

TEA018 Hidrologia Ambiental – Notas de aula

Nelson Luís Dias

Prof. Titular, Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR

21 de outubro de 2020

Sumário

| | | |
|----------|--|------------|
| 1 | Introdução e Processos Hidrológicos | 4 |
| 1.1 | Introdução e aplicações | 4 |
| 1.2 | Estimativas de P , Q e E | 6 |
| 1.3 | O conceito de sistemas — ou escalas! | 8 |
| 1.4 | História | 10 |
| 2 | As leis de conservação e as bases de Mecânica dos Fluidos da Hidrologia | 11 |
| 2.1 | O Teorema do Transporte de Reynolds | 11 |
| 2.2 | A equação da continuidade | 13 |
| 2.3 | As equações de Mecânica dos Fluidos | 14 |
| 2.4 | Aplicações em Hidrologia | 16 |
| 2.5 | Balances de massa, quantidade de movimento e energia em um trecho de rio em escoamento uniforme e permanente | 19 |
| 2.6 | Métodos racionais para o cálculo da perda de carga | 23 |
| 2.6.1 | A fórmula de Manning | 26 |
| 2.7 | Escoamentos em meios porosos: lei de Darcy | 28 |
| 2.8 | O balanço de radiação na superfície | 29 |
| 2.9 | Hidrologia computacional | 30 |
| 3 | Água na atmosfera | 37 |
| 3.1 | O balanço radiativo da Terra e o efeito estufa | 37 |
| 3.2 | Circulação atmosférica | 39 |
| 3.3 | A leis dos gases ideais e calores específicos para uma substância pura | 42 |
| 3.4 | A atmosfera como uma mistura de gases ideais | 44 |
| 3.5 | Saturação e grandezas associadas | 51 |
| 3.6 | Temperatura potencial | 55 |
| 3.7 | Precipitação | 61 |
| 3.8 | Evaporação: escalas e conceitos gerais | 69 |
| 3.9 | O movimento da Terra no espaço | 76 |
| 3.10 | Os fundamentos físicos dos métodos de medição de evaporação | 91 |
| 3.11 | Os métodos e modelos clássicos de evaporação evapotranspiração | 102 |
| 3.12 | Linhas de ação para aplicações | 107 |
| 3.13 | Dedução das equações de Penman e Penman-Monteith | 109 |
| 4 | Água no solo | 113 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 5 | Água superficial | 122 |
| 5.1 | As contribuições para a formação da hidrógrafa | 122 |
| 5.1.1 | O escoamento superficial por saturação das áreas próximas dos cursos d'água | 123 |
| 5.2 | A hidrógrafa | 123 |
| 5.3 | Chuva efetiva e escoamento direto | 127 |
| 5.4 | O excesso de precipitação | 127 |
| 5.5 | O método do SCS | 130 |
| 5.6 | Escoamento com superfície livre na bacia hidrográfica | 131 |
| 6 | Medições hidrológicas | 134 |
| 6.1 | Medições típicas, por tipo de estação | 135 |
| 6.2 | Redes de Monitoramento | 142 |
| 7 | A hidrógrafa unitária | 143 |
| 8 | Propagação de cheias: modelos concentrados | 153 |
| 8.1 | Vertedor livre | 153 |
| 8.2 | O método de Muskingum | 158 |
| 8.3 | Reservatórios lineares em série | 164 |
| 9 | Propagação de cheias: modelos distribuídos | 168 |
| 9.1 | A onda cinemática | 170 |
| 9.2 | Muskingum-Cunge | 176 |
| 9.3 | A aproximação da difusão | 177 |
| 10 | Probabilidade e estatística aplicadas à Hidrologia | 180 |
| 10.1 | Um pouco de estatística descritiva | 183 |
| 10.2 | Descritores estatísticos | 186 |
| 10.3 | O ajuste de distribuições de probabilidade | 186 |
| 10.4 | Bondade de ajuste | 190 |
| 10.5 | Algumas distribuições de probabilidade | 190 |
| 10.6 | Simulação | 193 |
| 11 | Análise de frequência | 195 |
| 12 | Critérios para projeto hidrológico | 199 |
| 12.1 | Análise de custo-benefício | 201 |
| 12.2 | Análise de incerteza 1ª ordem | 202 |
| 13 | Chuva de projeto | 205 |
| 13.1 | Curvas intensidade-duração | 205 |
| 13.2 | A precipitação máxima provável | 206 |
| 14 | Vazão de projeto | 208 |
| 14.1 | Sistemas de drenagem | 208 |
| 14.2 | Planície de inundação e reservatórios de controle de cheia | 209 |
| 14.3 | Previsão de vazões! | 210 |
| 14.4 | Dimensionamento de reservatório de estiagem | 210 |

Capítulo 1

Introdução e Processos Hidrológicos

1.1 Introdução e aplicações

A água é a substância mais abundante na Terra.

A Hidrologia trata da água nos estados sólido, líquido e gasoso.

Aplicações de Hidrologia:

- Projeto e operação de estruturas hidráulicas.
- Abastecimento de Água.
- Tratamento e destino de esgotos.
- Irrigação.
- Drenagem.
- Geração de energia hidrelétrica.
- Controle de cheias.
- Navegação fluvial.
- Controle de erosão.
- Estabilidade de encostas.
- Controle de salinização de solos.
- Controle de poluição hídrica.
- Usos recreativos.
- Proteção da fauna e da flora.

Uma definição mais precisa

Hidrologia é o estudo do ciclo hidrológico nas áreas continentais.

Tanto a variabilidade natural quanto as atividades humanas afetam os diversos fluxos do ciclo hidrológico e a qualidade da água.

Praticamente *todas* as atividades humanas impactam o ambiente, e o ciclo hidrológico, direta ou indiretamente. Exemplos:

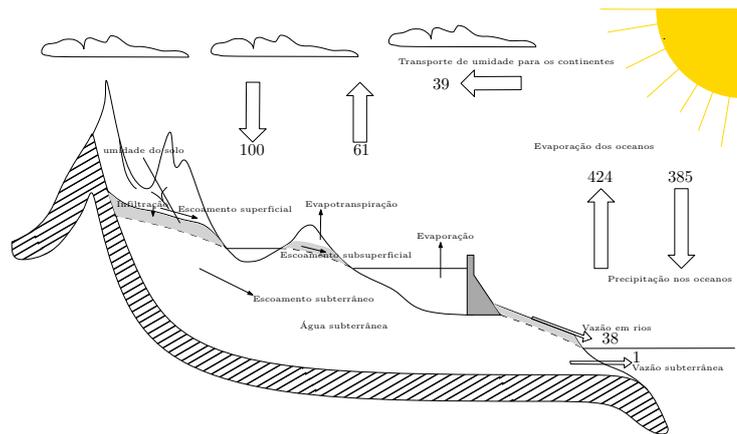


Figura 1.1: O ciclo hidrológico (adaptado de [Chow et al. \(1988\)](#)).

- Agricultura em geral:
 - Aragem do solo.
 - Irrigação.
 - Adubação.
- Desmatamento.
- Exploração de águas superficiais.
- Exploração de águas subterrâneas.
- Construção de represas.
- Lançamento de esgoto *in natura* ou tratado em rios, lagos e no oceano.
- Urbanização.
- ...

O ciclo hidrológico merece a figura 1.1 de [Chow et al. \(1988\)](#).

Aqui aparece pela primeira vez o termo *Runoff* que às vezes é sinônimo de *overland flow* (escoamento superficial) e às vezes é sinônimo de *streamflow* (vazão em uma seção de rio).

Meu conselho: evite *runoff*; diga com outras palavras e use outros símbolos. De todo modo, *runoff* significa o escoamento para fora de algum compartimento (uma gleba de solo no caso de uma visão mais local e “agronômica”, ou a bacia como um todo no caso de uma visão “hidrológica”).

Note também, na figura 1.2, a distinção entre leçol (e poço) freático e artesianos.

Como podemos ver na figura 1.1, são elementos do ciclo hidrológico nos continentes:

- Precipitação (chuva + neve + granizo)

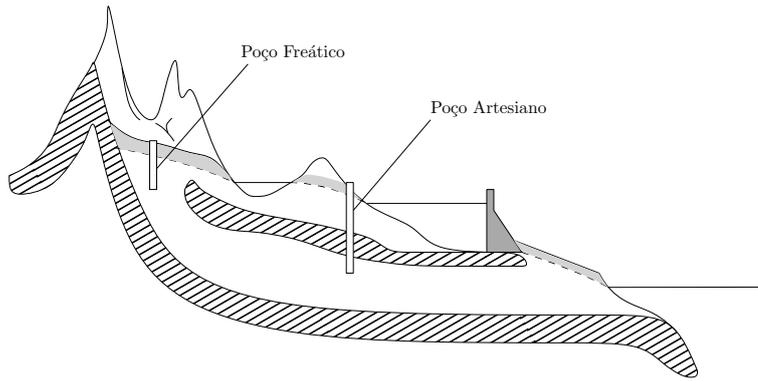


Figura 1.2: Poços freático e artesiano.

Tabela 1.1: Distribuição da água no planeta.

| Região | Quantidade (%) |
|------------------|-----------------|
| Oceanos | 96.5 |
| Água subterrânea | 0.73 (doce) |
| Água subterrânea | 0.96 (salgada) |
| Umidade do solo | 0.0012 |
| Calotas polares | 1.7 |
| Lagos | 0.007 (doce) |
| Lagos | 0.006 (salgada) |
| Pântanos | 0.0008 |
| Rios | 0.0002 |
| Seres vivos | 0.0001 |
| Atmosfera | 0.001 |

- Evapotranspiração:
 - Evaporação
 - Evapotranspiração
- Infiltração
- Escoamento superficial (*overland flow*)
- Escoamento subsuperficial
- Escoamento subterrâneo Os três elementos podem contribuir para a formação da *vazão* na seção exutória de uma bacia hidrográfica.

As quantidades de água nas diversas regiões do planeta estão mostradas na tabela 1.1

1.2 Estimativas de P , Q e E

Algumas vezes, P , E e Q são denominados *fases* do ciclo hidrológico.

Considere o balanço hídrico de uma bacia hidrográfica,

$$\frac{dS}{dt} = P - E - Q,$$

e integre:

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{dS}{dt} dt = \int_{t_i}^{t_f} P dt - \int_{t_i}^{t_f} E dt - \int_{t_i}^{t_f} Q dt;$$

$$\langle P \rangle \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} P dt;$$

$$S_f - S_i = [\langle P \rangle - \langle E \rangle - \langle Q \rangle] \Delta t,$$

$$\frac{S_f - S_i}{\Delta t} = [\langle P \rangle - \langle E \rangle - \langle Q \rangle] \Delta t.$$

Agora, se Δt é muito grande, e se $S(t)$ é estacionário,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{S_f - S_i}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \langle P \rangle = \langle E \rangle + \langle Q \rangle.$$

Muitas vezes encontra-se isso escrito simplesmente como

$$P = E + Q.$$

Portanto, cuidado com a notação: o significado das variáveis vai depender do contexto, e você deve ser capaz de compreender esse significado justamente *pelo contexto*.

Além disso, existem várias *dimensões* possíveis para P , E , e Q . Em princípio, devemos ter

$$[[P]] = [[E]] = [[Q]] = \text{M L}^{-2} \text{T}^{-1}$$

(um fluxo de massa por unidade de área em um ponto específico da bacia hidrográfica) ou

$$[[P]] = [[E]] = [[Q]] = \text{M T}^{-1}$$

(um fluxo de massa sobre toda a superfície horizontal da bacia).

