TEA014 - Mecânica dos Fluidos Ambiental II
Curso de Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 3 Fevereiro 2023
Prof. Michael Mannich

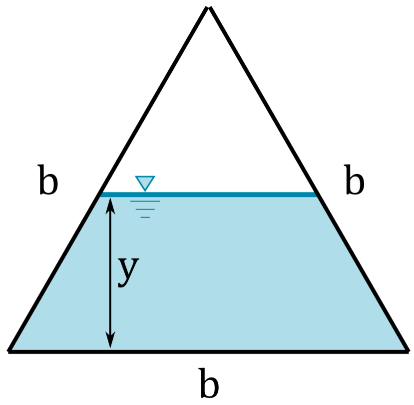
P03

NOME: GABARITO

Assinatura: ______________________

---

1 [30] Considere um canal de seção de triângulo equilátero de lado b, coeficiente de Manning de n e declividade S_0.



a) [15] Determine as relações para $A(y)$, $P(y)$ e $B(y)$.

b) [10] Se $n = 0.014\,\mathrm{sm}^{-1/3}$, $b = 0.5\,\mathrm{m}$, $y = 0.25\,\mathrm{m}$ e a declividade é de 1:500, determine a vazão.

c) [5] A vazão máxima ocorrerá com escoamento à seção plena? Justifique.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
A &= (b - y\cot 60^\circ)\, y \\
P &= b + 2y \csc 60^\circ \\
B &= b - 2y \cot 60^\circ \\
R_h &= \frac{(b - y\cot 60^\circ)\, y}{b + 2y\csc 60^\circ}
\end{aligned}
$$

Calculando valores:

$$
\begin{aligned}
A = (b - y\cot 60^\circ)\, y &= 0.08891561\,\mathrm{m}^2 \\
P = b + 2y\csc 60^\circ &= 1.07735027\,\mathrm{m} \\
B = b - 2y\cot 60^\circ &= 0.21132487\,\mathrm{m} \\
R_h = \frac{A}{P} &= 0.08253175\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Aplicando a Equação de Manning com $S_0 = 0.002\,\mathrm{m/m}$ temos:

$$
Q = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2} = 0.05384091\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}
$$

Poderíamos calcular o número de Froude e reconhecer que o escoamento é subcrítico/fluvial ($Fr < 1$).

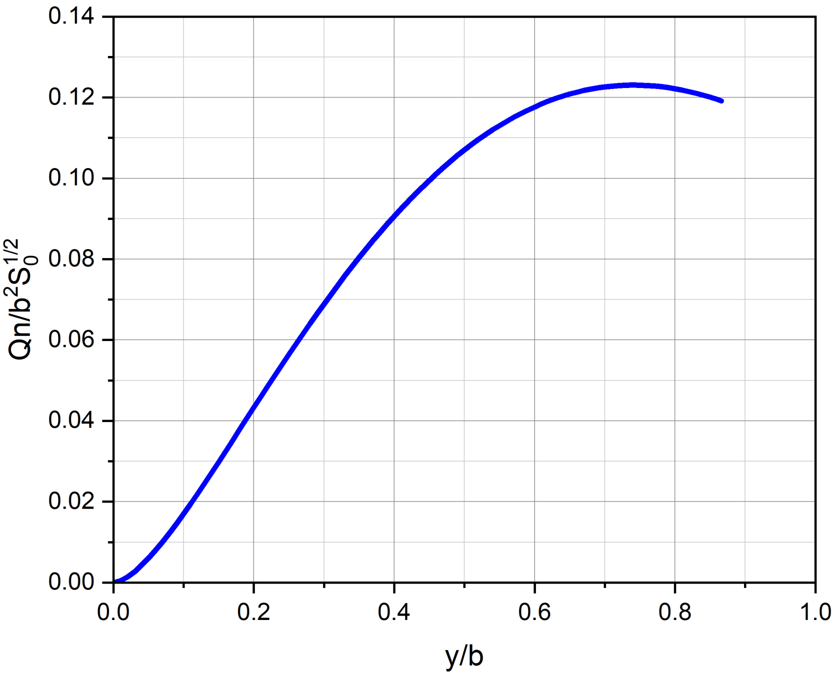
$$
\begin{aligned}
Fr^2 &= \frac{Q^2 B}{g A^3} \\
Fr &= \sqrt{\frac{Q^2 B}{g A^3}} = 0.29804795
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

