Curitiba, 10.12.2018

Prova Final
Matemática Aplicada I

Tobias Bleninger
Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, Prédio Administração, 3º andar, sala 13

Pontuação (preenchido pelo Professor):

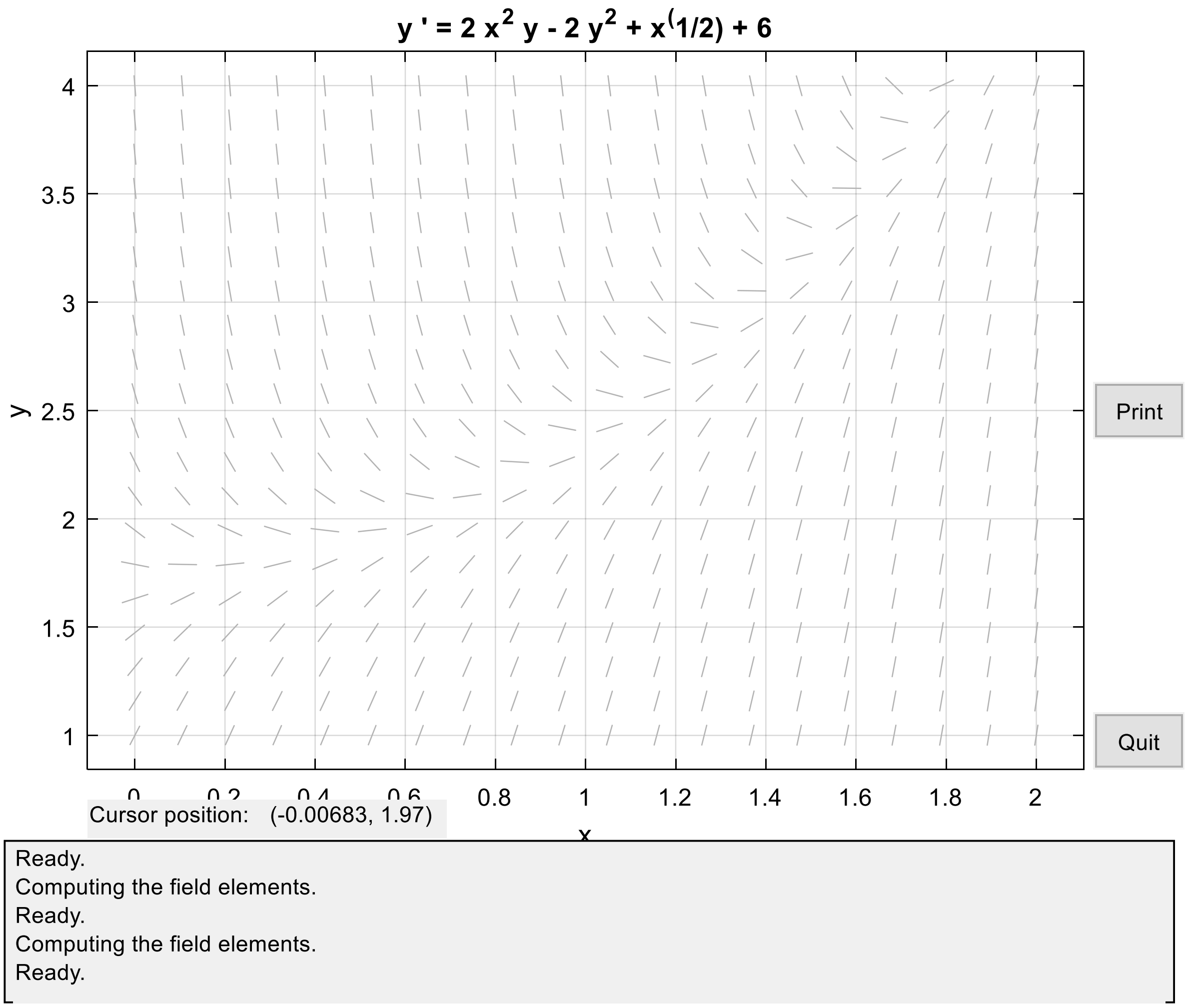
Questão	Pontos obtidos	Pontos totais		
1		25		
2		25		
3		15		
4		23		
5		12	Porcentagem	
Soma				Nota
Final (corrigido)				