Por exemplo, no SI suponha P inicialmente em kg s^{-1} (indicando um fluxo de massa sobre toda a área da bacia). Se ρ é a densidade da água e se a supusermos constante,

$$\frac{\text{kg s}^{-1}}{\text{kg m}^{-3}} \Rightarrow P \text{ em } \text{m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Se dividirmos agora pela área superficial sobre a qual o fluxo ocorre,

$$\frac{\text{m}^3 \text{ s}^{-1}}{\text{m}^2} \Rightarrow P \text{ em } \text{m s}^{-1}.$$

Alternativamente, encontra-se P em mm dia^{-1} , mm mês^{-1} , mm ano^{-1} .

Algumas vezes, reporta-se a integral

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{P(t)}{\rho A} dt$$

em m ou em mm.

Em resumo, as dimensões e as unidades e o *significado* dos símbolos dependem do *contexto*, e você deve estar atento a elas.

Finalmente, P , E e Q são fluxos entre “compartimentos” (volumes de controle). Por exemplo, P e E são fluxos entre a atmosfera e as superfícies continentais, Q é um fluxo através de uma seção de rio, etc..

Para entender a relação entre os fluxos e o armazenamento entre e em diversos compartimentos, é preciso ter uma sólida base em Mecânica dos Fluidos e em Matemática (Análise, Métodos Numéricos, Estatística, ...).

Em resumo, a Hidrologia é uma ciência multidisciplinar e que engloba desde aspectos muito teóricos até outros muito aplicados.

Tempo de residência Considere um balanço de massa simples e em seguida regime permanente:

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt} &= F_i - F_o, \\ \frac{dM}{dt} &= 0 \Rightarrow F_i = F_o = F.\end{aligned}$$

O tempo de residência do compartimento cuja massa é M é

$$T_r = \frac{M}{F}.$$

Quais são as dimensões de F ?

1.3 O conceito de sistemas — ou escalas!

Classificação de modelos O problema de “classificar” um modelo é enorme, porque em geral a classificação “não fecha”, e um mesmo modelo acaba recebendo duas ou mais classificações. De todo modo, as categorias mais comuns são:

- Modelos físicos \times empíricos.
- Modelos concentrados \times distribuídos.
- Modelos determinísticos \times estocásticos.

Algumas vezes é fácil “classificar” um modelo, e outras não. Considere

$$Q = ciA \quad \text{ou} \quad Q = cP,$$

que é a “fórmula racional”. Ela é racional porque Q e iA , ou Q e P , têm as mesmas dimensões físicas (i , em mm h^{-1} ou mm dia^{-1} é a intensidade de precipitação. A distinção entre i e P é cinzenta. Historicamente, P era reservado para “altura acumulada de chuva”, em mm).

A fórmula racional é “empírica”, e c tem que ser descoberto, adivinhado, ou calibrado, para cada bacia. Por outro lado, a Equação de Saint-Venant,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = S_0 - S_f,$$

é um model “físico” porque se baseia no princípio de conservação de quantidade de movimento. Ainda assim, S_f depende de uma relação empírica ou semi-empírica (em geral, a fórmula de Manning).

Modelos concentrados em geral fazem um balanço sobre todo um volume de controle. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= I(t) - O(t), \\ O(t) &= aS^b, \\ \frac{dS}{dt} + aS^b &= I(t).\end{aligned}$$

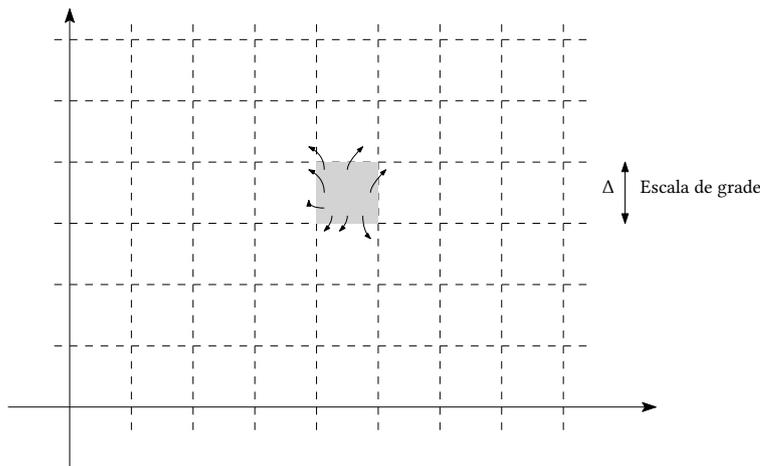
Classifique a equação diferencial acima.

Muitas vezes, o modelo concentrado é alimentado por uma equação empírica ou semi-empírica do tipo $O = aS^b$, etc..

Modelos distribuídos são muitas vezes implementados em grades 1D, 2D ou 3D. A *resolução* do modelo é o tamanho da grade.

Mesmo em um modelo distribuído com base fortemente física, entretanto, o que acontece em escalas abaixo da escala da grade [digamos, Δx] precisa ainda ser *parametrizado*. A parametrização:

- Em geral depende da escala da grade Δx .
- Envolve algum nível de empirismo.



Por exemplo, a equação constitutiva para um fluido Newtoniano,

$$\begin{aligned}T_{ij} &= -P\delta_{ij} + \lambda s_{kk}\delta_{ij} + 2\mu s_{ij}, \\ s_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),\end{aligned}$$

expressa as tensões T_{ij} em um *continuum* em termos da pressão termodinâmica p , da taxa de deformação s , e de dois coeficientes de viscosidade, μ e λ , que parametrizam o efeito das interações moleculares na escala do contínuo (a microescala de Kolmogorov).

Um modelo estocástico abre mão da física e de parametrizações físicas para estimar probabilidades de ocorrência. Um exemplo extremo é o modelo de Gumbel para a vazão x_T com período de retorno T :

$$\begin{aligned}y_T &= -\ln \left[\ln \left(\frac{T}{T-1} \right) \right], \\ x_T &= u + \alpha y_T,\end{aligned}$$

onde u e α são os parâmetros da distribuição Gumbel.

O argumento altamente sensato de Brutsaert (1986, 1998) é que faz mais sentido identificar as escalas que estão sendo resolvidas explicitamente e aquelas cujo resultado agregado precisa ser parametrizado. A partir daí, nós procuramos identificar quais são as parametrizações de subgrade necessárias (ou explicitar sua utilização).

1.4 História

Chow et al. (1988) fazem um bom resumo do desenvolvimento histórico da hidrologia. O conceito de ciclo hidrológico começou a ser compreendido qualitativamente já na antiguidade. No entanto, somente na Idade Moderna *medições* começaram o difícil processo de quantificar seus componentes e demonstrar experimentalmente a sua validade.

Outro ponto importante é que a Mecânica dos Fluidos só começou a produzir resultados úteis em Engenharia a partir de meados do século XIX (Darrigol, 2005). Com isso, a Hidrologia tem se desenvolvido a reboque dos avanços científicos em Mecânica dos Fluidos.

Até hoje, Hidráulica e Hidrologia carregam a tradição em empirismo (na acepção de tentativas não-informadas, ou mal-informadas, pela ciência) e soluções *ad-hoc* e só lentamente têm evoluído na direção de soluções de Engenharia com fundamentos racionais nas ciências exatas e da natureza.

Capítulo 2

As leis de conservação e as bases de Mecânica dos Fluidos da Hidrologia

2.1 O Teorema do Transporte de Reynolds

Propriedades extensivas \Rightarrow valem para um corpo como um todo (*in bulk*).

Propriedades intensivas \Rightarrow valem cada ponto do contínuo.

Elas vêm aos pares, sendo definidas por

$$N = \int_{\mathcal{C}} \eta \rho \, dV,$$

onde

N É a propriedade extensiva, válida para o corpo que ocupa a região \mathcal{C} (às vezes diremos: para o corpo \mathcal{C} , ou para a região material \mathcal{C}).

ρ É a massa específica ou densidade do fluido.

η É a propriedade intensiva (por unidade de massa) associada.

O Teorema do Transporte de Reynolds talvez seja mais importante do que sua dedução; portanto, vamos enunciá-lo primeiro:

$$\frac{DN}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} \eta \rho \, dV + \oint_{\mathcal{S}} \eta \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA.$$

A utilidade do Teorema do Transporte de Reynolds vem do fato de que:

a) $\frac{D}{Dt}$ é a derivada material.

b) $\frac{DN}{Dt}$ é a taxa de variação da grandeza N pertinente ao corpo \mathcal{C} .

Leis da física

Massa

$$\frac{DM}{Dt} = 0, \quad \eta = 1.$$

Momentum

$$\frac{DP}{Dt} = \mathbf{F}, \quad \eta = \mathbf{v}, \quad (2^{\text{a}} \text{ lei de Newton}).$$

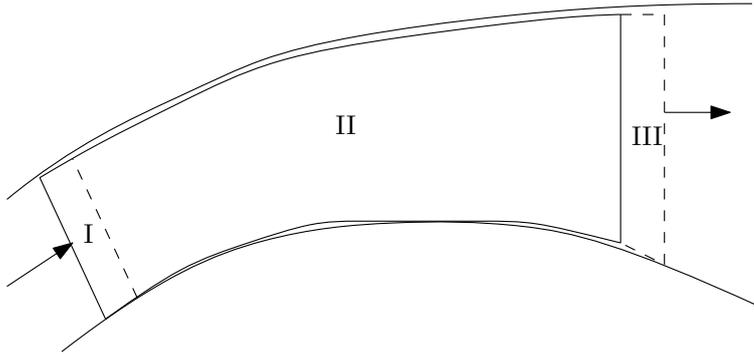
Energia

$$\frac{D(\mathcal{U} + \mathcal{E}_c)}{Dt} = \dot{W} + \dot{Q}, \quad \eta = \frac{v^2}{2} + u.$$

onde \mathcal{U} é a energia interna do corpo, e \mathcal{E}_c é a sua energia cinética.

Isso permite *matematizar* as leis de conservação para um meio contínuo.

Uma dedução muito básica do teorema é a seguinte:



$$\begin{aligned} \frac{DN}{Dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} \\ N(t) &= \int_{I+II} \eta \rho \, dV, \\ N(t + \Delta t) &= \int_{II+III} \eta \rho \, dV. \end{aligned}$$

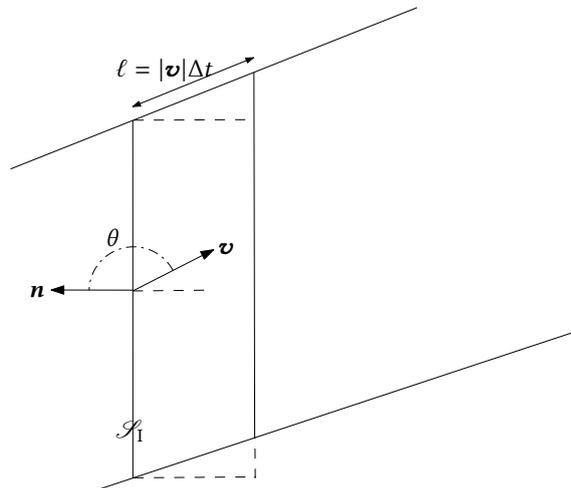
Portanto temos

$$\frac{DN}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[\int_{II} \eta \rho \, dV \right] (t + \Delta t) - \left[\int_{II} \eta \rho \, dV \right] (t) + \left[\int_{III} \eta \rho \, dV \right] (t + \Delta t) - \left[\int_{I} \eta \rho \, dV \right] (t) \right\}.$$

As integrais sobre $II(t + \Delta t)$ e $II(t)$ formam uma derivada parcial em relação ao tempo usual:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left[\int_{II} \eta \rho \, dV \right] (t + \Delta t) - \left[\int_{II} \eta \rho \, dV \right] (t)}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} \eta \rho \, dV.$$

Vamos olhar agora para a região I:



Em toda a fronteira de I com o exterior, $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) < 0$. Além disso, para Δt “pequeno”, $\ell = |\mathbf{v}|\Delta t$ é pequeno. O volume de I é aproximadamente dado por

$$V_I = - \int_{\mathcal{S}_I} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \Delta t \, dA \quad \Rightarrow$$

$$- \left[\int_I \eta \rho \, dV \right] (t) = \left[\int_{\mathcal{S}_I} \eta (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA \right] \Delta t,$$

e portanto

$$N_I = \left[\int_{\mathcal{S}_I} \eta (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA \right] \Delta t,$$

ou

$$- \left[\int_I \eta \rho \, dV \right] (t) = + \left[\int_{\mathcal{S}_I} \eta (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA \right] \Delta t.$$

Analogamente,

$$+ \left[\int_{\text{III}} \eta \rho \, dV \right] (t + \Delta t) = + \left[\int_{\mathcal{S}_{\text{III}}} \eta (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA \right] \Delta t.$$

Note que a superfície \mathcal{S} é formada por

\mathcal{S}_I onde $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) < 0$;

\mathcal{S}_{III} onde $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) > 0$;

\mathcal{S}_0 onde $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) = 0$.

