Curitiba, 27.09.2019

Prova P1
GABARITO
Matemática Aplicada I

Tobias Bleninger
Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, Caixa Postal 19011, 81531-990, Curitiba - PR, Brasil

Nome: ________________________________

GRR: ____________________________

Pontuação (preenchido pelo Professor):

Questão	Pontos obtidos	Pontos totais		
1		30		
2		10		
3		10		
4		25		
5		25	Porcentagem	
Soma		100		Nota
Final (corrigido)				

Questões

1. (30P) Dado o modelo epidêmico do tipo SIR (I'=aSI-bI; S'=-aSI; R'=bI) com as condições iniciais S=45400, I=2100 e R=2500 e os coeficientes b = 1/14 [1/d] e a=0,00001 [1/(pessoa*d)]
    a. Descreva as equações para estimar manualmente os valores para S, I e R para os dias 1 e 2 após a condição inicial e calcule os mesmos.
    b. Modifique as equações para previsões com passo temporal de Δt = 12h e calcule manualmente os valores para 12h, 24h, 36h e 48h e compare quantitativamente com os resultados de a) e explique diferenças (se houver).
    c. Calcule a soma da população total para a condição inicial e para o segundo dia para os dois cálculos e discute o resultado (poucas palavras)
    d. Modifique as equações de a) para calcular valores do passado partindo do dia 2 e calcule os valores de S, I e R para o dia 1 e compare com os valores de a) e discute diferenças (se houver).

a)
$S_{novo} = S_{antes} + S'$
$I_{novo} = I_{antes} + I'$
$R_{novo} = R_{antes} + R'$

T(d)	S	I	R	slinha	ilinha	rlinha
0	45400	2100	2500	-953.4	803.4	150
1	44447	2903.4	2650	-953.4	803.4	150
2	43493	3706.8	2800	-1290.5	1083.1	207.39

b)
Mesmas equações mas mudando coeficientes b12 = b/2, a12=a/2

T(d)	S	I	R	slinha	ilinha	rlinha
0	45400	2100	2500	-476.7	401.7	75
0.5	44923	2501.7	2575	-476.7	401.7	75
1	44447	2903.4	2650	-561.92	472.58	89.346
1.5	43885	3376	2739.3	-645.23	541.54	103.69
2	43239	3917.5	2843	-740.77	620.2	120.57

Comparação dia 1:

1	44447	2903.4	2650
1	44447	2903.4	2650

Após primeiro dia tem valores iguais

2	43493	3706.8	2800
2	43239	3917.5	2843

Após segundo dia tem valores diferentes
Diária menos 12h=
ΔS = 254, ΔI = -210,7 , ΔR = -43

Há diferença entre os dois cálculos porque ambos são aproximações das taxas (funções continuas) com cálculos discretos (Δt=1d e 12h). O menor o passo temporal o melhor a aproximação.

c) Soma população inicial 50000
Soma após 2d (resolução diária) = 49999.8
Soma após 2d (resolução 12h) = 49999.5
Como indicado em b) os cálculos aproximam a realidade e assim não necessariamente conservam "massa" (aqui a população total). Adicionalmente existem erros de arredondamento.

d)
$S_{antes} = S_{hoje} - S'$
$I_{antes} = I_{hoje} - I'$

$R_{antes} = R_{hoje} - R'$

T(d)	S	I	R	slinha	ilinha	rlinha
_	______	_______	_____	________	_______	_______
0	45400	2100	2500	-953.4	803.4	150
1	44447	2903.4	2650	-953.4	803.4	150
2	43493	3706.8	2800	-1290.5	1083.1	207.39
1b	44783,5	2623.7	2592.61			

Há diferenças entre o calculo progressivo e regressivo porque utilizem as taxas em momentos diferentes, porém ambos sendo aproximações.