Questões

1. (25) Dado o problema $\frac{d^2y}{dt^2}$ - 4y = t, condição inicial: y(0)=1, e y'(0)=0
    a. Classifique a edo (ordem, linearidade, homogeneidade).
    b. Calcule a solução analítica da equação homogênea, transformando a edo obrigatoriamente em um sistema e utilizando autovetores e autovalores.
    c. Calcule a solução geral.

Solução:
- a) 3P Edo2, lin., não-homogeneo
- b) 15P, veja papel
- c) 7P

2. (25) Dado o campo direcional da equação $2y'-2x^2y = -2y^2 + x^{1/2} + 6$, $y(0,2) = 3$
    a. trace a solução no próprio gráfico dado abaixo
    b. Classifique a edo (ordem, linearidade, homogeneidade).
    c. Faça a discretização usando o método de Euler progressivo
    d. Descreva o algoritmo para obter a solução numérica deste problema (em poucas palavras, equações e/ou comandos)
    e. Escolhe um passo espacial e calcule os resultados numéricos para no mínimo dois passos
    f. Marque o resultado no gráfico e discute e explique as diferenças e sugere aprimoramentos ao algoritmo.

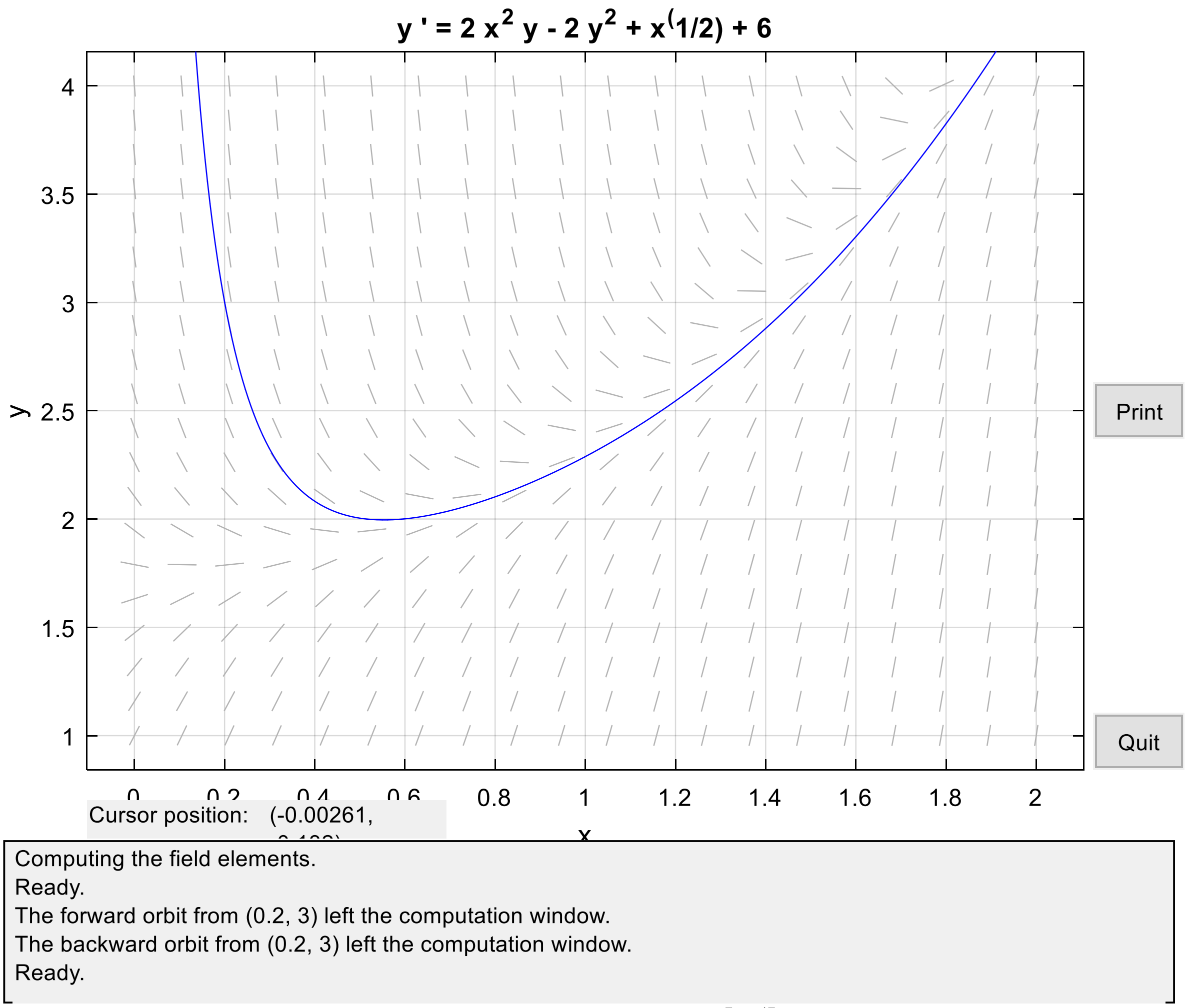


- a) 5P
- b) 3P Edo1, não-linear, não homogêneo

c) 3P $y' = x^2y - y^2 + 1/2x^{1/2} + 3$
$(y_{i+1} - y_i)/\Delta x = x_i^2y_i - y_i^2 + 1/2x_i^{1/2} + 3$

d) 4P Inicialize um vetor y
Inicialize o primeiro elemento y1 = 3
Inicialize o primeiro elemento x1 = 0,2
Faça o calculo n veces: $y_{i+1} = y_i + (x_i^2y_i - y_i^2 + 1/2x_i^{1/2} + 3)\ \Delta x$