Poderíamos adimensionalizar a equação da vazão da forma com a variável $y_* = \dfrac{y}{b}$ entendendo, claro, que o valor máximo que $\dfrac{y}{b}$ pode assumir é $\dfrac{y}{b} = \operatorname{sen} 60°$:

$$\begin{aligned} A = (b - y\cot 60°)\,y = b^2\left(1 - \frac{y}{b}\cot 60°\right)\frac{y}{b} = b^2\left(1 - y_*\cot 60°\right)y_* \\ P = b + 2y\csc 60° = b\left(1 + 2\frac{y}{b}\csc 60°\right) = b\left(1 + 2y_*\csc 60°\right) \\ Q = \frac{1}{n}AR^{2/3}S_0^{1/2} = \frac{1}{n}A^{5/3}P^{-2/3}S_0^{1/2} \\ \frac{Qn}{b^2S_0^{1/2}} = \frac{\left[\left(1 - y_*\cot 60°\right)y_*\right]^{5/3}}{\left(1 + 2y_*\csc 60°\right)^{2/3}} \end{aligned}$$

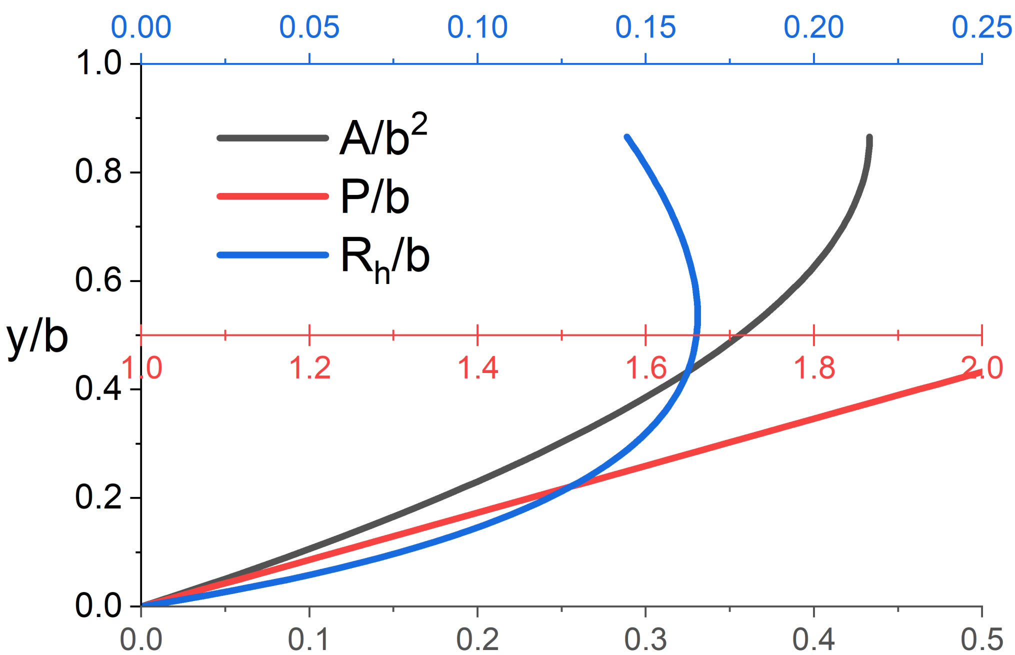
Um gráfico disso produz:



Podemos reconhecer que a vazão irá produzir um máximo em uma profundidade inferior à da seção plena, da mesma forma como observamos em um canal circular. A razão é que o R_h possui um máximo em uma profundidade inferior como observado na próxima figura.
Somente normalizamos as variáveis da forma:

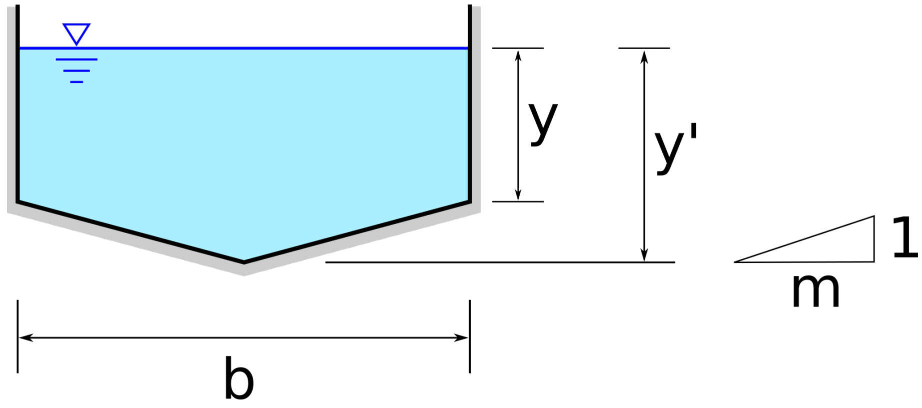
$$\begin{aligned} \frac{A}{b^2} = \left(1 - y_*\cot 60°\right)y_* \\ \frac{P}{b} = 1 + 2y_*\csc 60° \\ \frac{B}{b} = 1 - 2y_*\cot 60° \\ \frac{R_h}{b} = \frac{\left(b - y_*\cot 60°\right)y_*}{1 + 2y_*\csc 60°} \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹



Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Um escoamento de água ocorre em um canal com seção transversal apresentada na figura. Se a vazão é $Q = 13\,\mathrm{m^3/s}$, determine a profundidade normal do escoamento para o canal com coeficiente de Manning de $n = 0.015\,\mathrm{sm^{-1/3}}$, largura $b = 4\,\mathrm{m}$, inclinação do fundo com $m = 4$ e a declividade longitudinal do canal $S_0 = 0.0008\,\mathrm{m/m}$.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Apresentamos as equações para área e perímetro, substituímos na Equação de Manning e a reescrevemos de forma a construir um processo iterativo para determinar a solução por aproximações sucessivas.

$$A = yb + \frac{b^2}{4m} = yb\left(1 + \frac{b}{4my}\right)$$

$$P = 2y + b\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}$$

$$Q = \frac{1}{n}ARh^{2/3}S_0^{1/2} = \frac{1}{n}\frac{A^{5/3}}{P^{2/3}}S_0^{1/2} \rightarrow \frac{Qn}{S_0^{1/2}}P^{2/3} = A^{5/3} \rightarrow \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5} P^{2/5} = A$$

$$y = \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5} \frac{\left(2y + b\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}\right)^{2/5}}{b + \frac{b^2}{4my}}$$

$$y_{i+1} = \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5} \frac{\left(2y_i + b\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}\right)^{2/5}}{b + \frac{b^2}{4my_i}}$$

Outra forma seria construir a equação para solução pelo método de Newton-Raphson. Talvez a forma mais conveniente para a derivada seria conforme:

$$Q = \frac{1}{n}ARh^{2/3}S_0^{1/2} = \frac{1}{n}\frac{A^{5/3}}{P^{2/3}}S_0^{1/2} \rightarrow \frac{Qn}{S_0^{1/2}}P^{2/3} = A^{5/3} \rightarrow \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5} P^{2/5} = A$$

$$f(y) = A - \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5} P^{2/5}$$

$$f(y) = b\left(y + \frac{b}{4m}\right) - \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5}\left(2y + b\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}\right)^{2/5}$$

$$f'(y) = b - \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5}\frac{2}{5}\left(2y + b\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}\right)^{-3/5} 2$$

$$y_{i+1} = y_i - \frac{f(y_i)}{f'(y_i)}$$

Continue a solução no verso ⟹

Basta arbitrar um valor inicial para y e seguir o processo iterativo para obter como solução final $y = 1.495310\,\mathrm{m}$ e a profundidade total $y' = y + \dfrac{b}{2m} = 1.995310\,\mathrm{m}$. Alternativamente poderíamos resolver com y'.

