inexact those values are—as we do in the table above.

In chapter 2 we will solve the problem of rough estimates by recalculating all the quantities ten times a day, a hundred times a day, or even more. When we do the computations with shorter and shorter time steps we will be able to see how the estimates improve. We will even be able to see how to get values that are mathematically exact!

Exemplos dos alunos dos anos anteriores



1. When does the infection hit its peak? How many people are infected at that time?
2. Initially, how many people are susceptible? How many days does it take for the susceptible population to be cut in half?
3. How many days does it take for the recovered population to reach 25,000? How many people *eventually* recover? Where did you look to get this information?
4. On what day is the size of the infected population increasing most rapidly? When is it decreasing most rapidly? How do you know?
5. How many people caught the illness at some time during the first 20 days? (Note that this is not the same as the number of people who are infected on day 20.) Explain where you found this information.

Exemplos dos alunos dos anos anteriores

1. Predador-presa
2. Streeter-Phelps
3. Reator e edos em geral

Exemplo: Particle jet

Municipality	Population	Collect	Treatment
Santos/S.Vincete	856.726	80	80
Praia Grande	562.376	46	46
Guarujá	432.586	55	55



Emissários da Baixada Santista

Fonte: Brambilla, SABESP



Exemplo: Particle jet

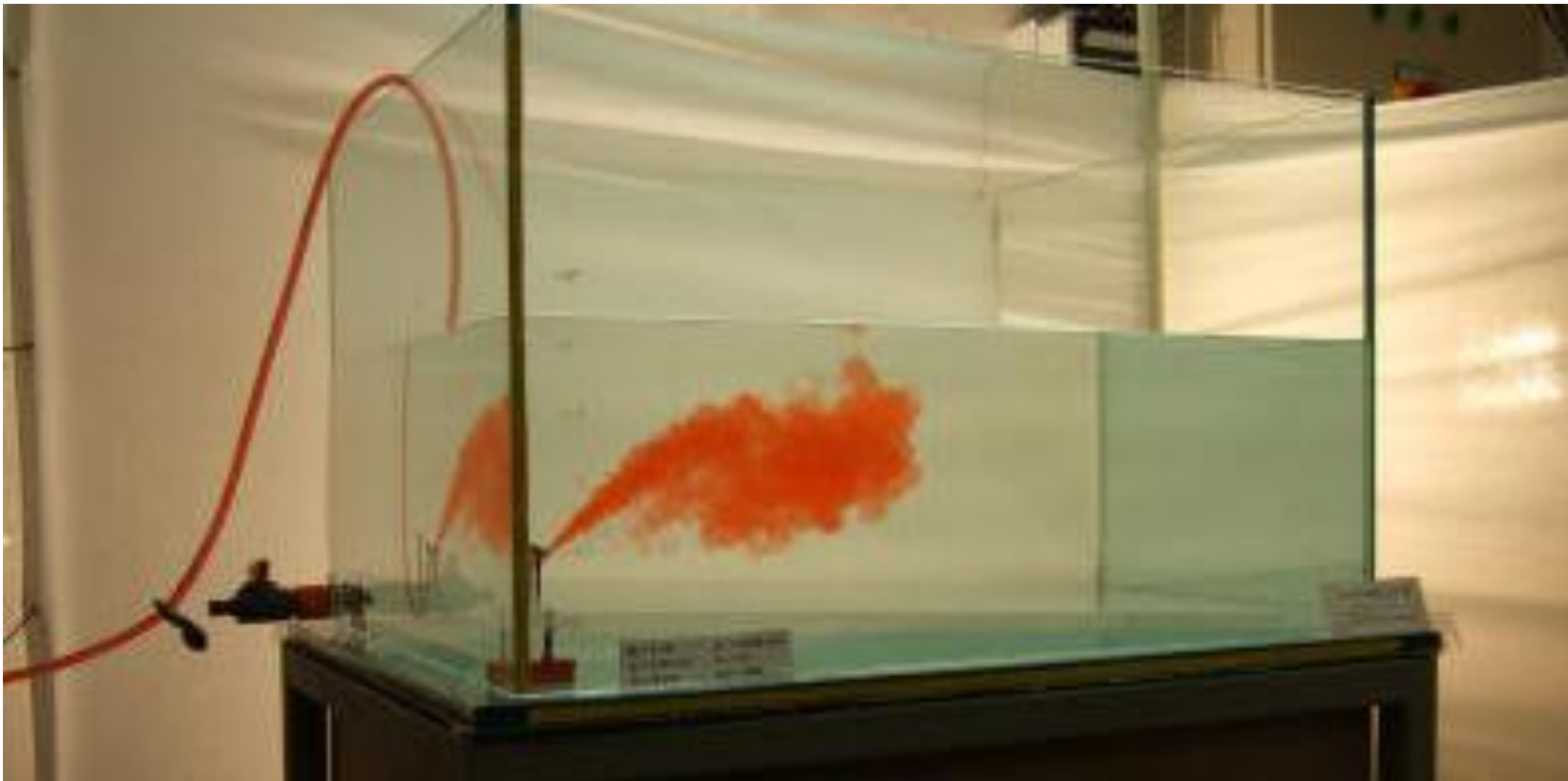
Pergunta: Partículas do emissário sedimentam como ao redor do ponto de lançamento?



Source: Prefeitura de Praia Grande, Brazil

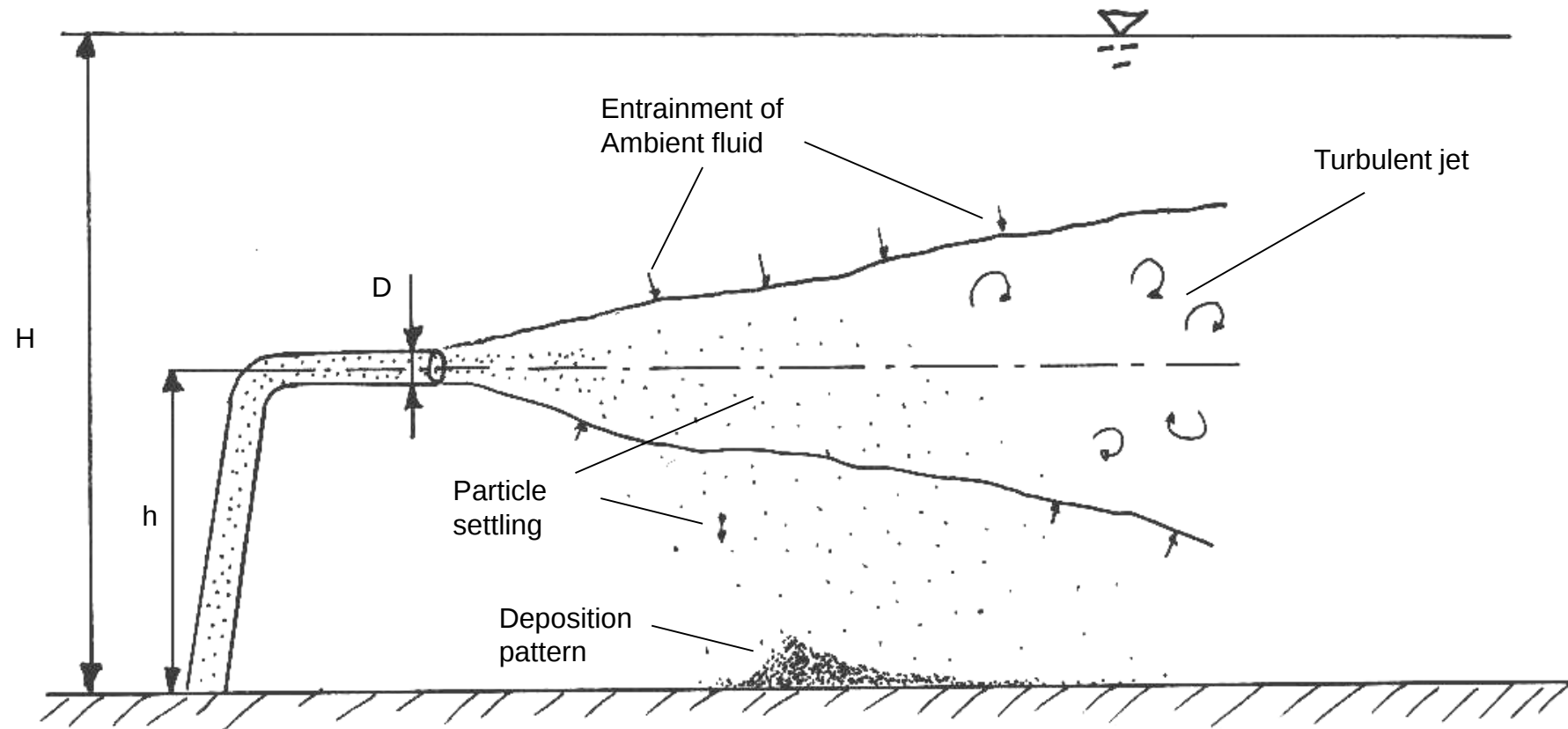
Exemplo: Particle jet

*Definir as equações governantes de um fenômeno físico para um problema com objetivo e condições definidos.
-> Foco e simplificação*



Exemplo: Particle jet

-> *Parametros*



1. Definir as equações governantes de um fenômeno físico para um problema com objetivo e condições definidos.

- We make the rigorous assumption, to express particle motions only with terminal particle settling velocity at small particle Reynolds numbers assuming that there is no influence of other particles settling nearby:

$$w_s = gD_p^2 / (18 \rho) (\rho_p - \rho_l) / \rho_l \quad (\text{for } Re_p = < 1)$$

- Time averaged velocity field of liquid phase is superimposed by the particle settling field assuming that particles follow average fluid motions.