Logo,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[\int_{\text{III}} \eta \rho \, dV \right] (t + \Delta t) - \left[\int_I \eta \rho \, dV \right] (t) \right\} = \oint_{\mathcal{S}} \eta \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA,$$

e isso conclui o Teorema do Transporte de Reynolds:

$$\frac{DN}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \eta \rho \, dV + \oint_{\mathcal{S}} \eta \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA. \blacksquare$$

2.2 A equação da continuidade

Para a massa M de um corpo,

$$\eta = 1,$$

$$\frac{DM}{Dt} = 0;$$

logo,

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \, dV + \oint_{\mathcal{S}} \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA,$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \, dV + \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{n} \cdot [\rho \mathbf{v}]) \, dA.$$

A equação da continuidade é a melhor forma de introduzir o Teorema da Divergência para a obtenção das equações diferenciais de Mecânica dos Fluidos:

$$\oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}) dA = \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{f}) dV,$$

onde

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z},$$

para o *campo vetorial* $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$. Logo

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho dV + \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] dV;$$

$$0 = \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] \right] dV.$$

A equação acima tem que ser válida para uma região material \mathcal{C} *arbitrária*; logo,

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}]$$

2.3 As equações de Mecânica dos Fluidos

Nas microescalas de Kolmogorov

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] = 0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = D \nabla^2 c$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{g} + \nabla (-p + (\lambda + \mu)(\nabla \cdot \mathbf{v})) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u \right) = \rho c_p \alpha \nabla^2 T - p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \underbrace{\Phi}_{\text{Dissip visc}}$$

As equações promediadas de Reynolds

(Para uma densidade ρ_0 de referência, e escoamento solenoidal ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$))

Médias “de conjunto” (ou sobre um grande número de realizações k do escoamento):

$$\bar{a} \equiv \sum_{k=1}^N a(k).$$

Essa ideia vai voltar muitas vezes neste curso, quando nós discutirmos métodos estatísticos e Hidrologia Estocástica.

A decomposição de Reynolds:

$$a(\mathbf{x}, t; k) = \bar{a}(\mathbf{x}, t) + a'(\mathbf{x}, t; k).$$

As médias de Reynolds são determinísticas; as flutuações são (modeladas como) aleatórias.

As equações promediadas de Reynolds (RANS: *Reynolds-averaged Navier-Stokes equations*):

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{c} + \underbrace{\nabla \cdot [\overline{\mathbf{v}'c'}]}_{\text{Vet Reynolds}} &= D\nabla^2 \bar{c}, \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} + \underbrace{\nabla \cdot [\overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}]}_{\text{Tensor Reynolds}} &= \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla \bar{p} + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}}\end{aligned}$$

Para a temperatura, o termo $\rho(\nabla \cdot \mathbf{v})$ em geral não pode ser desprezado!!! Em muitos casos, usamos (com muitas aproximações) uma equação análoga à de difusão-advecção:

$$\rho_0 c_p \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{T} + \nabla \cdot [\overline{\mathbf{v}'T'}] \right) \approx \rho c_p \alpha \nabla^2 \bar{T} + \bar{\Phi}$$

A maioria (mas não todos) dos escoamentos de nosso interesse em Hidrologia são turbulentos. Uma exceção são alguns escoamentos no solo. Uma característica importante das equações “de ordem 1” de Reynolds, que listamos acima, é que os termos difusivos e de dissipação são pequenos em relação aos demais em cada equação, respectivamente:

$$D\nabla^2 \bar{c}, \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}}, \rho c_p \alpha \nabla^2 \bar{T}, \bar{\Phi}.$$

Por exemplo,

$$D\nabla^2 \bar{c} \ll \nabla \cdot [\overline{\mathbf{v}'c'}].$$

Isso *não significa* que os efeitos moleculares podem ser simplesmente esquecidos, porque eles se revelam importantes nas equações de Reynolds *de ordem 2*. A equação para a energia cinética da turbulência (ECT, ou TKE em Inglês) foi obtida originalmente pelo próprio Reynolds ([Reynolds, 1895](#)):

$$\begin{aligned}\bar{e} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \overline{v'_i v'_i}; \\ \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \bar{v}_j \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_j} &= \underbrace{-\frac{g}{\rho_0} \overline{v'_3 \rho'}}_B - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \overline{v'_i v'_j}}_P \\ &\quad - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho_0} \overline{v'_j \rho'} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \overline{v'_i v'_i v'_j} - 2\nu \sum_{i=1}^3 \overline{u'_i s'_{ij}} \right) - \underbrace{2\nu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \overline{s'_{ij} s'_{ij}}}_{\epsilon \equiv \Phi / \rho_0}.\end{aligned}$$

Em condições de “equilíbrio”,

$$\frac{D\bar{e}}{Dt} \approx 0 \approx P + B - \epsilon.$$

A “difusividade turbulenta” é uma analogia ruim:

$$q_z = -\rho c_p \alpha \frac{\partial T}{\partial z};$$

$$\overline{w'T'} = -K_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}.$$

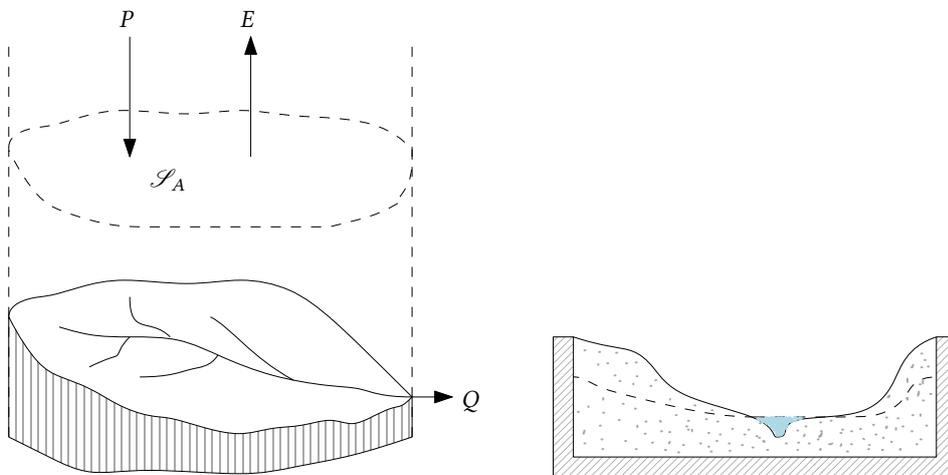
Aqui, $[[K_T]] = [[\alpha]] = L^2 T^{-1}$. Ao contrário da *difusividade molecular* para o calor, α , a *difusividade turbulenta* K_T depende do escoamento. Modelos universais para a previsão de difusividades turbulentas são muito mais a exceção do que a regra. Não há consenso de que essa abordagem um dia possa “resolver” o problema da turbulência (mesmo indo para ordens superiores a 2); na verdade, provavelmente a maioria dos pesquisadores hoje em dia pensa que isso não é possível.

No entanto, na falta de coisa melhor, a abordagem é muitas vezes útil em Engenharia, e nós a encontraremos (ou variações sobre o tema) muitas vezes neste curso.

2.4 Aplicações em Hidrologia

O balanço hídrico de uma bacia hidrográfica

Faça \mathcal{C} = bacia hidrográfica até a camada impermeável e até os divisores de água, e um pouco acima da superfície da bacia.



Nossa hipótese será de que só existe fluxo de massa:

- através da superfície superior,
- na seção exutória da bacia.

Note que isso nem sempre será verdade!

O fluxo de água líquida através da superfície superior é

$$\dot{M}_P = \int_{\mathcal{S}_A} \rho_w (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA = \rho_w \int_{\mathcal{S}_A} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA < 0.$$

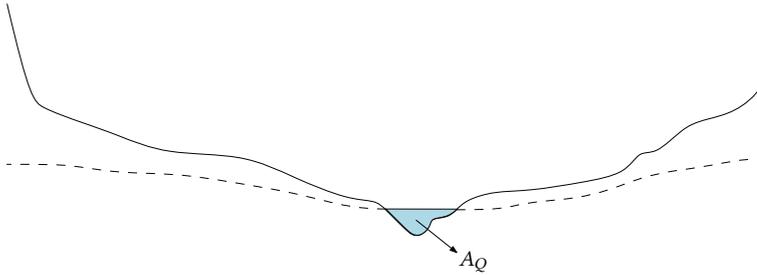
As unidades de \dot{M}_P são

$$\{\dot{M}_P\} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = \text{kg s}^{-1}.$$

Nesta seção vamos definir tudo em termos de *fluxos específicos* (por unidade de área horizontal):

$$\begin{aligned}\dot{M}_P &= \int_{\mathcal{S}_A} \rho_w(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA \equiv -PA < 0, \\ \dot{M}_E &= \int_{\mathcal{S}_A} \rho_v(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA \equiv EA > 0, \\ \dot{M}_Q &= \int_{\mathcal{S}_Q} \rho_w(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA \equiv QA > 0.\end{aligned}$$

Estritamente falando, estamos desprezando a difusão molecular e “fazendo as contas” alguns metros acima da superfície da bacia hidrográfica sobre uma superfície horizontal plana \mathcal{S}_A cuja área é A . Acima, ρ_w é a massa específica da água líqüida. Na integral de \dot{M}_E , ρ_v é a massa específica do *vapor d’água*. Note também que a última integral acima é sobre a seção do rio \mathcal{S}_Q , cuja área A_Q é muito menor do que a área horizontal A da bacia. Mesmo assim, nós estamos definindo (*nesta seção*) Q como uma vazão mássica *específica*, por unidade de área horizontal da bacia.



Dentro de \mathcal{C} (\equiv bacia hidrográfica) a água é armazenada dentro de plantas e animais, na região vadosa (zona não-saturada do solo) e na região saturada do solo (água subterrânea). Nós vamos desprezar o armazenamento em plantas e animais.

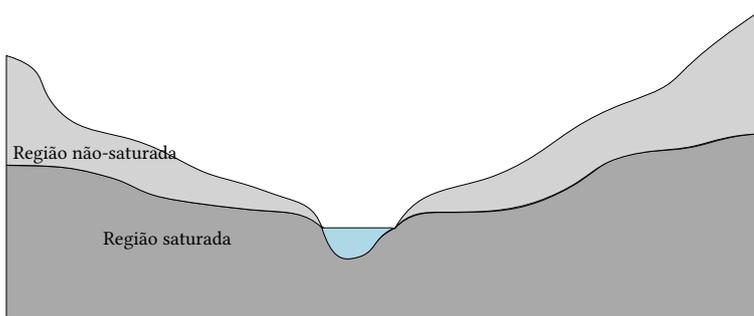
Até agora,

$$\oint_{\mathcal{S}} \rho(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA = [-P + E + Q] A,$$

restando o termo transiente

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} \rho \, dV$$

que contabiliza a água no solo.