e) 10P
$\Delta x = 1$
$Y2 = 3 + (0{,}2^2{*}3 - 3^2 + ½{*}0{,}2^{1/2}{+}3){*}1 = -2{,}7$
$Y3 = -2{,}7 + (1{,}2^2(-2{,}7) - (-2{,}7)^2 + ½{*}1{,}2^{1/2} + 3 = -10$
Diferenças aparecem devido ao grande passo espacial e fortes variações da função neste intervalo. Recomenda se usar um passo deltaX muito menor para reduzir o erro.



3. (15 Pontos) Consideramos $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \vec{y} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$

a. Calcule x_1 e x_2 utilizando o método iterativo de Gauss-Seidel.
b. Descreva uma vantagem e uma desvantagem dos métodos de Gauss-Seidel em comparação ao método de Gauss

a) 11P
$2x_1 - x_2 = 0{,}5$
$-x_1 + 2x_2 = 0{,}5$
$x_1 = (0{,}5 + x_2)/2$
$x_2 = (0{,}5 + x_1)/2$
arbitrando valor inicial: $x_1 = x_2 = 1$:
$x_1^1 = 0{,}75$

$x_2^1 = (0,5 + x_1^1)/2 = 0,625$
$x_1^2 = 0,5625$
$x_2^2 = 0,5313$
$x_1^3 = 0,5156$
$x_2^3 = 0,5078$

4P Vantagem Gauss: converge sempre
Desvantagem Gauss: pode custar muitos calculos
Desvantagem Gauss-Seidel: pode não converger
Vantagem Gauss-Seidel: exige menos iterações ou cálculos para obter resultado

4. (23 P) Dado as equações $y_1' = -0,08y_1 + 0,02y_2 + 6$ e $y_2' = 0,08y_1 - 0,08y_2$ e as condições iniciais $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 150$ obtenha as soluções para y_1 e y_2 utilizando obrigatoriamente transformada de Laplace.