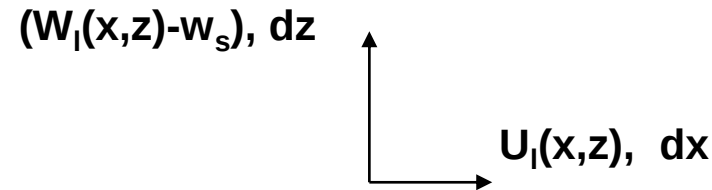
- centerline velocity (Neves 1998): $U_c(x) = 6.20(D/x)U_0$.
- longitudinal velocity (Schlichting and Gersten 1997): $U(r,x) = 3/(8\pi^{0.5}0.017)M_0/(M_0^{0.5}x)/[1+(\pi(r,x))^2]^2$ with $\pi(r,x) = 1/(8(3/\pi)^{0.5}0.51/0.017r/x$
- transversal velocity (Schlichting and Gersten 1997): $W(r,x) = 0.5(3M_0/\pi)^{0.5}\pi(r,x)/x[1-(\pi(r,x))^2]/[1+(\pi(r,x))^2]^2$ e $\pi(r,x) = 1/(8(3/\pi)^{0.5}0.51/0.017r/x$

3. Caso comum: fenômeno não tem descrição suficiente e depende do lugar e da aplicação (→ requer calibração e verificação)

Exemplo: Particle jet

Analytical Model

- Velocidades horizontais das partículas
 - $U_p(x, z) = U_l(x, z)$ (velocidade do líquido)
- Velocidades verticais das partículas
 - $W_p(x, z) = W_l(x, z) - w_s$, $w_s = \text{const}$



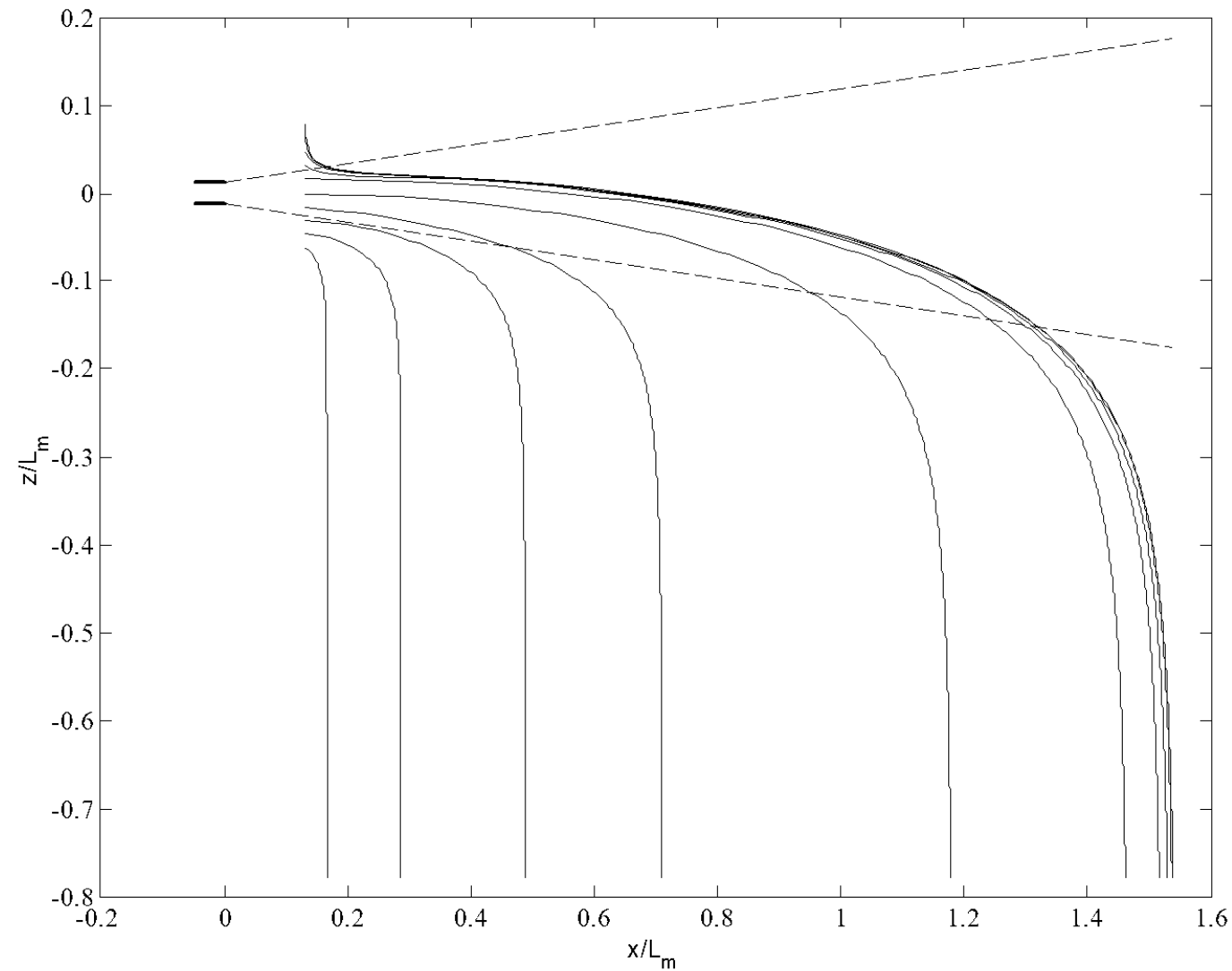
$(W_l(x, z) - w_s), dz$

$U_l(x, z), dx$

- gradient dx/dz , where $dx = U_l(x, z)dt$ and $dz = (W_l(x, z) - w_s)dt$.
- $\int x dx = \int_z U_l / (W_l - w_s) dz$
- $(x - x_0) = \int_z U_l / (W_l - w_s) dz$
- $(x - x_0) / L_m = \int_{z/L_m} U_l / (W_l - w_s) dz / L_m$