Agora,

$$M = M_s + M_n = \int_{\mathcal{C}} \rho \, dV.$$

Defina

$$M \equiv SA,$$

$$M_s \equiv S_s A,$$

$$M_n \equiv S_n A;$$

então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} \rho \, dV &= \frac{\partial}{\partial t} [M_s + M_n] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [(S_s + S_n)A] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [AS] \\ &= A \frac{dS}{dt}. \end{aligned}$$

A equação de balanço é

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} \rho \, dV + \oint_{\mathcal{S}} \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA \\ 0 &= A \frac{dS}{dt} + A[-P + E + Q]; \\ \frac{dS}{dt} &= P - E - Q, \end{aligned}$$

como já vimos anteriormente. Lembre-se:

$$\begin{aligned} \{P\} &= \{E\} = \{Q\} = \text{kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}; \\ \{S\} &= \text{kg m}^{-2}. \end{aligned}$$

Na prática, quando chove $P \gg E$, e quando não chove $E \gg P$ (pelo menos enquanto a bacia não fica muito seca), mas a equação de balanço hídrico em geral envolve uma *média temporal*, de forma que *na média* ambos os termos são importantes. De fato, se P , E e Q são valores *instantâneos* para a bacia como um todo,

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= P - E - Q, \\ \int_t^{t+\Delta t} \frac{dS}{d\tau} \, d\tau &= \int_t^{t+\Delta t} [P - E - Q] \, d\tau. \end{aligned}$$

Defina

$$\langle P \rangle \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} P(\tau) d\tau \Rightarrow$$

$$\int_t^{t+\Delta t} P(\tau) d\tau = \langle P \rangle \Delta t,$$

$$\int_t^{t+\Delta t} E(\tau) d\tau = \langle E \rangle \Delta t,$$

$$\int_t^{t+\Delta t} Q(\tau) d\tau = \langle Q \rangle \Delta t,$$

de tal maneira que $\langle P \rangle$ significa a *média temporal* de P ao longo de Δt . Fazendo o mesmo para E e Q ,

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{dS}{d\tau} d\tau = [\langle P \rangle - \langle E \rangle - \langle Q \rangle] \Delta t.$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo,

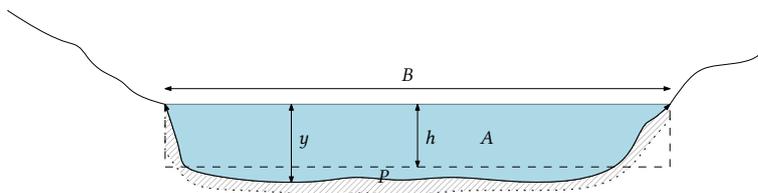
$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{dS}{d\tau} d\tau = \int_t^{t+\Delta t} dS = S(t + \Delta t) - S(t); \Rightarrow$$

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \langle P \rangle - \langle E \rangle - \langle Q \rangle.$$

Note que $\langle P \rangle$ e $\langle Q \rangle$ são medidos (estimados) com *razoável* facilidade e acurácia. Porém, a medição (estimação) de S_n , S_s e E é *muito* difícil.

2.5 Balanços de massa, quantidade de movimento e energia em um trecho de rio em escoamento uniforme e permanente

Algumas definições:



- B Largura
- A Área molhada
- P Perímetro molhado
- y Profundidade do escoamento
- h Profundidade média do escoamento
- R Raio hidráulico

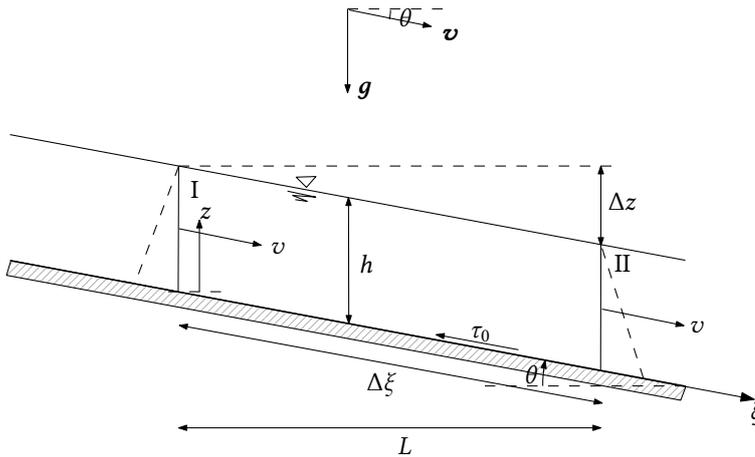
Temos:

$$h = \frac{A}{B},$$

$$R = \frac{A}{P}.$$

Muitas vezes $B \gg h$, e a seção é assimilada a um retângulo de dimensões $B \times h$.

Em escoamento uniforme, a linha d'água é paralela à linha do fundo.



A equação de balanço de massa agora resume-se a (para $\rho_w = \text{constante}$)

$$Q = v \cos \theta A$$

Atenção! Q mudou de significado, e agora é uma vazão volumétrica!

Parta do Teor. Transp. Reynolds e chegue em $Q = v \cos \theta A$

A equação de balanço de quantidade de movimento é

$$F_{c\xi} + F_{s\xi} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} v_{\xi} \rho \, dV + \oint_{\mathcal{S}} v_{\xi} \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA$$

O escoamento é permanente:

$$F_{s\xi} + F_{c\xi} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} v_{\xi} \rho \, dV + \oint_{\mathcal{S}} v_{\xi} \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA$$

O escoamento é uniforme e as velocidades são iguais nas seções de entrada e saída do trecho (o que muda?)

$$F_{c\xi} + F_{s\xi} = \oint_{\mathcal{S}} v_{\xi} \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA$$

$$(\rho g A L) \sin \theta - \tau_0 P \Delta \xi + \int_{\mathcal{S}_I} p \cos(\theta) \, dA - \int_{\mathcal{S}_{II}} p \cos(\theta) \, dA = 0,$$

$$(\rho g A L) \sin \theta - \tau_0 P \Delta \xi = 0,$$

Existe portanto um equilíbrio entre o peso e o atrito do fundo sobre a água no trecho.

$$\begin{aligned}
 L &= \Delta\xi \cos \theta; \\
 \theta \approx 0 &\Rightarrow \cos \theta \approx 1; \quad \text{sen } \theta \approx \text{tg } \theta; \\
 \rho g A \Delta\xi \cos \theta \text{ sen } \theta &= \tau_0 P \Delta\xi, \\
 \rho g A \Delta\xi \text{ tg } \theta &= \tau_0 P \Delta\xi, \\
 g \frac{A}{P} \text{ tg } \theta &= \frac{\tau_0}{\rho}
 \end{aligned}$$

$$\text{tg } \theta = S_0$$

$$\tau_0 = \rho g R S_0$$

$$\tau_0 / \rho \equiv v_*^2:$$

$$\begin{aligned}
 g R S_0 &= v_*^2 \\
 1 &= \frac{g R S_0}{v_*^2}, \\
 v^2 &= \left(\frac{v}{v_*} \right)^2 g R S_0 \\
 v &= \frac{v}{v_*} \sqrt{g R S_0}, \\
 v &= C \sqrt{g R S_0} \quad (\text{Equação de Chézy})
 \end{aligned}$$

Atenção para as simplificações! Isso foi obtido para uma velocidade v relativamente mal especificada (nós multiplicamos os dois lados da equação por v^2 !), e supostamente igual à velocidade média na seção.

Note que se a área da seção for medida na vertical, a afirmativa de [Chow et al. \(1988, p. 33\)](#),

The weight of fluid in the control volume is γAL (L é o nosso $\delta\xi$)

está estritamente errada, mas para ângulos pequenos, como vimos acima, o resultado final é na prática o mesmo.

A equação de balanço de energia é

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{W}} + \dot{Q} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} e \rho \, dV + \oint_{\mathcal{S}} e \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA, \\
 e &= u + \frac{v^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Passo a passo:

$$\dot{\mathcal{W}} = \int_{\mathcal{V}} \rho (\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) \, dV + \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}) \, dA;$$

Primeiramente, a integral de volume:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) dV &= \int_{\mathcal{V}} \rho g v \operatorname{sen} \theta dV \\ &= \rho g v \operatorname{sen} \theta \int_{\mathcal{V}} dV \\ &= \rho g v \operatorname{sen} \theta LBh.\end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \theta &\approx \operatorname{tg} \theta = S_0, \\ L \tan \theta &= \Delta z, \\ Bh &= A, \\ vA &= Q, \Rightarrow \\ \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) dV &= \rho g Q \Delta z.\end{aligned}$$

Em seguida, a integral de superfície:

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &\approx -p\mathbf{n} \Rightarrow \\ \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}) dA &= \oint_{\mathcal{S}} (-p\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA.\end{aligned}$$

Mas $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \neq 0$ apenas ao longo das superfícies I e II:

$$\oint_{\mathcal{S}} (-p\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA = \int_{\text{I}} (-p\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA + \int_{\text{II}} (-p\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA.$$

Ao longo da superfície I (fazendo $z = 0$ no fundo),

$$\begin{aligned}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) &= -v \cos \theta; \\ p(z) &= p_{\text{atm}} + \rho g(h - z).\end{aligned}$$

Ao longo da superfície II (fazendo $z = 0$ no fundo),

$$\begin{aligned}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) &= +v \cos \theta; \\ p(z) &= p_{\text{atm}} + \rho g(h - z).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{\text{I}} (-p\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA &= \int_{z=0}^h +v \cos \theta [p_{\text{atm}} + \rho g(h - z)] B dz \\ &= +v \cos \theta \left[p_{\text{atm}} B h + \frac{1}{2} \rho g B h^2 \right]; \\ \int_{\text{II}} (-p\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA &= \int_{z=0}^h -v \cos \theta [p_{\text{atm}} + \rho g(h - z)] B dz \\ &= -v \cos \theta \left[p_{\text{atm}} B h + \frac{1}{2} \rho g B h^2 \right].\end{aligned}$$

Logo,

$$\oint_{\mathcal{S}} (-p\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA = 0.$$

Juntando tudo até agora,

$$\dot{W} = \rho g Q \Delta z.$$

A equação de balanço de energia fica:

$$\rho g Q \Delta z + \dot{Q} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} e \rho dV + \oint_{\mathcal{S}} e \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA.$$

Suponha agora, por simplicidade, que as energias internas específicas são uniformes em cada uma das seções I e II. Temos

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{S}} e \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA &= \int_{\text{I}} \left(u_1 + \frac{v^2}{2} \right) \rho (-v \cos \theta) dA \\ &+ \int_{\text{II}} \left(u_2 + \frac{v^2}{2} \right) \rho (+v \cos \theta) dA \\ &= -\rho v \cos \theta \left(u_1 + \frac{v^2}{2} \right) Bh + \rho v \cos \theta \left(u_2 + \frac{v^2}{2} \right) Bh \\ &= \rho v \cos \theta Bh (u_2 - u_1) \\ &= \rho Q (u_2 - u_1). \end{aligned}$$

É importante explicar fisicamente que $\dot{Q} < 0$. Para explicitar isso, façamos

$$\rho g Q \Delta z - |\dot{Q}| = \rho Q (u_2 - u_1).$$

Mas a perda de carga é *por definição* a energia mecânica (em unidades de comprimento) convertida em interna e (também) exportada para fora de \mathcal{C} como fluxo de calor:

$$\rho g Q h_f \equiv |\dot{Q}| + \rho Q (u_2 - u_1)$$

Portanto,

$$h_f = \Delta z.$$

Em resumo, quando o escoamento é permanente, a variação do nível d'água é igual à perda de carga.