Problema de Mistura Envolvendo Dois Tanques

Na Fig. 142, o tanque T_1 inicialmente contém 100 galões de água pura. O tanque T_2 inicialmente contém 100 galões de água onde são dissolvidas 150 libras de sal. O fluxo de entrada em T_1 é de 2 gal/min a partir de T_2, e de 6 gal/min contendo 6 libras de sal vindo do exterior. O fluxo de entrada em T_2 é de 8 gal/min, a partir de T_1. O fluxo de saída de T_2 é de $2 + 6 = 8$ gal/min, conforme mostra a figura. As misturas são revolvidas de modo a se manterem uniformes. Calcule e represente graficamente os conteúdos de sal $y_1(t)$ e $y_2(t)$ em T_1 e T_2, respectivamente.

Solução. O modelo é obtido na forma de duas equações

$$\text{Taxa temporal da alteração} = \text{Entrada/min} - \text{Saída/min}$$

para os dois tanques (veja a Seção 4.1). Portanto,

$$y_1' = -\frac{8}{100}y_1 + \frac{2}{100}y_2 + 6, \qquad y_2' = \frac{8}{100}y_1 - \frac{8}{100}y_2.$$

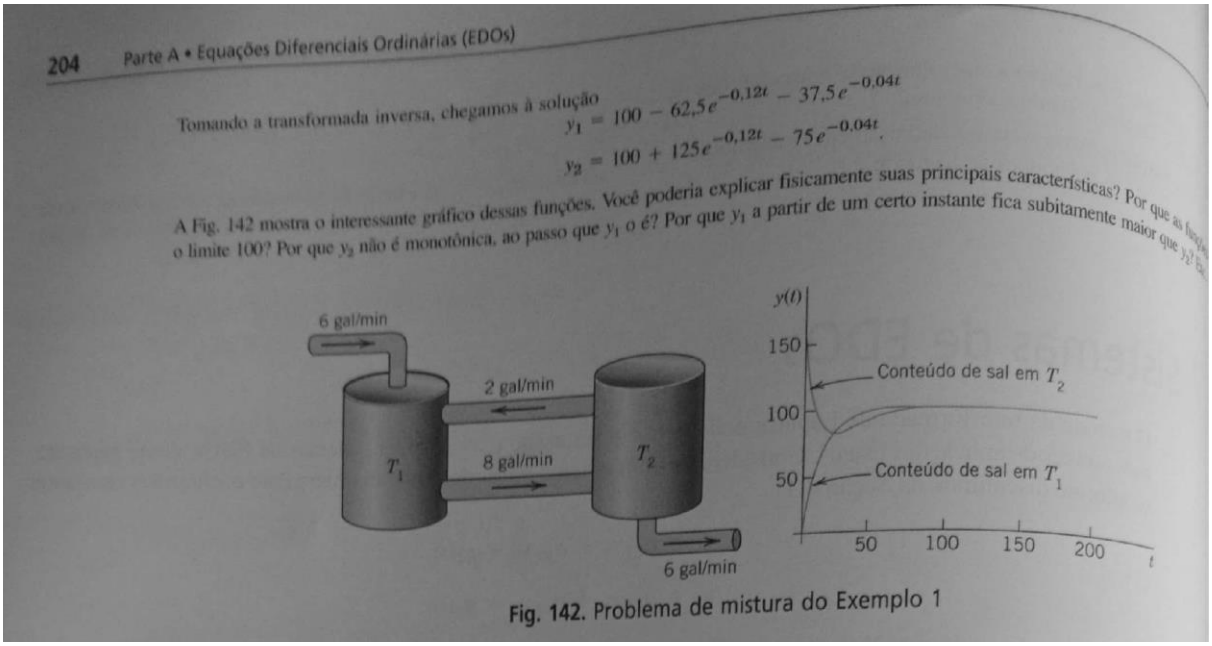
As condições iniciais são $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 150$. Disso, vemos que o sistema subsidiário (2) é

$$\begin{aligned} (-0,08 - s)Y_1 + \quad 0,02Y_2 &= -\frac{6}{s} \\ 0,08Y_1 \quad + (-0,08 - s)Y_2 &= -150. \end{aligned}$$