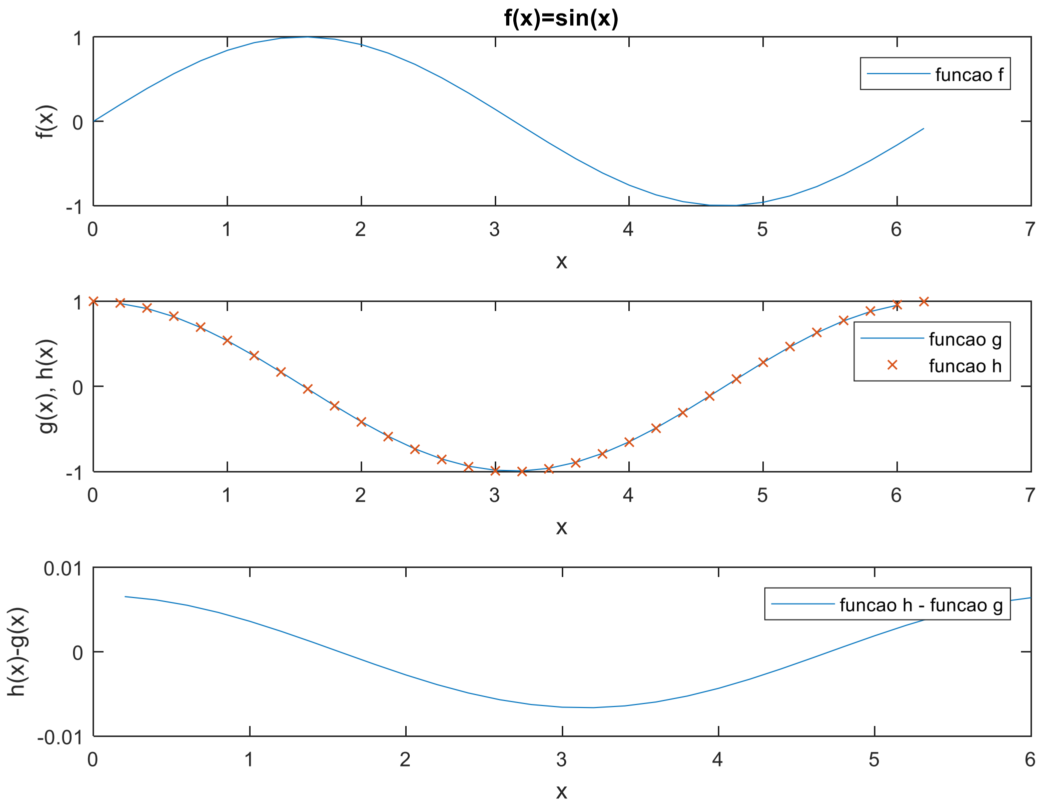
2. (10P) Dada a função f(x)=1/((x-0,3)²+0,01)+1/((x-0,9)²+0,04)-6 num intervalo de 0 a 6:
   a. Faça a integração numérica utilizando o método dos retângulos com no mínimo 3 retângulos
   b. Descreva em poucas palavras um algoritmo numérico para fazer o mesmo cálculo, porém com 200 retângulos.

a) 3 retangulos entre 0 e 6 → cada largura é 6/3=2
Calcular f(x) nos pontos de apoio f(1)=, f(3) e f(5)
Areas dos retangulos são A = f(1)*2 + f(3)*2 + f(5)*2

x	f(x)	A=f(x)*2
1	16	32
3	-5.63829	-11.2766
5	-5.8954	-11.7908
	Soma	**8.932603**

b) Devide intervalo em 200 partes (aqui delta=6/200)
X=0+delta/2
A=0
De i=1 a 200 faça
X=x+i*delta
Y=f(x)
A=A+delta*Y
end

3. (10P) Dada a função f(x) = sen x em 0 ≤ x ≤ 2∏, a função g(x) = (f(x+0,2) - f(x-0,2))/0,4 e a função h(x) = f´(x) e os gráficos das mesmas e o gráfico de h(x)-g(x):



a. Descreva a definição formal de f´(x) e discute a diferença entre f´(x) e g(x) em poucas palavras e utilizando o gráfico.
b. Em quais pontos vale f´(x) = g(x).
c. Explique em poucas palavras, porque a diferença h(x) - g(x) varia com x.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

a) g(x) é uma aproximação (função similar, sem limite e com h maior) a derivada num intervalo finito com h = 0,2. A aproximação porém no caso apresentado varia da derivida analítica com erros absolutos menos que 10^{-2}

b) Nos pontos aproximadamente 1,9 e 4,5, pontos com menor inclinação da curva (menor derivada) e assim menor "efeito" da aproximação.

c) As inclinações variam e são estas que foram aproximadas. Maiores erros em regiões com máxima taxa.