2.6 Métodos racionais para o cálculo da perda de carga

O perfil log

Um dos maiores desafios em Mecânica dos Fluidos foi o desenvolvimento de métodos *racionais* para o cálculo da perda de carga em escoamentos turbulentos. A história da Mecânica dos Fluidos vale um ou mais livros à parte: veja por exemplo [Darrigol \(2005\)](#). No caso de escoamentos laminares, relações entre velocidade média na seção e perda de carga podem ser obtidas diretamente a partir de soluções das equações de Navier-Stokes.

Por exemplo, para um escoamento sob pressão em um duto retangular de largura infinita e altura 2δ , o perfil de velocidade é parabólico, e dado por

$$u(z) = \frac{gS_f}{2\nu} z(2\delta - z),$$

onde g é a aceleração da gravidade, ν é a viscosidade cinemática, e $z = 0$ na parede inferior, e

$$S_f = -\frac{1}{\rho g} \frac{dp}{dx}$$

é a perda de carga unitária, calculada em função do gradiente de pressão na tubulação. A integração da equação acima entre $z = 0$ e $z = 2\delta$ produz a relação para a perda de carga:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2h} \int_{z=0}^{2h} u(z) dz \\ &= \frac{gS_f \delta^2}{3\nu}; \Rightarrow \\ &= \frac{\text{m s}^{-2} \text{m}^2}{\text{m}^2 \text{s}^{-1}} = \text{m s}^{-1} \\ q &= 2\delta v = \frac{2gS_f \delta^3}{3\nu}. \end{aligned}$$

A importância dessa equação é enorme: se quisermos projetar uma tubulação para a vazão q (por unidade de largura), podemos resolver a equação para S_f , e conseqüentemente calcular a pressão necessária na tubulação para produzir a vazão desejada.

Em escoamentos turbulentos, não é possível deduzir analiticamente uma equação para o perfil de velocidade na seção, mas uma série de argumentos relativamente sofisticados e parcialmente baseados nas equações de conservação leva ao perfil log de velocidade de vón Kármán ([Tennekes e Lumley, 1972](#); [Pope, 2000](#)):

$$u(z) = \frac{v_*}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right),$$

onde z_0 é a rugosidade para a quantidade de movimento, e $\kappa = 0.4$ é a constante de vón Kármán. Note que nós já encontramos a velocidade de atrito v_* antes; em um canal,

$$v_* = \sqrt{gRS_f},$$

onde S_f é a perda de carga. Em escoamento permanente e uniforme, nós sabemos que $S_f = h_f/L = S_0$, onde S_0 é a declividade do fundo.

Uma abordagem racional agora pode ser obtida, facilmente, para relacionar a vazão média no canal com a perda de carga. A velocidade média

na seção é

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{h} \int_{z=0}^h \frac{v_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) dz \\ v &\approx \frac{1}{h} \int_{z=z_0}^h \frac{v_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) dz \\ &= \frac{v_*}{\kappa} \left[\frac{z_0}{h} + \left(\ln\left(\frac{h}{z_0}\right) - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Essa equação já basta, mas para vermos as coisas com mais clareza, considere o seguinte: em uma seção retangular bem larga, o raio hidráulico é praticamente igual à altura do escoamento:

$$\begin{aligned} R &= \frac{A}{P} \\ &= \frac{Bh}{2h + B} \\ &= \frac{h}{2\frac{h}{B} + 1} \\ &\approx h, \quad h \ll B. \end{aligned}$$

Façamos agora

$$\begin{aligned} v_* &= \sqrt{ghS_f}, \\ v &= \frac{\sqrt{ghS_f}}{\kappa} \left[\frac{z_0}{h} + \left(\ln\left(\frac{h}{z_0}\right) - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

como $h \approx R$, isso pode ser escrito também em termos de R :

$$v = \frac{\sqrt{gRS_f}}{\kappa} \left[\frac{z_0}{R} + \left(\ln\left(\frac{R}{z_0}\right) - 1 \right) \right].$$

Incidentalmente, isso mostra que o coeficiente de Chézy não é constante, mas sim

$$C = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{z_0}{R} + \left(\ln\left(\frac{R}{z_0}\right) - 1 \right) \right].$$

Agora, dada a geometria da seção e a perda de carga unitária S_f (igual a S_0 para escoamento permanente e uniforme), podemos calcular a velocidade média, e vice-versa: dada uma certa geometria e uma velocidade média *desejada* (no caso de projeto de canais artificiais, ou de intervenções de Engenharia em canais naturais), podemos determinar a declividade S_0 necessária.

Note que a equação obtida é *dimensionalmente consistente*:

$$\begin{aligned} \llbracket v \rrbracket &= \text{LT}^{-1}, \\ \llbracket \sqrt{gRS_f} \rrbracket &= \llbracket [\text{LT}^{-2} \text{L} \text{1}]^{1/2} \rrbracket = \text{LT}^{-1}, \\ \llbracket \kappa \rrbracket &= 1, \\ \llbracket \frac{z_0}{R} \rrbracket &= 1. \end{aligned}$$

Além disso, a função log possui argumento adimensional, como dita o Teorema de Buckingham (Buckingham, 1914).

Observe que para que o cálculo seja realizado, é preciso conhecer a rugosidade z_0 do “fundo”. Além disso, se a incógnita do problema for R (ou h), ou S_f , a solução precisará ser numérica. Métodos para a obtenção de raízes de equações que não possuem solução algébrica são bem conhecidos (método da bissecção, método de Newton-Raphson, etc.) e podem ser facilmente implementados.

2.6.1 A fórmula de Manning

Por motivos históricos, as equações da sub-seção acima não são normalmente utilizadas para o cálculo de perdas de carga em canais e rios. Historicamente, o perfil log só surgiu no século XX, com os estudos de Ludwig Prandtl e Theodor von Kármán sobre camadas-limite turbulentas. Esses estudos foram em seguida sistematizados para o cálculo de perdas de carga em tubulações por Colebrook (1939) e Moody (1944).

Antes disso, entretanto, o engenheiro irlandês R. Manning propôs uma fórmula empírica para relacionar v e S_f em canais (Manning, 1891):

$$v = \frac{1}{n} R^{2/3} S_f^{1/2},$$

que em geral é denominada “Equação de Manning”. A fórmula entretanto já tinha sido obtida anteriormente por Gauckler (1867). Na fórmula acima, n é um coeficiente que deve ser obtido experimentalmente para canais com diversos tipos de revestimento. Por exemplo, Chow (1959) apresenta extensas tabelas para n em seu capítulo 5.

Um problema imediato com a equação de Gauckler-Manning é que ela aparenta ser dimensionalmente inconsistente. Do lado esquerdo,

$$[[v]] = \text{L T}^{-1},$$

enquanto que do lado direito,

$$[[R^{2/3}]] = \text{L}^{2/3}.$$

Para que a equação seja dimensionalmente consistente, é necessário que

$$[[n]] = \text{L}^{-1/3} \text{T},$$

mas o significado físico que deve ser atribuído a um n com tais dimensões físicas está longe de ser óbvio.

Provavelmente, o primeiro pesquisador que propôs uma abordagem racional, ou uma “dedução”, da equação de Manning, foi Keulegan (1938). O assunto continuou a atrair interesse, entretanto, como por exemplo no trabalho de Chen (1991), e mais recentemente de Gioia e Bombardelli (2002). Aqui, nós vamos seguir mais de perto a dedução (se é que esse é um bom termo) de Chen.

A dedução baseia-se em substituir (ou *aproximar*) o perfil log por um perfil potência,

$$\frac{u(z)}{v_*} = a \left(\frac{z}{z_0} \right)^m,$$

e em seguida calcular a velocidade média na seção:

$$\begin{aligned} v &= \frac{v_*}{h} \int_0^h u(z) dz \\ &= \frac{v_*}{h} \int_0^h a \left(\frac{z}{z_0} \right)^m dz \\ &= \frac{av_*}{m+1} \left(\frac{h}{z_0} \right)^m \end{aligned}$$

É importante observar que esse resultado pressupõe que a distribuição de velocidades é uniforme na direção *transversal*. Isso não é estritamente verdadeiro, e estamos fazendo uma simplificação apenas para captar a essência da relação da equação de Gauckler-Manning com o perfil log e a rugosidade z_0 do fundo do canal. Note que agora tudo ficou muito simples:

$$v_* = \sqrt{gRS_f},$$

e

$$h \approx R,$$

(para uma seção em que $B \gg h$), de forma que, substituindo h por R , obtemos

$$\begin{aligned} v &= \frac{a}{m+1} \left(\frac{R}{z_0} \right)^m [gRS_f]^{1/2} \\ &= \left[\frac{ag^{1/2}}{(m+1)z_0^m} \right] R^{m+1/2} S_f^{1/2}. \end{aligned}$$

Se nós compararmos essa equação com a equação de Gauckler-Manning, devemos ter $m = 1/6$, donde

$$v = \underbrace{\left[\frac{6ag^{1/2}}{7z_0^{1/6}} \right]}_{1/n} R^{2/3} S_f^{1/2}.$$

Note que o coeficiente de Manning agora pode ser expresso em termos de grandezas físicas e números adimensionais:

$$\frac{1}{n} = \frac{6ag^{1/2}}{7z_0^{1/6}},$$

de forma que

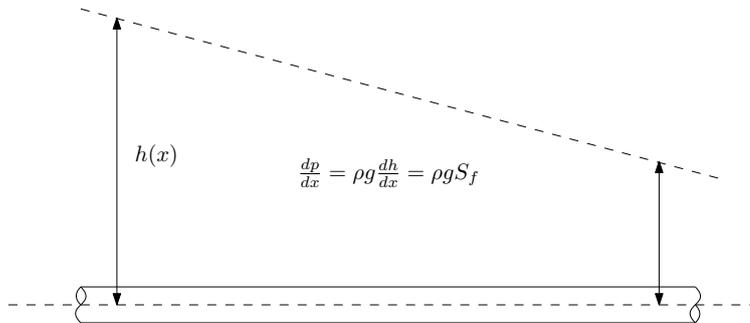
$$\begin{aligned} \llbracket n \rrbracket &= \left[(\text{L T}^{-2})^{1/2} \text{L}^{-1/6} \right]^{-1} \\ &= \left[\text{L}^{1/2-1/6} \text{T}^{-1} \right]^{-1} \\ &= \text{L}^{-1/3} \text{T}^1, \end{aligned}$$

o que concorda com as dimensões de n extraídas diretamente da equação de Gauckler-Manning.

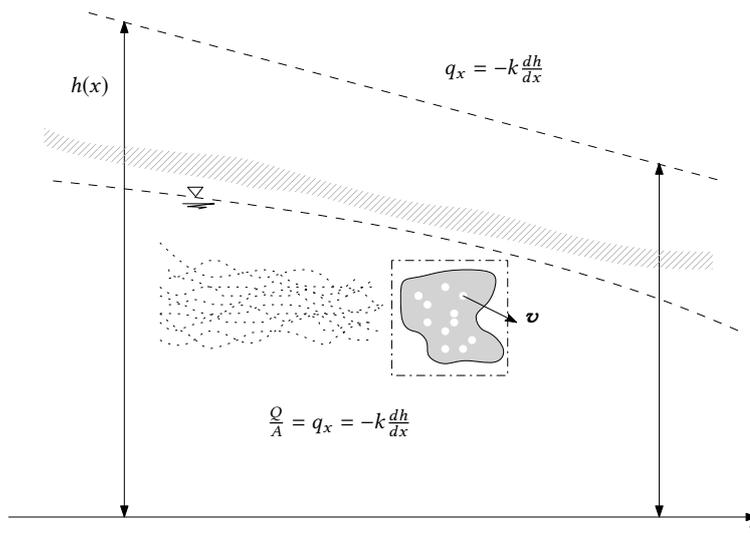
2.7 Escoamentos em meios porosos: lei de Darcy

Em um tubo circular horizontal em escoamento laminar, a velocidade é proporcional à perda de carga:

$$v = \left(\frac{gD^2}{32\nu} \right) S_f.$$



Uma relação semelhante existe para o escoamento através dos microcanais que existem na matriz do solo; ela é a lei de Darcy:



$$q_x = \frac{Q}{A} = -k \frac{dh}{dx},$$

onde

$$h(x) = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{q_x^2}{2g}$$

é a carga hidráulica total. O último termo acima em geral é considerado desprezível.