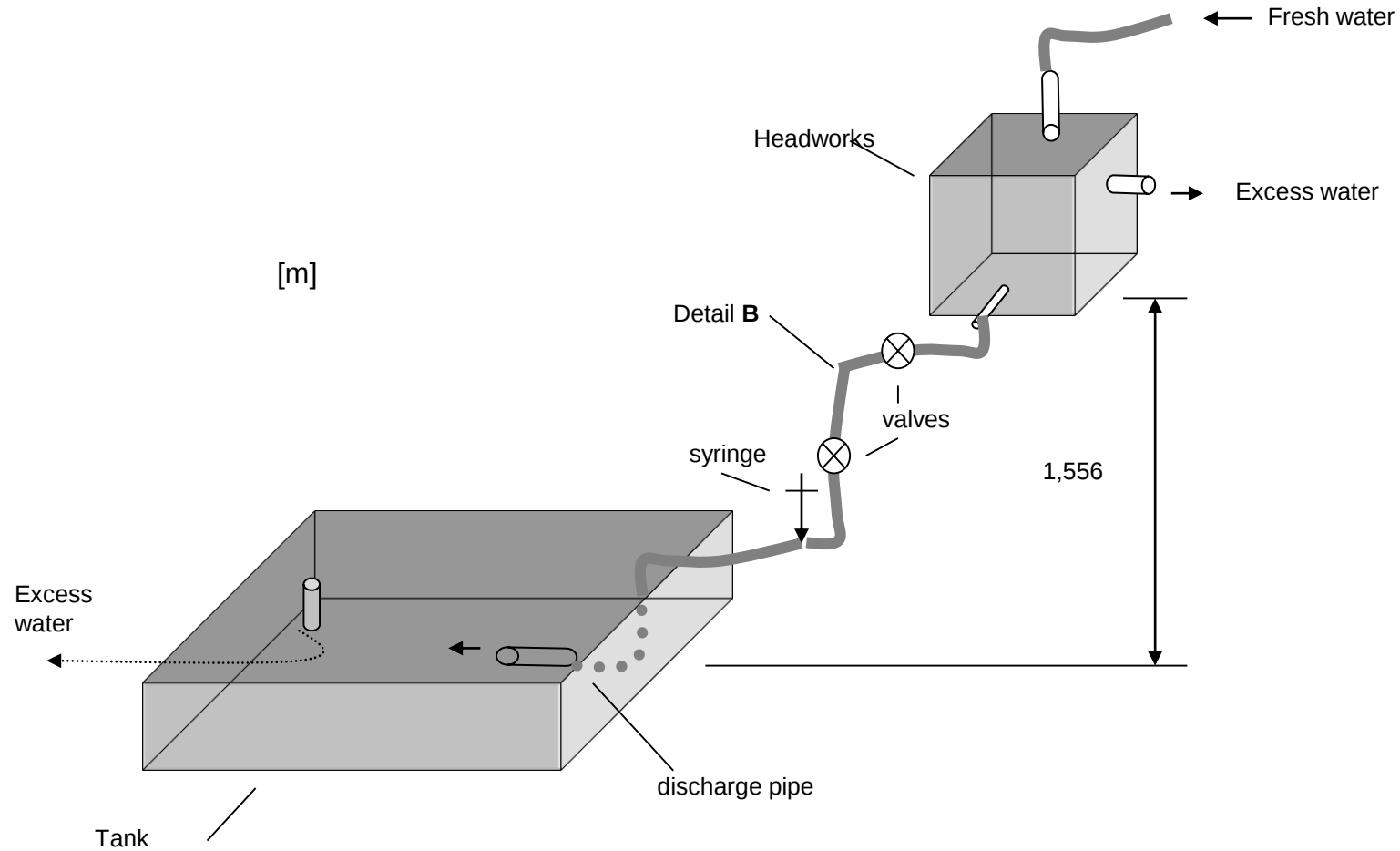
Exemplo: Particle jet

Analytical Model

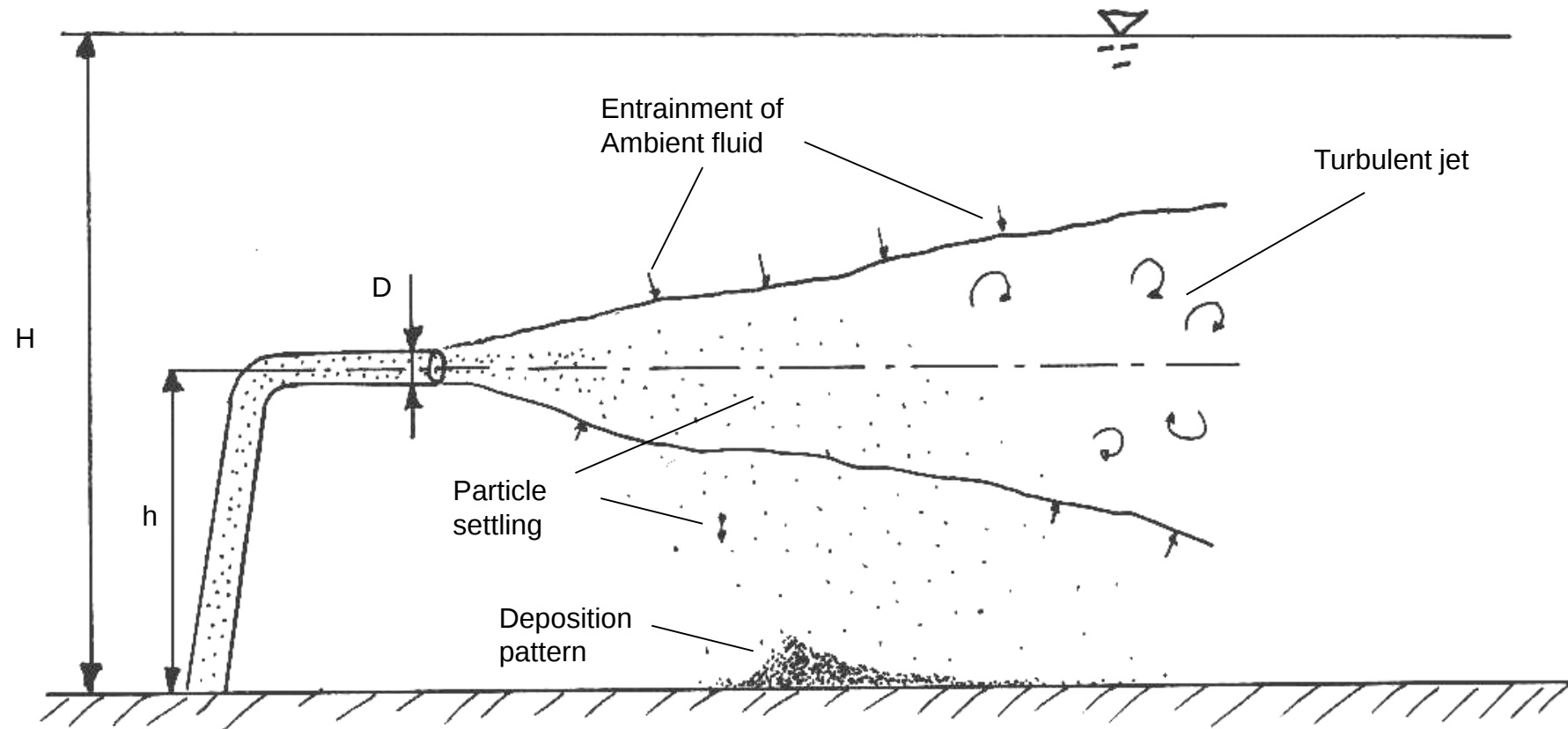


Exemplo: Particle jet

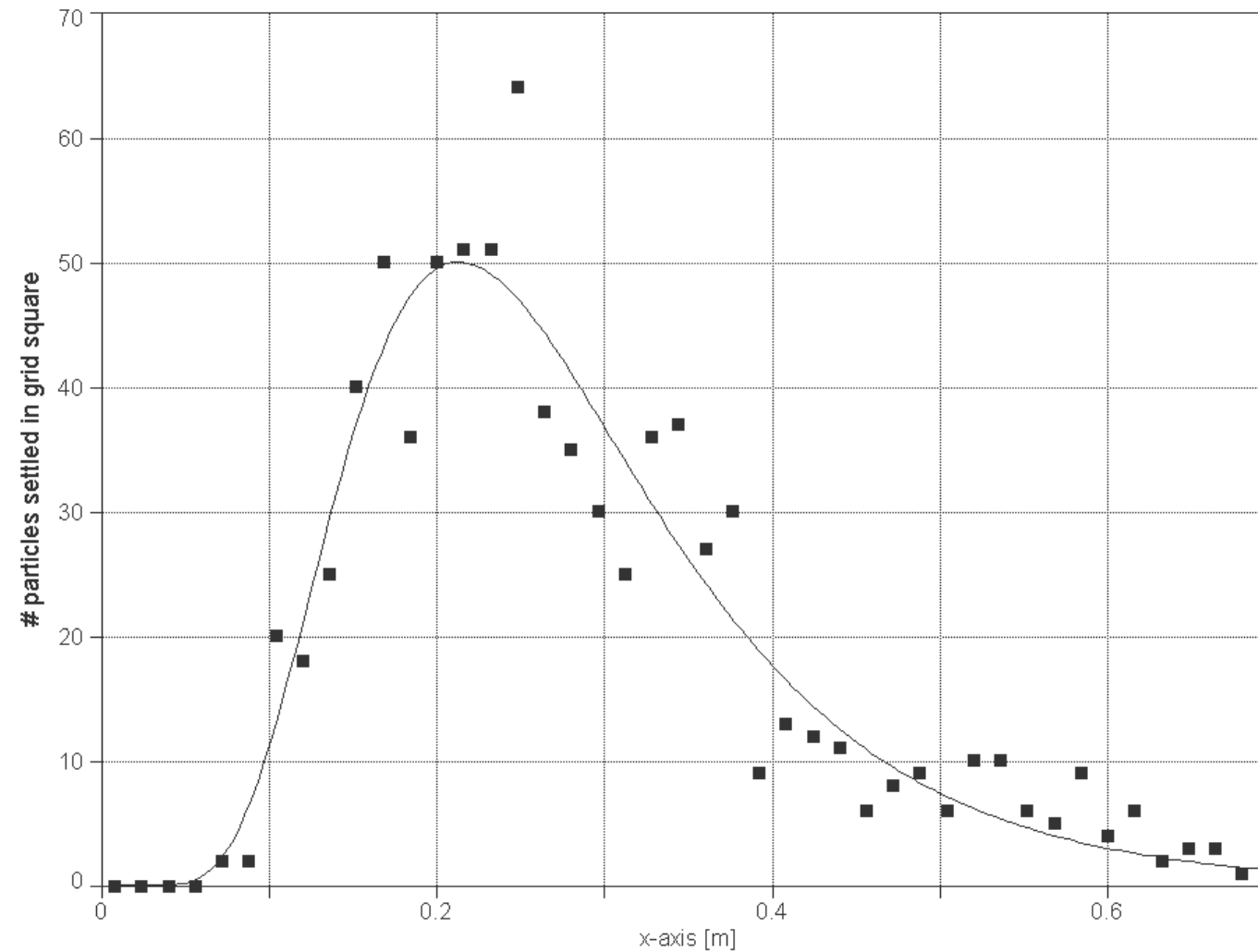
Experiments



Exemplo: Particle jet



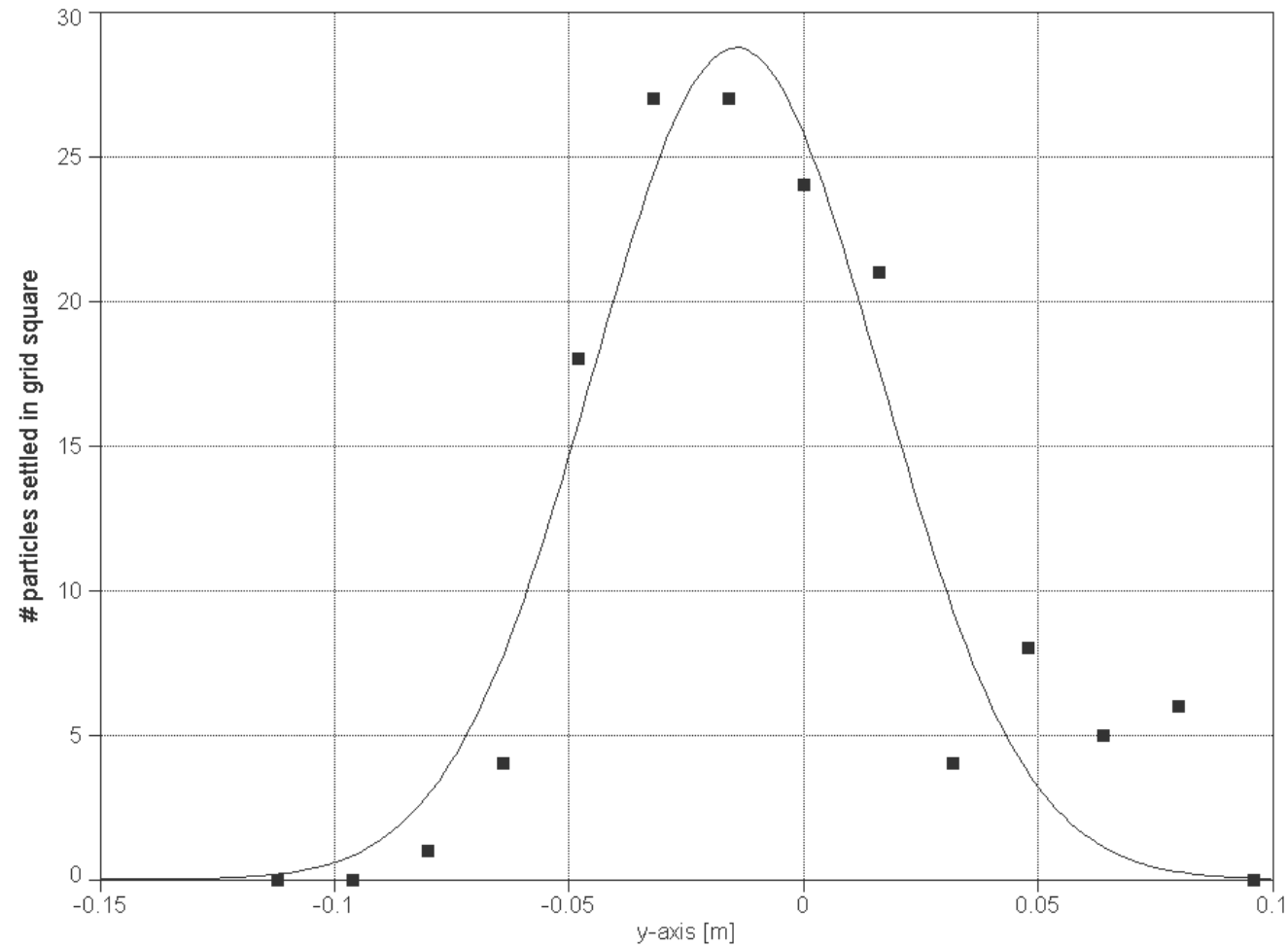
Exemplo: Particle jet



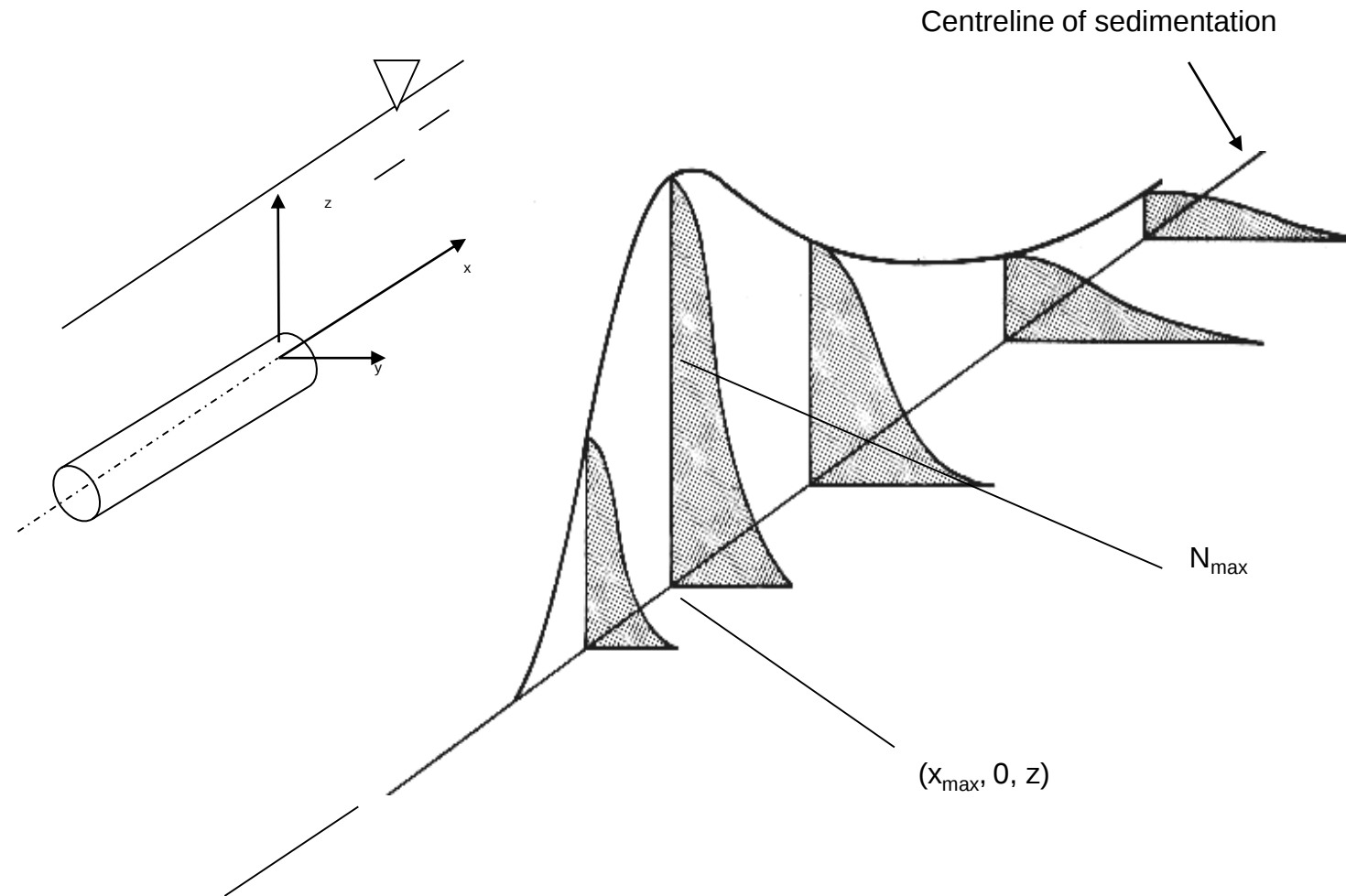
Exemplo: Particle jet



Experiments



Exemplo: Particle jet