Se você tivesse escrito em função de y' poderíamos resolver de forma similar.

$$A = y'b - \frac{b^2}{4m} = y'b\left(1 - \frac{b}{4my'}\right)$$

$$P = 2y' - 2\frac{b}{2m} + 2\frac{b}{2}\sqrt{1+\frac{1}{m^2}} = 2y' + b\left(-\frac{1}{m} + \sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\right)$$

$$Q = \frac{1}{n}ARh^{2/3}S_0^{1/2} = \frac{1}{n}\frac{A^{5/3}}{P^{2/3}}S_0^{1/2} \to \frac{Qn}{S_0^{1/2}}P^{2/3} = A^{5/3} \to \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5}P^{2/5} = A$$

$$y = \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5}\frac{b\left(2y' + b\left(-\frac{1}{m} + \sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\right)\right)^{2/5}}{b\left(1 - \frac{b}{4my'}\right)}$$

$$y'_{i+1} = \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5}\frac{b\left(2y'_i + b\left(-\frac{1}{m} + \sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\right)\right)^{2/5}}{b\left(1 - \frac{b}{4my'_i}\right)}$$

Outra forma seria construir a equação para solução pelo método de Newton-Raphson. Talvez a forma mais conveniente para a derivada seria conforme:

$$Q = \frac{1}{n}ARh^{2/3}S_0^{1/2} = \frac{1}{n}\frac{A^{5/3}}{P^{2/3}}S_0^{1/2} \to \frac{Qn}{S_0^{1/2}}P^{2/3} = A^{5/3} \to \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5}P^{2/5} = A$$

$$f(y') = A - \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5}P^{2/5}$$

$$f(y') = y'b\left(1 - \frac{b}{4my'}\right) - \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5}\left(2y' + b\left(-\frac{1}{m} + \sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\right)\right)^{2/5}$$

$$f'(y') = b - \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5}\frac{2}{5}\left(2y' + b\left(-\frac{1}{m} + \sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\right)\right)^{-3/5}2$$

$$y_{i+1} = y_i - \frac{f(y_i)}{f'(y_i)}$$

Basta arbitrar um valor inicial para y' e seguir o processo iterativo para obter como solução final $y' = 1.995310\,\mathrm{m}$.

Continue a solução no verso ⟹

3 [35] Um escoamento de água ocorre em um canal com seção transversal retangular com largura de $b = 6$ m, profundidade normal $y = 2.0$ m e velocidade de $V = 3.0$ m/s.

a) [15] Qual mudança da profundidade e na elevação da superfície livre em uma região que o escoamento está sujeito a uma elevação suave de 0.10 m no fundo? Apresente um esquema da seção transversal do escoamento e o perfil da superfície livre.

b) [10] O que aconteceria se houvesse uma elevação suave de 0.20 m no fundo? Qual a profundidade na seção com elevação?

c) [10] Apresente os dois casos em um gráfico de y vs. E.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{Q}{b} = Vy = 6\,\mathrm{m^3/sm} \\
Fr_1 &= \frac{q}{\sqrt{gy_1^3}} = 0.677 \\
y_{c,1} &= \left(\frac{q_1^2}{g}\right)^{1/3} = 1.542450\,\mathrm{m} \\
E_c &= \frac{3}{2}y_c = = 2.313675\,\mathrm{m} \\
E_1 = y_1 + \frac{q_1^2}{2gy_1^2} = 2 + &\frac{6^2}{2 \times 9.81 \times 2^2} = 2.458716\,\mathrm{m} \\
E_2 = E_1 - h = 2.458716 &- 0.15 = 2.358716\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

$E_2 > E_C = 2.313675$ m, portanto, ainda não há controle.

Agora precisamos determinar y_2 a partir de E_2 sabendo que o escoamento de montante é fluvial e que a profundidade y_2 vai diminuir com $q_1 = q_2$. Determinamos y_2 a partir da equação da energia específica:

$$
E_2 = y_2 + \frac{q_2^2}{2gy_2^2} \rightarrow y_2^3 - E_2 y_2^2 + \frac{q_2^2}{2g} = 0
$$

Considerando uma solução iterativa pelo método de Newton-Raphson, por exemplo, tomando uma aproximação inicial ($y_i = 2.0$) com valor superior ao da profundidade crítica na seção 2 $y_{C,2} = y_{C,1} = 1.542450$ m, uma vez que sabemos que o escoamento ainda será fluvial.