Nota: cuidado com a “termodinâmica” de [Chow et al. \(1988\)](#), porque ela não é muito boa: há muitas imprecisões. Por exemplo, a equação (2.7.5),

$$du = c_p dT$$

está errada!

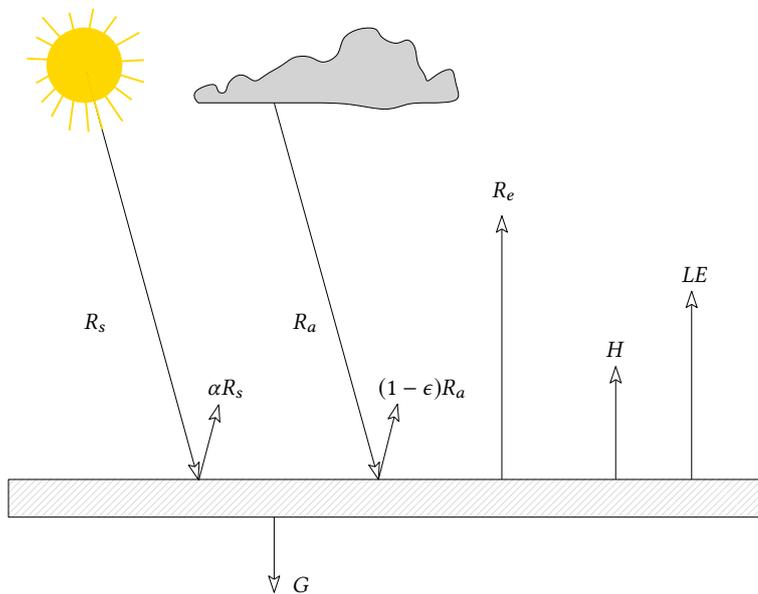
2.8 O balanço de radiação na superfície

A superfície da Terra recebe dois tipos de radiação:

Radiação de onda curta, na faixa $0.2\text{--}3.0\ \mu\text{m}$, emitida pelo sol, e transmitida através da atmosfera. Uma parte chega diretamente da direção aparente do sol (radiação solar direta) e outra chega após múltiplas reflexões (radiação solar difusa).

Radiação de onda longa, emitida pela própria atmosfera (gotas de água, vapor d'água, gases de efeito estufa, etc.) na faixa $3.0\text{--}100.0\ \mu\text{m}$.

O balanço de energia na superfície pode ser melhor entendido a partir da figura a seguir:



$$R_n = R_s(1 - \alpha) + \epsilon R_a - R_e,$$

$$R_e = \epsilon \sigma T_0^4,$$

$$R_n = H + LE + G.$$

Os significados dos símbolos acima são os seguintes:

- R_n Irradiância líquida (W m^{-2})
- R_s Irradiância solar incidente (W m^{-2})
- R_a Irradiância atmosférica incidente (W m^{-2})
- R_e Irradiância emitida (W m^{-2})
- H Fluxo de calor sensível (W m^{-2})
- LE Fluxo de calor latente (W m^{-2})

| | |
|------------|--|
| E | Fluxo de massa de vapor d'água ($\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$) |
| L | Calor latente de evaporação (ou vaporização) (J kg^{-1}) |
| G | Fluxo de calor no solo (W m^{-2}) |
| T_0 | Temperatura da superfície (K) |
| α | Albedo da superfície (1) |
| ϵ | Emissividade/absortividade da superfície (1) |
| σ | é a constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5.670374419 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$. |

Note que nas equações acima $\{E\} = \text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$; $\{L\} = \text{J kg}^{-1}$ e que portanto

$$\begin{aligned} \{LE\} &= \text{J kg}^{-1} \text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1} \\ &= \text{J m}^{-2} \text{s}^{-1} = \text{W m}^{-2}. \end{aligned}$$

2.9 Hidrologia computacional

Atualmente, muitos dos “métodos” desenvolvidos historicamente para hidrologia estão se tornando, ou se tornaram, obsoletos, com o advento de amplos recursos computacionais, com a expansão das redes de monitoramento, com o surgimento de sistemas de informação geográfica, e com o advento do grandes bases de dados de reanálise e de sensoriamento remoto.

Algumas bases globais são extremamente úteis, e devem ser citadas explicitamente:

| | |
|-------|---|
| SRTM | (Shuttle Radar Topography Mission) Veja https://www2.jpl.nasa.gov/srtm/ . Dados de topografia com resolução de 30 m, para todo o planeta. |
| MODIS | Um grande número de produtos de sensoriamento remoto (satélite) (Ver tabelas a seguir) |
| CSFV2 | (Dados de reanálise). Ver https://rda.ucar.edu/ . Dados em format NETCDF. |

Endereços de obtenção de produtos MODIS úteis para estimativas espacializadas de evaporação

| Variável | Endereço |
|-------------------|---|
| r_0 | https://modis.gsfc.nasa.gov/data/dataproduct/mod09.php |
| T_0, ϵ_0 | https://modis.gsfc.nasa.gov/data/dataproduct/mod11.php |
| NDVI | https://modis.gsfc.nasa.gov/data/dataproduct/mod13.php |
| E | https://modis.gsfc.nasa.gov/data/dataproduct/mod16.php |

Frequência e resolução de produtos disponíveis

| Variável | Frequência | Resolução espacial |
|----------------------|------------|--------------------|
| r_0 | 8 dias | 250 m |
| r_0 | 8 dias | 500 m |
| r_0 | 1 dia | 1 km |
| r_0 | 1 dia | 250 m |
| T_{0r}, ϵ_0 | 8 dias | 1 km |
| T_{0r}, ϵ_0 | 1 dia | 1 km |
| NDVI | 16 dias | 250 m |
| NDVI | 16 dias | 500 m |
| NDVI | 16 dias | 1 km |
| E | 8 dias | 500 m |

Nós precisamos, portanto, de capacidade para acessar as bases de dados, recuperar a informação relevante, entender e traduzir formatos, e realizar os processamentos necessários.

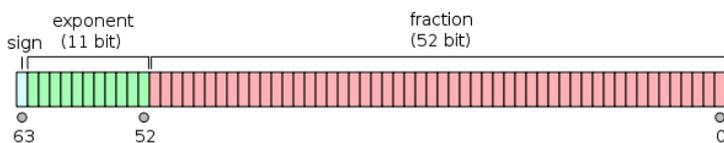
Nesta aula, nós vamos aprender alguns conceitos básicos que podem ser úteis para nós, embora a maior parte do processamento no curso vá ser feito com ferramentas e com formatos relativamente simples.

A escolha de uma linguagem de programação

No fundo, qualquer uma serve. Use a que você dominar melhor. Minha preferência pessoal, principalmente para um curso como o nosso, definitivamente é Python. Todos os meus exemplos neste curso serão em Python. Minha sugestão de instalação é miniconda: <https://docs.conda.io/en/latest/miniconda.html>.

Formatos binários, e formatos texto

Num formato binário, os dados são gravados como estavam na memória. Em geral isso significa que cada 8 bytes = 64 bits (tipicamente) codificam um número de ponto flutuante. Em computadores com processadores Intel, isso em geral significa o esquema abaixo:



A faixa de números que podem ser representados em 64 bits com essa organização é a seguinte:

$$\pm 2^{51} \times 2^{\pm 2^{10}}$$

A *mantissa* é um número inteiro de 52 bits. O *expoente* é outro número inteiro de 10 bits (mais um bit de sinal). O maior número representável em módulo dessa forma é

$$\pm 2^{51} \times 2^{1023} = \pm 2.024022533073106 \times 10^{323},$$

A saída é

```
['00', '0.0'] 0 0.0
['01', '0.1'] 1 0.1
['02', '0.2'] 2 0.2
['03', '0.3'] 3 0.3
['04', '0.4'] 4 0.4
['05', '0.5'] 5 0.5
['06', '0.6'] 6 0.6
['07', '0.7'] 7 0.7
['08', '0.8'] 8 0.8
['09', '0.9'] 9 0.9
```

Tendo feito uma rápida “introdução” a Python (veja também os capítulos sobre Python em meu livro, em: <https://nldias.github.io/pdf/matappa-2ed.pdf>), vamos agora fazer um problema do livro-texto.

(Ex. 2.3.2 de [Chow et al. \(1988\)](#))

The precipitation and streamflow for the storm of May 12, 1980, on Shoal Creek at Northwest Park in Austin, Texas, are shown below. Calculate the time distribution of storage on the watershed assuming that the initial storage is 0. Compute the total depth of precipitation and the equivalent depth of streamflow which occurred during the 8-hour period. How much storage remained in the watershed at the end of the period? What percent of the precipitation appeared as streamflow during this period? What was the maximum storage? Plot the time distribution of incremental precipitation, streamflow, change in storage, and cumulative storage. The watershed area is 7.03 mi².

| | | | | | | | | | |
|--------------------------------|-----|------|------|------|------|-----|-----|------|-----|
| Time (h) | 0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 | 3.5 | |
| Incremental Precipitation (in) | | 0.18 | 0.42 | 0.21 | 0.16 | | | | |
| Instantaneous Streamflow (cfs) | 25 | 27 | 38 | 109 | 310 | 655 | 949 | 1060 | |
| Time (h) | 4.0 | 4.5 | 5.0 | 5.5 | 6.0 | 6.5 | 7.0 | 7.5 | 8.0 |
| Instantaneous Streamflow (cfs) | 968 | 1030 | 826 | 655 | 466 | 321 | 227 | 175 | 160 |

Primeiro, nós preparamos um arquivo texto com os dados:

```
# Time (h) Precip (in) Streamflow (cfs)
0.0      0.00      25.0
0.5      0.18      27.0
1.0      0.42      38.0
1.5      0.21     109.0
2.0      0.16     310.0
2.5      0.00     655.0
3.0      0.00     949.0
3.5      0.00    1060.0
4.0      0.00     968.0
4.5      0.00    1030.0
5.0      0.00     826.0
5.5      0.00     655.0
6.0      0.00     466.0
6.5      0.00     321.0
7.0      0.00     227.0
7.5      0.00     175.0
8.0      0.00     160.0
```

Em seguida nós plotamos os dados com Gnuplot
Os dados de entrada são plotados por

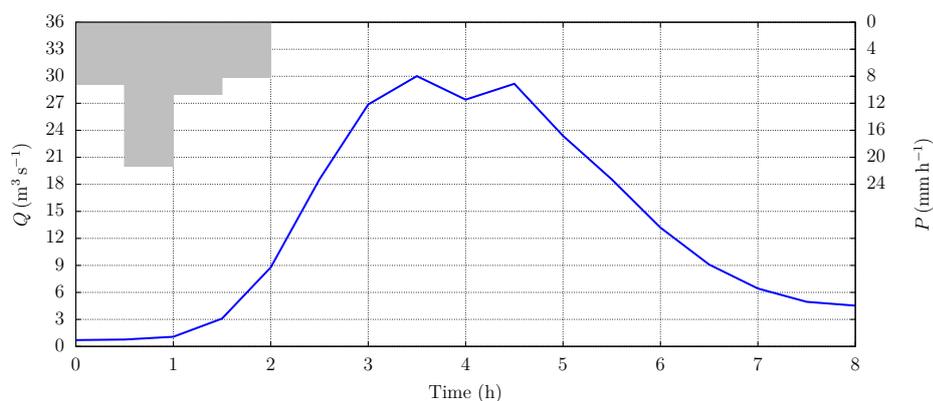
```
1 set encoding iso_8859_1
2 set terminal epslatex standalone color solid font 'lmr' 12 size 21cm, 9cm
3 set output 'shoaldata.tex'
4 set xrange [0:8]
```

```

5 set yrange [0:36]
6 set ytics 0,3
7 set y2range [48:0]
8 set xtics 0,1
9 set y2tics 0,4,24
10 set xlabel 'Time (h)'
11 set y2label '$P\,(\mathrm{mm}\,h^{-1})$'
12 set ylabel '$Q\,(\mathrm{m}^3\,s^{-1})$'
13 set boxwidth 1.0 relative
14 set grid
15 plot 'shoal.dat' using (column(1)-0.25):(column(2)*25.4*2) axes x1y2 \
16     notitle with boxes fs solid lc rgb 'gray75',\
17     'shoal.dat' using 1:(column(3)*0.3048**3) axes x1y1 \
18     notitle with lines lt 1 lw 5 lc rgb 'blue'