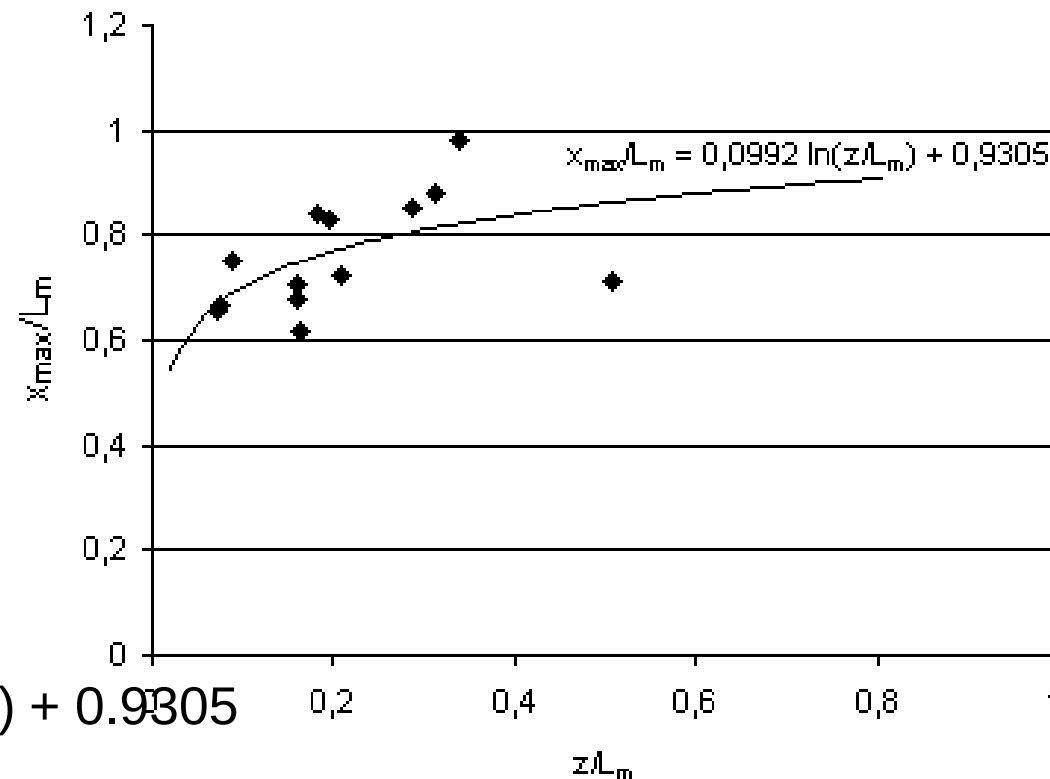


Exemplo: Particle jet

Dimensional Analysis

- maximum deposition location $x_{\max}$ located on line $(x, 0, z=-h)$, below axis of jet. $x_{\max}$ is independent of y and for low concentration particle-laden jets also independent of particle discharge rate N_0

$$x_{\max}/L_m = f(-z/L_m) \quad \text{where } y_{\max} = 0$$