$$
\begin{aligned}
f &= y_2^3 - E_2 y_2^2 + \frac{q_2^2}{2g} \\
f\prime &= 3y_2^2 - 2E_2 y_2 \\
y_{i+1} = y_i + \frac{f}{f\prime} &= y_i + \frac{y_i^3 - E_2 y_i^2 + q_2^2/2g}{3y_i^2 - 2E_2 y_i}
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

Tabela 1: **Iterações para determinação da profundidade** y_2

i	y_i
1	2.000000
2	1.844063
3	1.787655
4	1.779060
5	1.778860
6	1.778860
7	1.778860
8	1.778860
9	1.778860
10	1.778860

A solução é $y_2 = 1.779$ m e não há controle uma vez que $y_2 > y_C$.

Alternativamente poderíamos resolver a equação cúbica de forma analítica:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Calculamos

$$\begin{aligned} p &= b - \frac{a^2}{3} = -1.854513 \\ q &= \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0.862803 \\ \Delta &= \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -0.050118 \end{aligned}$$

Se $\Delta < 0$ temos as soluções:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-p}\sin\left[\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}q}{2(-p)^{3/2}}\right)\right] - \frac{a}{3} \\ x_2 &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-p}\sin\left[\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}q}{2(-p)^{3/2}}\right) + \frac{\pi}{3}\right] - \frac{a}{3} \\ x_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-p}\cos\left[\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}q}{2(-p)^{3/2}}\right) + \frac{\pi}{6}\right] - \frac{a}{3} \end{aligned}$$

As raízes são então:

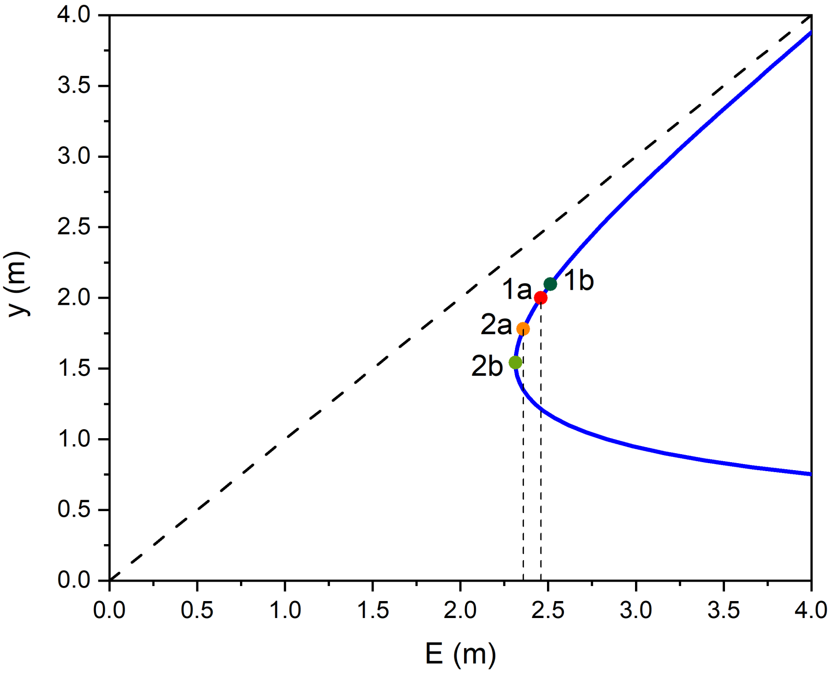
$$\begin{aligned} x_1 &= 1.346120 \\ x_2 &= -0.766264 \\ x_3 &= 1.778860 \end{aligned}$$

b) Se a elevação for de $h - 0.20$ m a energia específica na seção 2 será $E_2 = E_1 - h = 2.458716 - 0.20 = 2.258716$ m que é inferior à E_C ($E_2 < E_C$). Desta forma, a elevação exercerá controle e o nível de água à montante se elevaria e sa seção 2 a profundidade seria crítica (y_C). Você poderia resolver o mesmo problema obtendo:

Continue a solução no verso ⟹

$$E_1 = E_2 + h = E_C + h = 2.513675\,\mathrm{m}$$
$$y_2 = y_C = 1.542450\,\mathrm{m}$$
$$y_1 = 2.096029\,\mathrm{m}$$

c)



Continue a solução no verso ⟹