```

e o gráfico resultante é este aqui:



O programa de processamento de dados está aqui:

```

1 #!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
2 # -*- coding: iso-8859-1 -*-
3 fin = open('shoal.dat','rt') # abre um arquivo. wt == read/text
4 tt = [] # lista vazia de tempos
5 pp = [] # lista vazia de precipitações
6 qq = [] # lista vazia de vazões
7 for line in fin: # loop sobre as *linhas*
8     if line[0] == '#': # pula o cabeçalho
9         continue
10    pass
11    field = line.split() # separa os campos
12    inst = float(field[0]) # o instante
13    prec = float(field[1])*25.4 # precip em mm durante o intervalo
14    vaz = float(field[2])*0.3048**3 # vazão em m3/s no instante
15    tt.append(inst) # adiciona à lista de tempos
16    pp.append(prec) # adiciona à lista de precip
17    qq.append(vaz) # adiciona à lista de vazões
18 pass
19 fin.close() # fecha o arquivo de entrada
20 n = len(tt) # tamanho das listas
21 from numpy import array # as listas se tornam arrays
22 tt = array(tt)
23 pp = array(pp)
24 qq = array(qq)
25 # -----
26 # área da bacia, em m^2
27 # -----
28 Area = 7.03 * (1609.34)**2
29 print('Area = %8.2f km2' % (Area/1.0e6))
30 qe = (qq/Area)*1000*3600.0 # vazão específica, mm/h
31 print(pp)
32 print(qe)
33 # -----
34 # calculo o volume total precipitado
35 # -----
36 Vp = pp.sum()

```

```

37 print('Vp□=', Vp, 'mm')
38 # -----
39 # calculo o volume total escoado com a regra do trapézio
40 # -----
41 deltax = 0.5 # dados de 0.5 em 0.5 hora
42 Se = qe[0] + qe[n-1]
43 Si = 0.0
44 for k in range(1,n-1):
45     Si += qe[k]
46     Vq = Se + 2*Si
47     Vq *= deltax
48     Vq /= 2.0
49 print('Vq□=', Vq, 'mm')
50 # -----
51 # cálculo do volume armazenado na bacia em função do tempo
52 # -----
53 fou = open('shoal.out','wt')
54 Vp = 0.0
55 Vq = 0.0
56 Vs = 0.0
57 fou.write('%4.2f□%6.2f□%6.2f□%6.2f□%6.2f\n' % (0.0,0.0,0.0,0.0,0.0))
58 for k in range(1,n):
59     dp = pp[k]
60     dq = (qe[k-1]+qe[k])*deltah/2.0
61     Vp += dp
62     Vq += dq
63     deltas = dp - dq
64     Vs += deltas
65     fou.write('%4.2f□%6.2f□%6.2f□%6.2f□%6.2f\n' % (tt[k],Vp,Vq,Vs,deltas))
66 pass
67 fou.close()

```

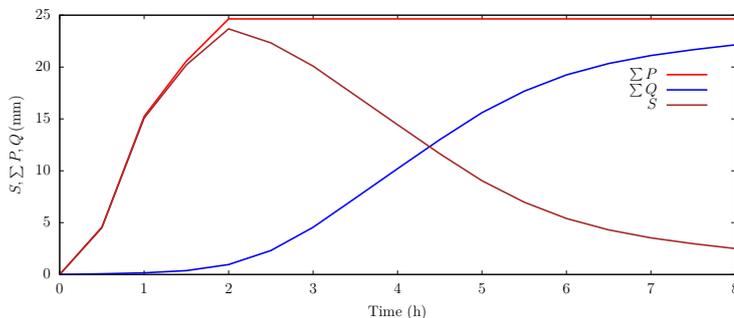
O *script* de Gnuplot para os totais acumulados na bacia é

```

1 set encoding iso_8859_1
2 set terminal epslatex standalone color solid font 'lmr' 12 size 21cm, 9cm
3 set output 'shoalacum.tex'
4 set xrange [0:8]
5 set xtics 0,1
6 set xlabel 'Time□(h)'
7 set ylabel '$S, \sum□P, Q, (\mathrm{mm})$'
8 set key at 6.75,20 left
9 plot 'shoal.out' using 1:2 title '$\sum□P$' with lines lt 1 lw 5 lc rgb 'red',\
10 'shoal.out' using 1:3 title '$\sum□Q$' with lines lt 1 lw 5 lc rgb 'blue',\
11 'shoal.out' using 1:4 title '$S$' with lines lt 1 lw 5 lc rgb 'brown'

```

e o gráfico resultante é



Capítulo 3

Água na atmosfera

3.1 O balanço radiativo da Terra e o efeito estufa

A lei de Stefan-Boltzmann é

$$R = \epsilon\sigma T^4,$$

onde R é a radiação *emitida* pelo corpo, e T é a sua temperatura. Para um “corpo negro”¹, a emissividade $\epsilon = 1$. Cada superfície real possui uma emissividade $\epsilon < 1$ diferente.

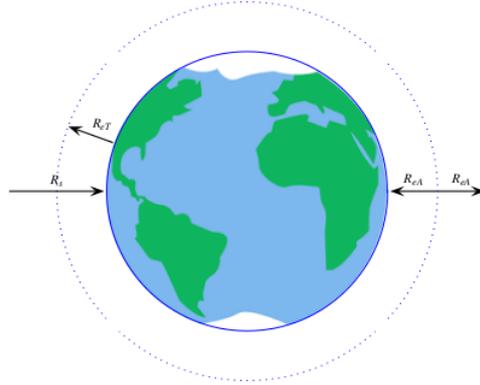
Nesta seção, vamos considerar o equilíbrio termodinâmico global planetário para dois cenários de atmosfera e cobertura de superfície do planeta. O conceito mais simples com o qual podemos trabalhar é o de *temperatura de equilíbrio* T_e : esta é a temperatura em que um planeta está em equilíbrio termodinâmico com a radiação solar incidente. Agora, se a é o albedo planetário ($a \approx 0,30$), em média a radiação solar absorvida pela terra é $R_{s0}(1 - a)\pi r_T^2$, onde $R_{s0} = 1361.5 \text{ W m}^{-2}$ é a *constante solar* (Wikipedia, 2020d), e r_T é o raio da terra. Por outro lado, o fluxo de energia radiante em ondas longas emitida pela Terra é em média (admitindo-se uma emissividade planetária igual a 1) $\sigma T_e^4 4\pi r_T^2$. Igualando-se os dois:

$$\begin{aligned} R_{s0}(1 - a)\pi r_T^2 &= \sigma T_e^4 4\pi r_T^2 \\ T_e &= \left[\frac{R_{s0}(1 - a)}{4\sigma} \right]^{1/4} \\ &= \left[\frac{1361.5 \times 0.7}{4 \times 5.670374419 \times 10^{-8}} \right]^{1/4} = 254,60 \text{ K} = -18,55^\circ \text{ C}. \end{aligned}$$

Essa temperatura T_e é a temperatura que o planeta teria *se não houvesse atmosfera*.

Nós agora vamos construir 2 modelos simples para o efeito estufa. No primeiro, vamos colocar uma “campânula” de vidro em volta da Terra, como mostra a figura a seguir, onde ela é indicada pelo círculo pontilhado.

¹Isso é um nome técnico, e não significa que o corpo precise ter coloração preta; na verdade, para as temperaturas observadas na atmosfera terrestre, a radiação é emitida em uma faixa de comprimentos de onda invisíveis para os seres humanos.



Nesta figura, a radiação solar atravessa a campânula e incide diretamente sobre a superfície da terra, a qual por sua vez emite radiação de onda longa R_{eT} . Por outro lado, a campânula (= atmosfera) absorve esta última, reemitindo um fluxo R_{eA} de radiação de onda longa tanto de volta à terra quanto em direção ao espaço. Desta forma, o balanço radiativo de ambos os corpos é

$$\begin{aligned} R_s + R_{eA} &= R_{eT}, \\ R_{eT} &= 2R_{eA}. \end{aligned}$$

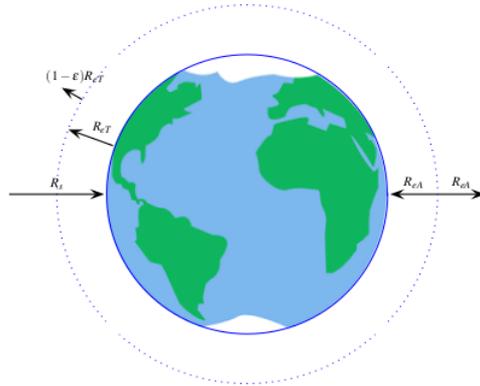
Usando-se as equações de radiação, tem-se:

$$\begin{aligned} R_{s0}(1-a)\pi r_T^2 + \sigma T_A^4 4\pi r_T^2 &= \sigma T_s^4 4\pi r_T^2, \\ \sigma T_s^4 4\pi r_T^2 &= 2\sigma T_A^4 4\pi r_T^2, \\ R_{s0}(1-a) + 4\sigma T_A^4 &= 4\sigma T_s^4, \\ \sigma T_s^4 &= 2\sigma T_A^4, \\ R_{s0}(1-a) + 4\sigma T_A^4 &= 8\sigma T_A^4, \\ R_{s0}(1-a) &= 4\sigma T_A^4 \Rightarrow T_A = T_e; \\ T_s &= 2^{1/4} T_A = 2^{1/4} \times 254.60 = 302.77 \text{ K}. \end{aligned}$$

Nota-se portanto que a temperatura da campânula, que representa a atmosfera², é a mesma temperatura de equilíbrio anterior, enquanto que a superfície ficou bem mais quente.

Este modelo pode ser sofisticado com a abertura de uma “janela” atmosférica, ou seja: com a utilização de uma emissividade atmosférica ϵ_a menor que 1. A figura a seguir ilustra este segundo modelo.

²Nestes caso simplificado, ela representa o *topo* da atmosfera, na “fronteira” com o espaço sideral; numa atmosfera real, obviamente, a atmosfera se torna progressivamente mais rarefeita na direção do espaço.



Agora, a atmosfera deixa escapar uma parcela $(1 - \epsilon_a)$ da radiação emitida pela superfície da Terra. Na construção do balanço termodinâmico, é conveniente usar T_e no lugar de R_{s0} :

$$\begin{aligned} 4\pi r_T^2 [T_e^4 + \epsilon_a \sigma T_A^2] &= \sigma T_s^4 \\ 4\pi r_T^2 [\epsilon_a \sigma T_s^4] &= 2\epsilon_a \sigma T_A^4. \end{aligned}$$

Usando-se agora $\epsilon_a = 0,9$, a solução do sistema acima é

$$\begin{aligned} T_s^4 &= \frac{2T_e^4}{2 - \epsilon_a} \Rightarrow T_s = 295,64K \\ T_A^4 &= \frac{T_e^4}{2 - \epsilon_a} \Rightarrow T_A = 248,60K \end{aligned}$$

Isso mostra claramente que a existência de “janelas” na atmosfera terrestre produz uma temperatura de superfície *menor*. A implicação disto é que se uma “janela” for fechada pela presença de um novo gás de efeito estufa que absorve radiação de onda longa nesta janela, a superfície ficará mais quente.