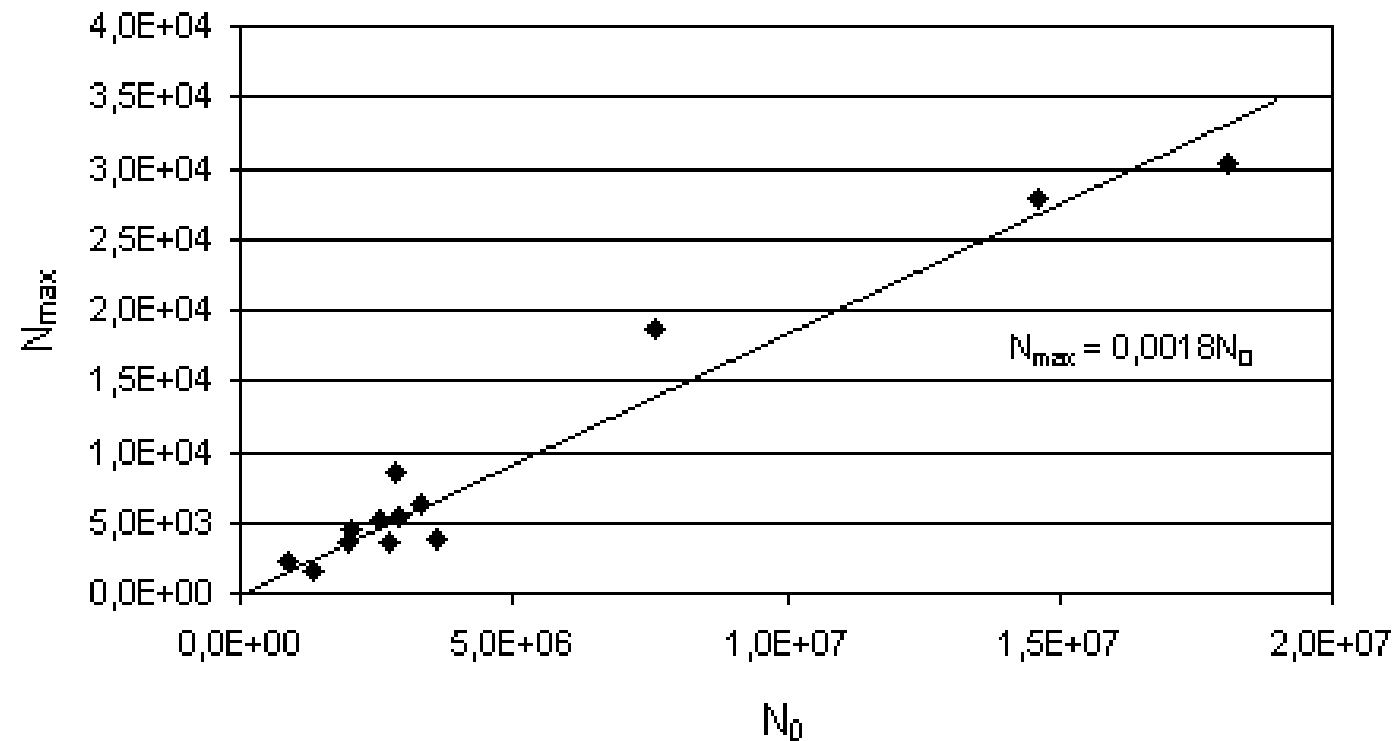


- $x_{\max}/L_m = 0.0992 \ln(-z/L_m) + 0.9305$

Exemplo: Particle jet

Dimensional Analysis

- maximum deposition rate of particles $N_{\max}/N_0$ at $x_{\max}/L_m$ is independent of geometric parameters: $N_{\max}/N_0 = C$
- An exception are jets having strong interactions with the ground or the surface, which have effects we are not considering here.