4. (25P) Utiliza a expansão em series de Taylor com ordem n = 0 a 3 para aproximar a função f(x) = y = $1/x^2$+sen(x) +2 em x_{i+1} = 2,5 na base do valor de f e das derivadas em x_i = 2 e calcule o erro absoluto e relativo para cada aproximação
Veja anotações em aula de exemplo similar

5. (25 P) Consideramos um elemento quadrado no plano x-y delimitada pelo dois vetores unitários **i** e **j** e que é transformada de forma que um ponto P:(x_1, x_2) vai até o ponto Q:(y_1, y_2) dado por $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

a. Encontre as direções principais (autovetores).
b. Qual é o angulo entre as direções principais?
c. Que forma assume o quadrado sob essa deformação? Faça um desenho esquemático com o quadrado, os autovetores e a deformação final.
d. A deformação modifique a área do quadrado (justifique e quantifique sua resposta com uma frase)?

e. A deformação mantém o sentido do quadrado? Justifique sua resposta com poucas palavras.

f. Calcule o vetor $\vec{x}$ do qual surgiu o vetor $\vec{y} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$ obrigatoriamente calculando a inversa da Matriz A.

g. Calcule o vetor $\vec{x}$ do qual surgiu o vetor $\vec{y} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$ obrigatoriamente utilizando o método de Gauss-Seidel.

h. Desenha a transformação do vetor da questão f) e do resultado da transformação no esquema da questão c)

i. O vetor $\vec{y} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$ representa uma direcao principal? Justifique sua proposta.

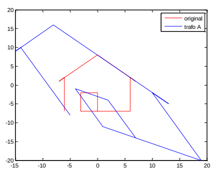
j. Mostre que a matriz A pode ser escrita como $A = S\Lambda S^{-1} = S\Lambda S^{-1}$ sendo S a matriz dos autovetores e Λ a matriz dos autovalores.

k. Mostre com j) que $A^4 = S\Lambda^4 S^{-1}$ e explique em uma frase a utilidade disto

Solução:

a) $(2-\lambda)(2-\lambda)-1=0$
$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$
$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1$
$\lambda_1 = 3$: $-x_1 - x_2 = 0$; $-x_1 = x_2$; escolhe $x_2 = 1 \rightarrow x_1 = -1$
$\lambda_2 = 1$: $x_1 - x_2 = 0$; $x_1 = x_2$; escolhe $x_2 = 1 \rightarrow x_1 = 1$

b) autovet$_1$*autovet$_2$ = |autovet$_1$||autovet$_2$|cós(φ) <=> (-1+1)/2 = 0 = cós(φ) $\rightarrow \varphi = 90°$

c)


d) det(A) = 4-1 = 3, modifique área três vezes maior

e) Mantem sentido porque det(A) é positivo (porta não muda do lado)

f) $Ax=y$ <=> $x=A^{-1}y$
$A^{-1} = 1/\det(A)[a_{22}\ -a_{12}; -a_{21}\ a_{11}] = [2/3\ 1/3;\ 1/3\ 2/3]$
$A^{-1}(0,5;0,5) = (2/3*0,5 + 1/3*0,5;\ 1/3*0,5+2/3*0,5) = (0,5;\ 0,5)$

a) $2x_1-x_2=0,5$
$-x_1+2x_2=0,5$
$x_1 = (0,5+x_2)/2$
$x_2 = (0,5+x_1)/2$
arbitrando valor inicial: $x_1 = x_2 = 1$:
$x_1^1=0,75$
$x_2^1 = (0,5 + x_1^1)/2 = 0,625$
$x_1^2=0,5625$
$x_2^2 = 0,5313$
$x_1^3=0,5156$
$x_2^3 = 0,5078$

g) figura

h) Sim, é autovetor com autovalor 1 A(0,5 0,5)=1(0,5 0,5)

i) Matriz dos autovetores (normalizado) S = 1/sqrt(2)* [-1 1; 1 1]
det (S) =-1
$S\Lambda S^{-1}$ = 1/sqrt(2)*[-1 1; 1 1]*[3 0; 0 1]*1/(-1)*1/sqrt(2)*[1 -1; -1 -1] = A
$S\Lambda S^t$ = 1/raiz(2)[-1 1; 1 1]*[3 0; 0 1]*1/raiz(2)[-1 1; 1 1] = A

j) $A^2 = (S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1}) = (S\Lambda S^{-1}S\Lambda S^{-1}) = (S\Lambda I\Lambda S^{-1}) = (S\Lambda\Lambda S^{-1}) = S\Lambda^2 S^{-1}$