Para Y_1 e Y_2 podemos resolver esse sistema algebricamente por eliminação (ou pela regra de Cramer da Seção 7.7) e escrevermos as soluções em termos de frações parciais,

$$Y_1 = \frac{9s + 0,48}{s(s + 0,12)(s + 0,04)} = \frac{100}{s} - \frac{62,5}{s + 0,12} - \frac{37,5}{s + 0,04}$$

$$Y_2 = \frac{150s^2 + 12s + 0,48}{s(s + 0,12)(s + 0,04)} = \frac{100}{s} + \frac{125}{s + 0,12} - \frac{75}{s + 0,04}.$$


204 Parte A • Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)

Tomando a transformada inversa, chegamos à solução

$$y_1 = 100 - 62{,}5e^{-0{,}12t} - 37{,}5e^{-0{,}04t}$$
$$y_2 = 100 + 125e^{-0{,}12t} - 75e^{-0{,}04t}.$$

A Fig. 142 mostra o interessante gráfico dessas funções. Você poderia explicar fisicamente suas principais características? Por que as fu o limite 100? Por que y_2 não é monotônica, ao passo que y_1 o é? Por que y_1 a partir de um certo instante fica subitamente maior que y_2?

Fig. 142. Problema de mistura do Exemplo 1

5. (12P) Avalie as frases seguintes, escrevendo se são verdadeiras ou falsas (*resposta certa: pontuação positiva; resposta errada: pontuação negativa; sem resposta: 0, pontuação mínima nesta questão: 0)*:

   a. "O método Runge-Kutta de primeira ordem é identico ao metodo Euler progressivo"

      ☐ a afirmação é verdadeira

   b. "Métodos de soluções de edos por séries são especialmente recomendáveis para soluções de equações com coeficientes variáveis (sendo funções da variável independente)"

      a afirmação é verdadeira

   c. "Uma grande vantagem da utilização do método das transformadas de Laplace na solução de equações diferenciais ordinárias é a possibilidade de poder resolver problemas com entradas não continuas"

      a afirmação é verdadeira

   d. "Na comparação de cálculos computacionais com resultados analíticos pode se dizer que o erro numérico absoluto é sempre menor que o erro numérico relativo"

      a afirmação é falsa

   e. "A iteração de Gauss-Seidel converge para todo que valor inicial se e somente se todos os autovalores da matriz de iteração tiveram módulos maiores que 2. "

      a afirmação é falsa (valores maiores que 1)

   f. "Os campos de gradiente são irrotacionais, assim rot(grad f) = 0" a afirmação é verdadeira

Equações dadas:

Serie de Taylor: $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (x-a)^m f^{(m)}(a)/m!$

Derivadas das Transformadas de Laplace de uma função f(t)

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0)$$
$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

Algumas funções f(t) e suas Transformadas de Laplace

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$		$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	1	$1/s$	7	$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$
2	t	$1/s^2$	8	$\text{sen}\ \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
3	t^2	$2!/s^3$	9	$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2 - a^2}$
4	t^n $(n = 0, 1, \cdots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	10	$\text{senh}\ at$	$\dfrac{a}{s^2 - a^2}$
5	t^a (a positivo)	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	11	$e^{at} \cos \omega t$	$\dfrac{s - a}{(s-a)^2 + \omega^2}$
6	e^{at}	$\dfrac{1}{s - a}$	12	$e^{at}\ \text{sen}\ \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$

Boa sorte!