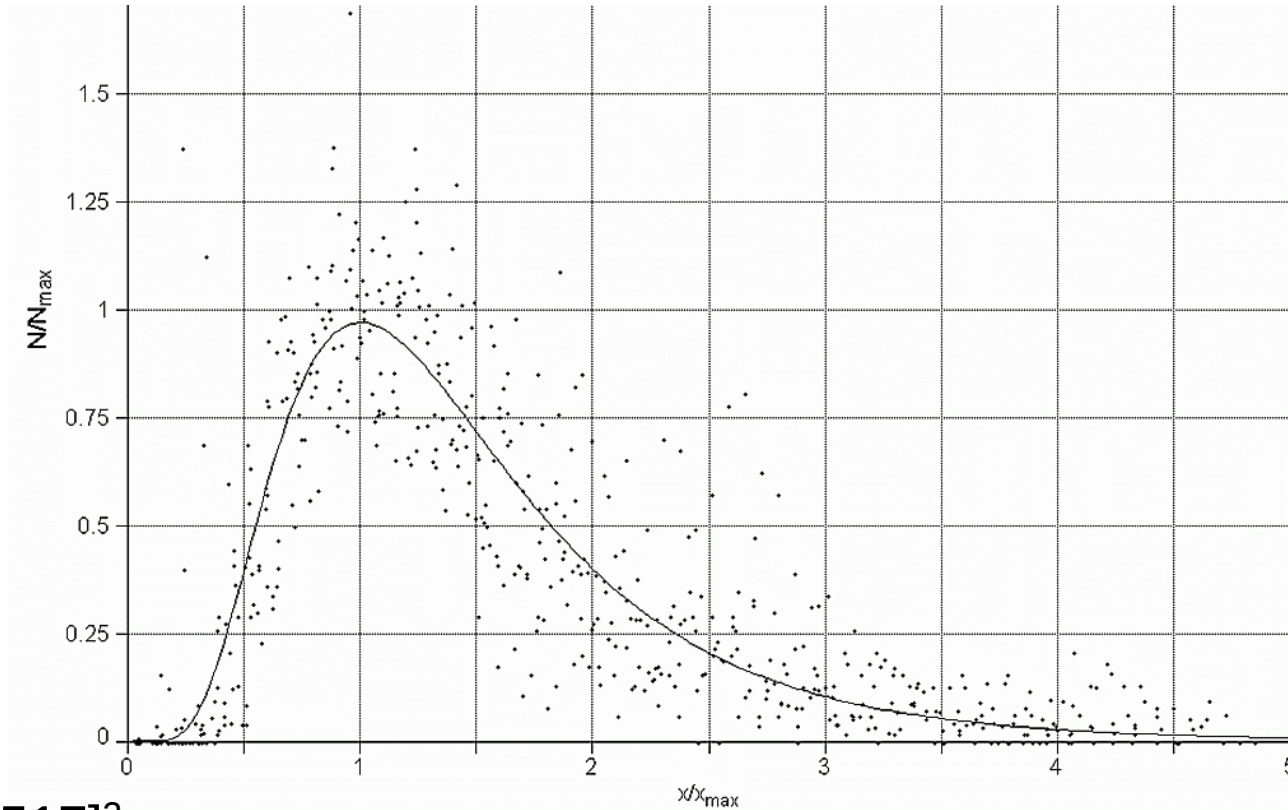


- $N_{\max}/N_0 = 0.0018$

Exemplo: Particle jet

Dimensional Analysis

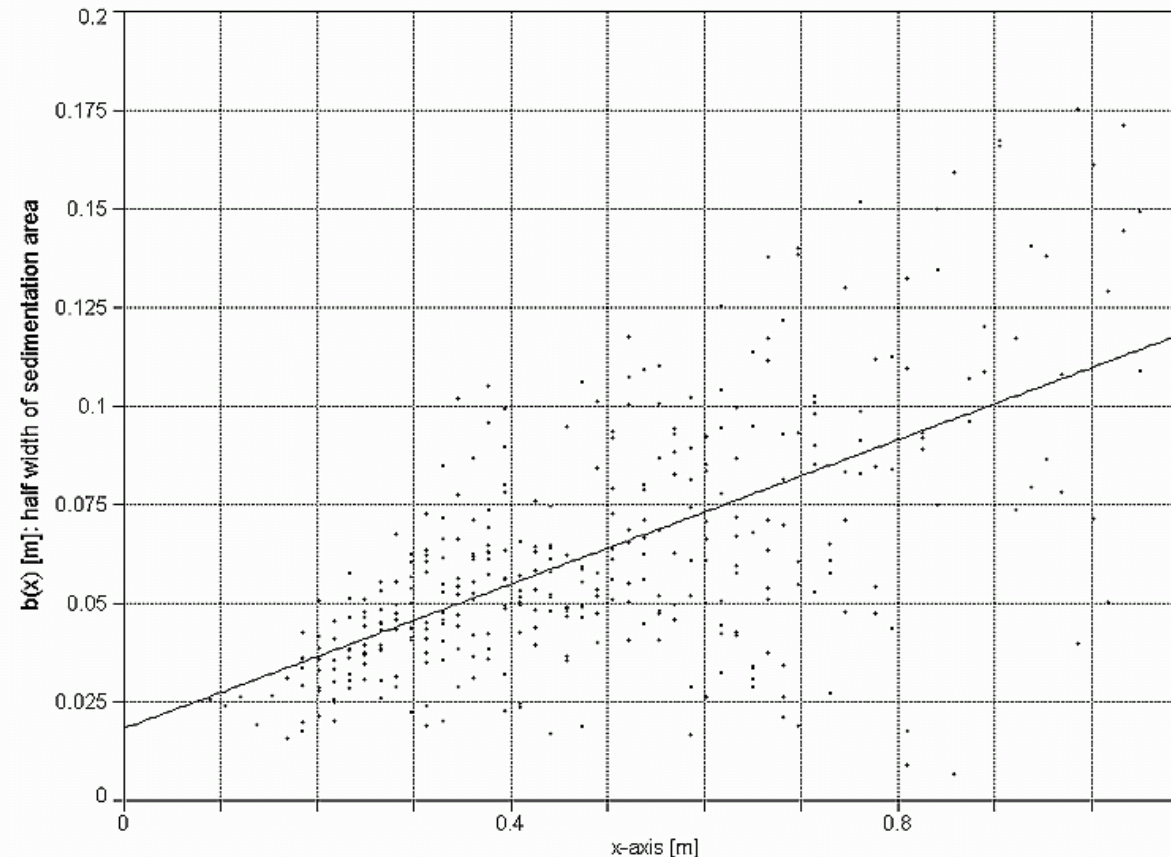
- characteristic longitudinal distribution is centerline of sedimentation $(x, 0, z = -h)$. If self-similarity is given it is $N_c = f(N_{\max}, x_c, x_{\max})$
- $N_c/N_{\max} = f(x_c/x_{\max})$



- $N_c(x_c)/N_{\max} = e^{(-0.5[\ln(x/x_{\max})/0.517]^2)}$

Exemplo: Particle jet Dimensional Analysis

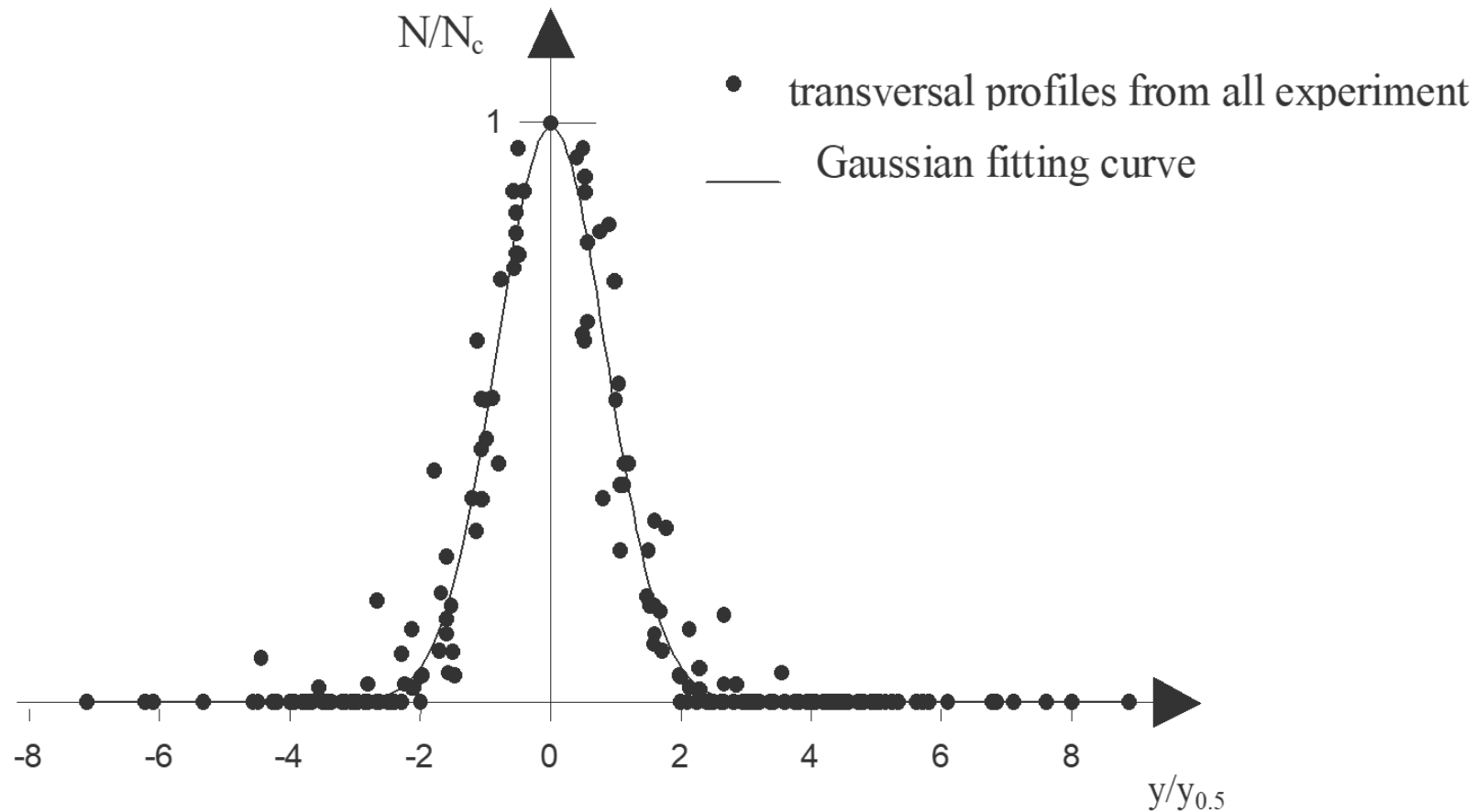
- To verify self-similarity also for transversal profiles we need to find a relation for $N = f(N_c, y, y_{0.5})$. The latter parameter is chosen for the half-width of Gaussian type particle distributions.
- $y_{0.5}(x) = 0.101x$, which is smaller in comparison to jet velocity half width $r_{0.5}(x) = 0.114x$



Exemplo: Particle jet

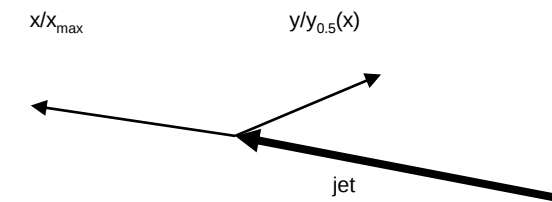
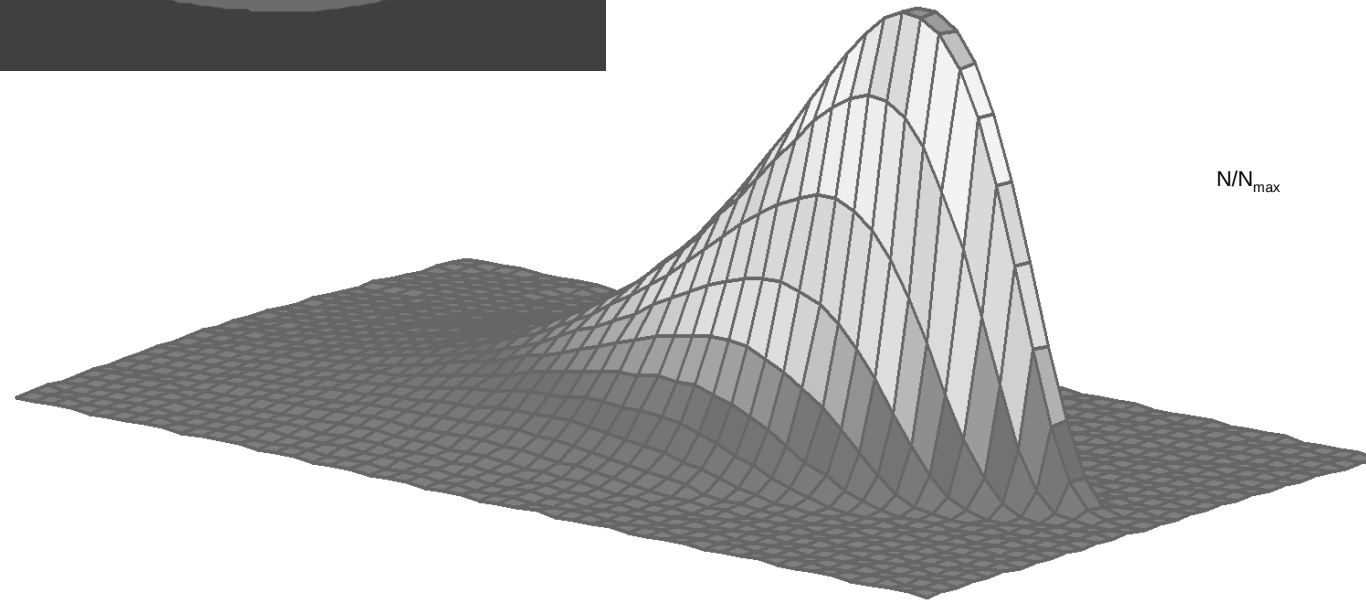
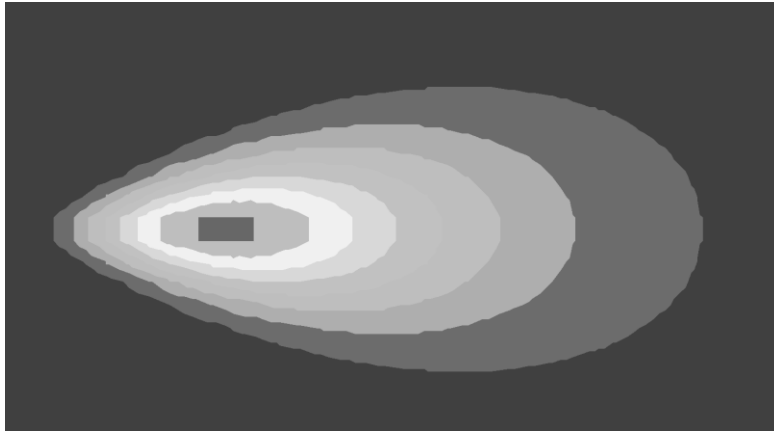
Dimensional Analysis

- $N/N_c = f(y/y_{0.5})$
- $N/N_c = e^{(-0.5y/y_{0.5})^2}$



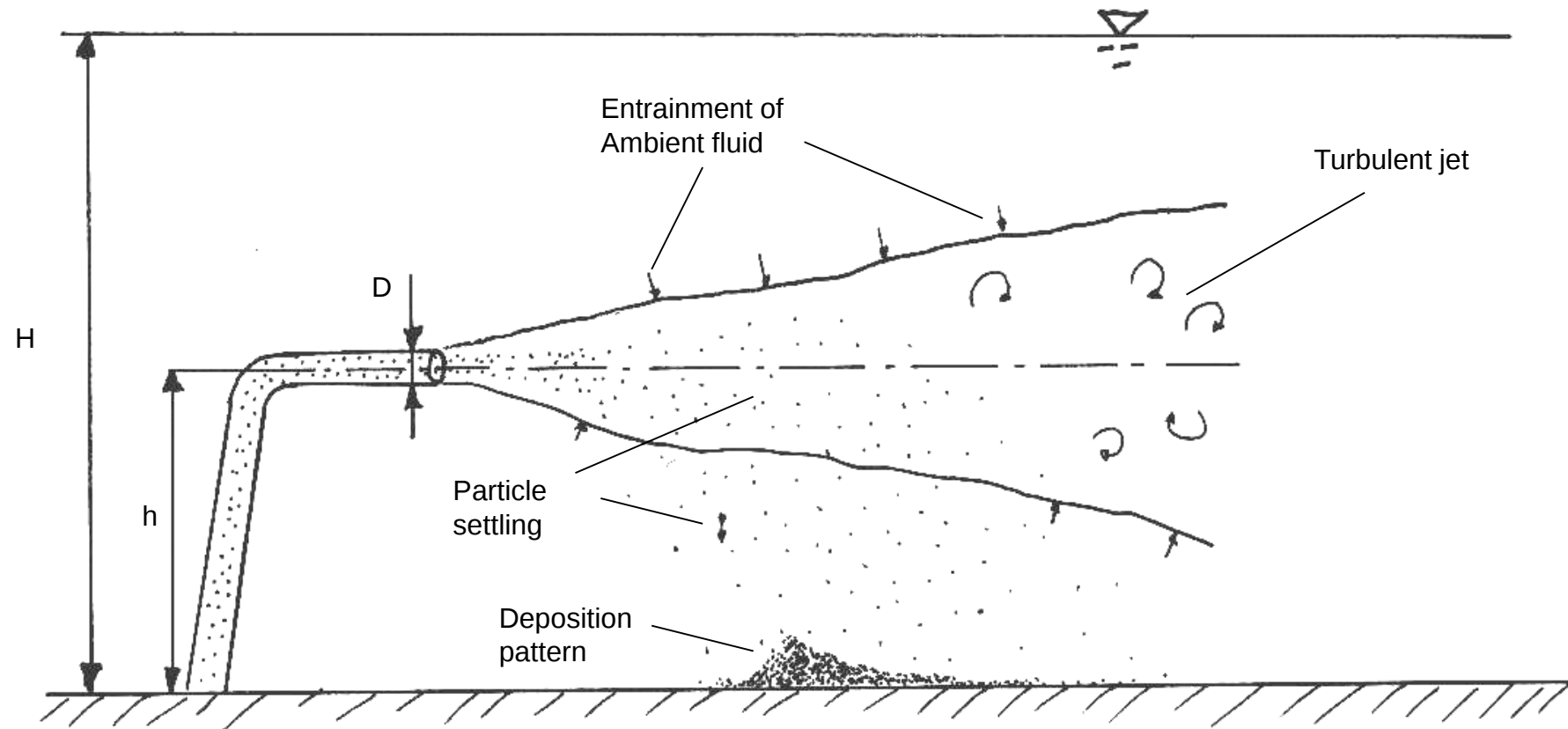
Exemplo: Particle jet Dimensional Analysis

- $N/N_{\max} = e^{(-0.5y/y_{0.5})^2} e^{(-0.5[\ln(x/x_{\max})/0.517]^2)}$



Exemplo: Particle jet

-> *Parametros*



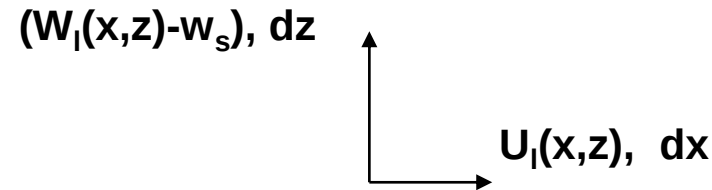
Exemplo: Particle jet

1. Definir as equações governantes de um fenômeno físico para um problema com objetivo e condições definidos.
 - We make the rigorous assumption, to express particle motions only with terminal particle settling velocity at small particle Reynolds numbers assuming that there is no influence of other particles settling nearby:
$$w_s = gD_p^2/(18 \rho)(\rho_p - \rho_l)/\rho_l \quad (\text{for } Re_p = < 1)$$
 - Time averaged velocity field of liquid phase is superimposed by the particle settling field assuming that particles follow average fluid motions.
 - centerline velocity (Neves 1998): $U_c(x) = 6.20(D/x)U_0$.
 - longitudinal velocity (Schlichting and Gersten 1997): $U(r,x) = 3/(8\pi^{0.5}0.017)M_0/(M_0^{0.5}x)/[1+(\pi(r,x))^2]^2$ with $\pi(r,x) = 1/(8(3/\pi)^{0.5}0.51/0.017r/x)$
 - transversal velocity (Schlichting and Gersten 1997): $W(r,x)=0.5(3M_0/\pi)^{0.5}\pi(r,x)/x[1-(\pi(r,x))^2]/[1+(\pi(r,x))^2]^2$ e $\pi(r,x)= 1/(8(3/\pi)^{0.5}0.51/0.017r/x)$
3. Caso comum: fenômeno não tem descrição suficiente e depende do lugar e da aplicação (→ requer calibração e verificação)

Exemplo: Particle jet

Analytical Model

- Velocidades horizontais das partículas
 - $U_p(x, z) = U_l(x, z)$ (velocidade do líquido)
- Velocidades verticais das partículas
 - $W_p(x, z) = W_l(x, z) - w_s$, $w_s = \text{const}$



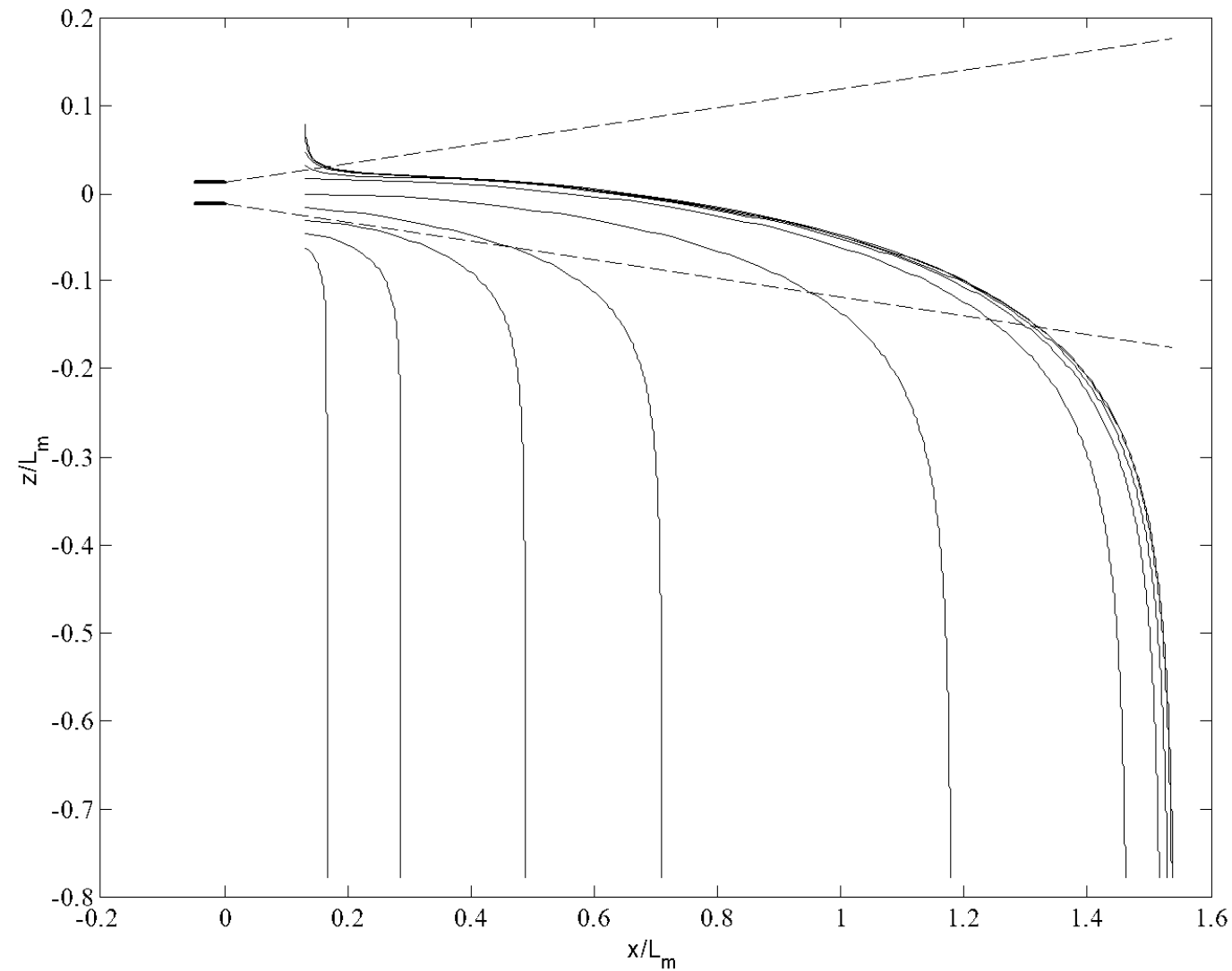
$(W_l(x, z) - w_s), dz$

$U_l(x, z), dx$

- gradient dx/dz , where $dx = U_l(x, z)dt$ and $dz = (W_l(x, z) - w_s)dt$.
- $\int x dx = \int_z U_l / (W_l - w_s) dz$
- $(x - x_0) = \int_z U_l / (W_l - w_s) dz$
- $(x - x_0) / L_m = \int_{z/L_m} U_l / (W_l - w_s) dz / L_m$

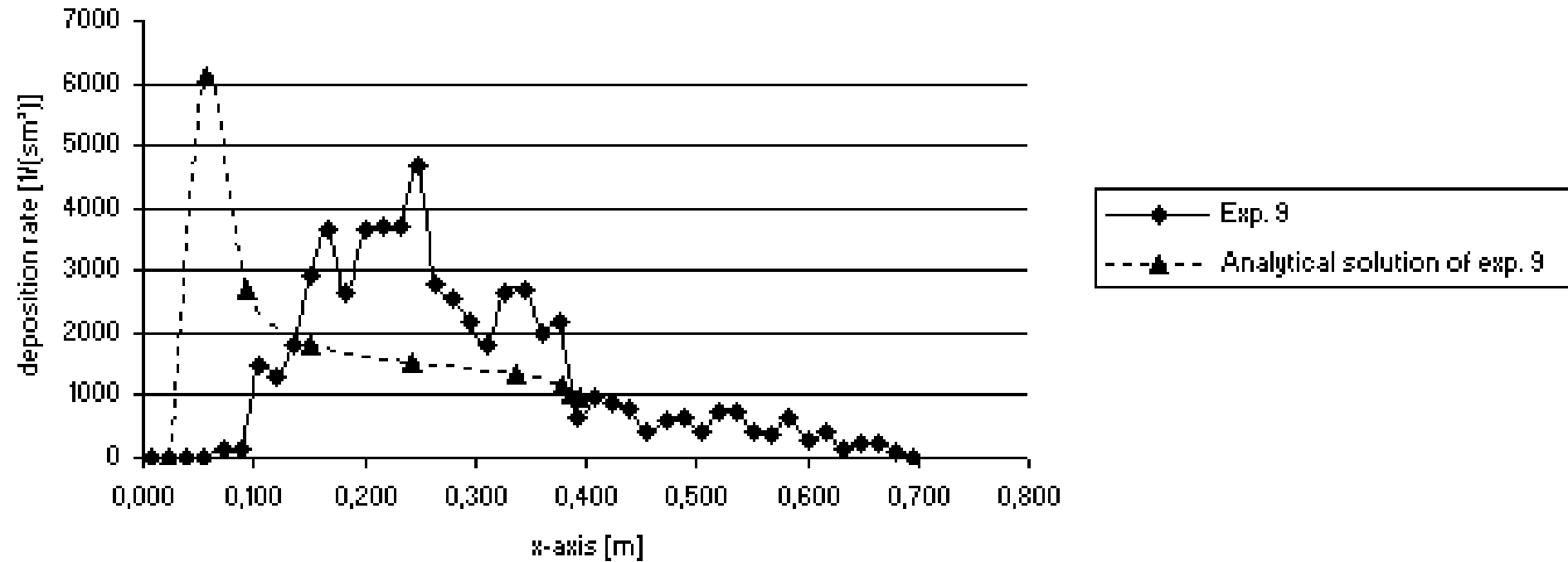
Exemplo: Particle jet

Analytical Model



Exemplo: Particle jet

Analytical Model



Referências

- Boyce, W. E., DiPrima, R. C., 1998, “Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno”, traduzido do inglês por Horacio Macedo, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, ISBN 85-216-1131-5
- Kreyszig, E., 1999, “Advanced Engineering Mathematics”, John Wiley & Sons, Inc., New York, ISBN 0-471-15496-2
- Hancock, M. 2006, “Linear Partial Differential Equations”, MIT Open Course Ware, Massachusetts Institute of Technology, <http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-303-linear-partial-differential-equations-fall-2006/>
- Robert E. Terrell, 2011, “PDE applets heat equation in 1d and 2d“, Cornell University, Department of Mathematics, <http://www.math.cornell.edu/~bterrell/>