[Chow et al. \(1988\)](#) citam um valor médio de 210 W m^{-2} para a radiação solar atingindo a superfície da Terra. De onde vem esse número? Provavelmente ele é igual à incidência média de radiação solar dividida pela área da superfície da terra:

$$\frac{R_{s0}(1 - a)\pi r_T^2}{4\pi r_T^2} = \frac{R_{s0}(1 - a)}{4} = 238,26 \text{ W m}^{-2}.$$

(A diferença deve ser porque [Chow et al. \(1988\)](#) provavelmente usaram valores um pouco diferentes para R_{s0} e a .)

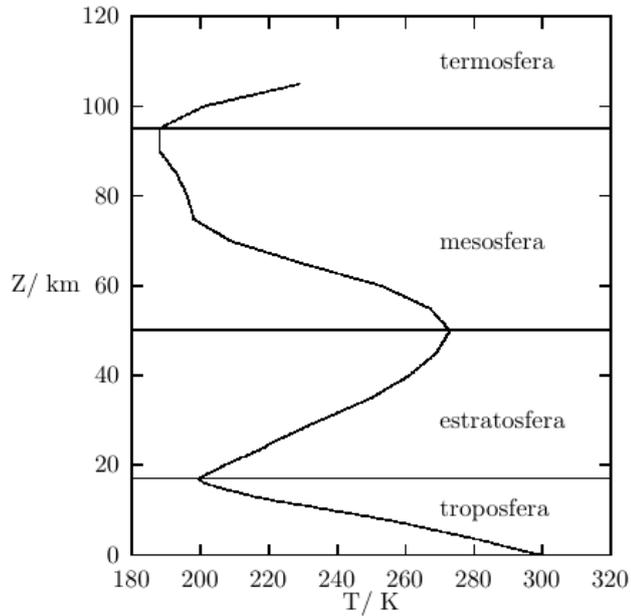
3.2 Circulação atmosférica

A circulação na atmosfera é forçada

1. pelo balanço radiativo do planeta;

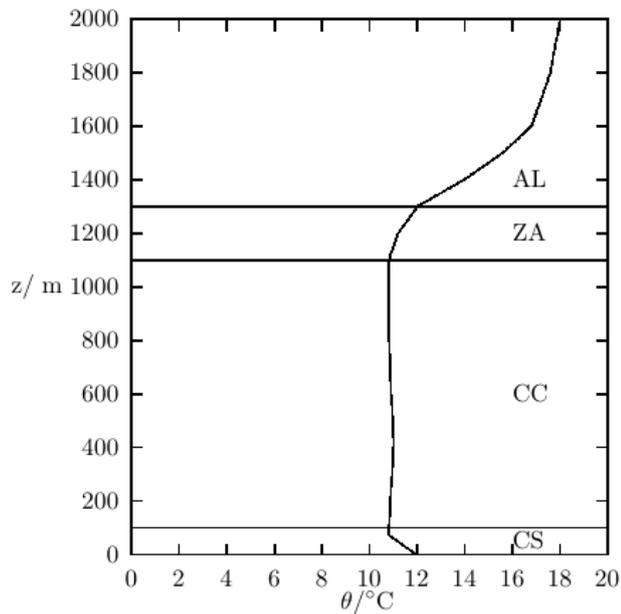
2. pela rotação da Terra;
3. pela trajetória da Terra no espaço.

As camadas da atmosfera:

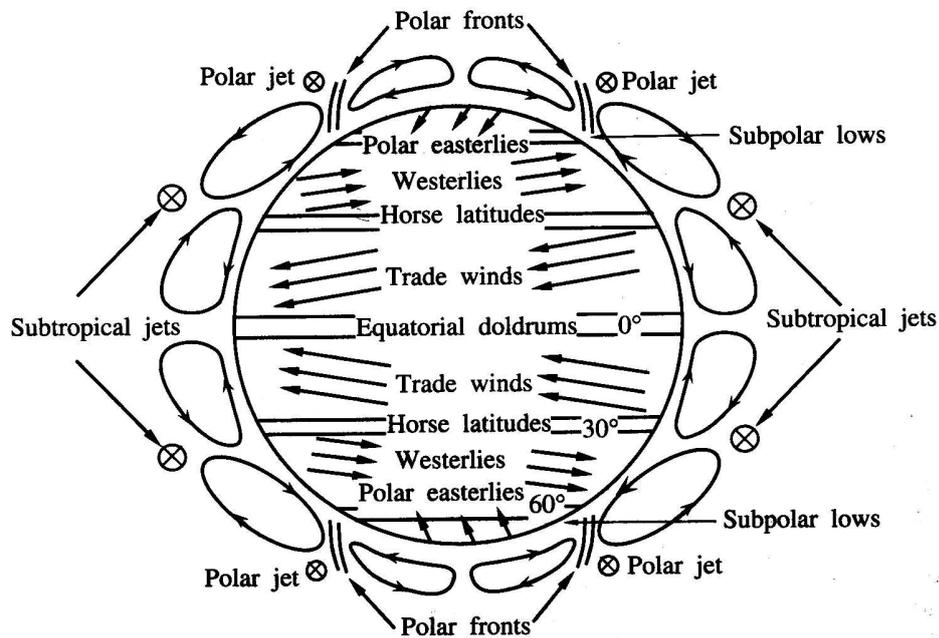


A troposfera é a camada mais densa, mais próxima da superfície, e onde ocorrem episódios significativos de convecção.

Apesar da diminuição de temperatura com a altitude, a troposfera é em sua maior parte *estável*. Uma pequena região, a camada-limite atmosférica, é instável ou neutra.



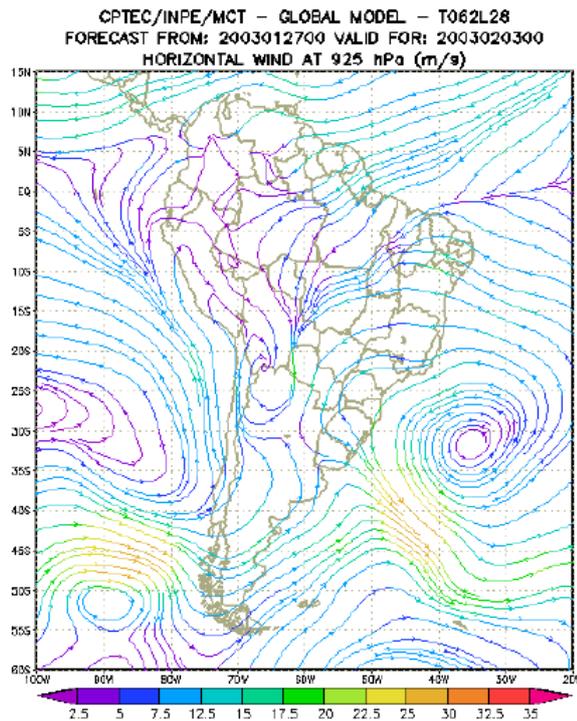
A combinação da existência de células de convecção e da rotação da terra produz os padrões globais de circulação vertical e horizontal.



Fonte: [Seinfeld e Pandis \(1998\)](#), Figura 1.2 (sem permissão, com objetivos estritamente didáticos)

As células verticais que vemos na figura acima são: a célula tropical, a célula de latitudes médias, e a célula polar. Massas de ar frio que se originam nas regiões polares movem-se em direção às zonas temperadas e tropicais, e seu encontro com massas de ar mais quente dão origem às frentes frias.

Em tempo bom, padrões persistentes de circulação se forma em torno de anti-ciclons extratropicais, como o anti-ciclone do Atlântico Sul:



3.3 A lei dos gases ideais e calores específicos para uma substância pura

A lei dos gases ideais se aplica bem para condições típicas da troposfera. Para uma *substância pura*, ela é dada por

$$pV = nR^{\#}T,$$

onde p é a pressão, V é o volume ocupado pelo gás, n é o número de moles, $R^{\#} = 8,314\ 462\ 618\ 15\ \text{J mol}^{-1}\ \text{K}^{-1}$ (no SI) é a constante universal dos gases e T é temperatura termodinâmica. Ainda para uma pura substância, ela também pode ser escrita como

$$p = n \frac{R^{\#}}{V} T = \frac{m}{M} \frac{R^{\#}}{V} T = \frac{m}{V} \frac{R^{\#}}{M} T \Rightarrow$$

$$p = \rho RT.$$

Acima, M é a massa molar; m é a massa do gás, o qual está relacionado com o número de moles por

$$m = nM;$$

a constante de gás é

$$R = \frac{R^{\#}}{M},$$

a qual depende do gás específico via M ; e

$$\rho = \frac{m}{V}$$

é a densidade; seu inverso,

$$v = \frac{1}{\rho} \quad (3.1)$$

é o *volume específico* v . Note que $p = \rho RT$ é mais útil do que $pV = nRT$ na prática: V não aparece na primeira, e ela só envolve quantidades intensivas (pressão, densidade e temperatura), de modo que se aplica a todos os pontos na atmosfera.

A lei dos gases é um caso específico de *equação de estado* em Termodinâmica; a equação de estado para uma substância pura toma uma das formas

$$p = p(v, T) \quad \text{or} \quad v = v(p, T) \quad \text{or} \quad T = T(p, v).$$

No caso dos gases atmosféricos, as letras minúsculas indicam quantidades específicas (por unidade de massa ou unidade de volume), e são mais convenientes já que nós não costumamos tratar individualmente “sistemas” ou “parcelas” de ar.

Dois funções termodinâmicas importantes são a energia interna específica u e a entalpia específica h definida por

$$h = u + pv.$$

Para uma substância pura, u e h são funções de duas variáveis, escolhidas entre p , v e T . Nós geralmente escrevemos

$$\begin{aligned} u &= u(v, T), \\ h &= h(p, T), \end{aligned}$$

uma vez que estes pares levam a definições úteis de quantidades mensuráveis, tais como calores específicos. As equações acima levam a diferenciais perfeitos

$$\begin{aligned} du &= \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv + \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT, \\ dh &= \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT. \end{aligned}$$

Os calores específicos a volume constante e pressão constante são definidos por

$$\begin{aligned} c_v &= \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v, \\ c_p &= \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p. \end{aligned}$$

Os subscritos v e p no lado direito das equações acima são usados em termodinâmica como lembretes de que u está sendo tomada em função da v, T , e que h está sendo tomada como uma função de p, T .

Para um gás perfeito, a equação de estado toma a forma

$$pv = RT,$$

onde R é uma constante de gás específica para a substância pura e é possível mostrar que, neste caso u e h são funções de T somente (Adkins, 1983). Então, as derivadas parciais que definem c_v e c_p se tornam derivadas ordinárias. Além disso,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p &= \left(\frac{\partial}{\partial T} [u + pv]\right)_p \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p + p \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \\ &= \frac{du}{dT} + p \frac{R}{p} \Rightarrow \\ c_p &= c_v + R. \end{aligned}$$

Fisicamente, $c_p > c_v$ devido à energia extra necessária para a expansão da o ar contra a pressão constante p .

3.4 A atmosfera como uma mistura de gases ideais

A atmosfera no entanto não é uma substância pura, mas uma mistura de gases. A questão então é como $pV = nR^{\#}T$ pode ser razoavelmente generalizado para uma mistura de gases. Na verdade, a partir de agora, muitas vezes quando nós usarmos $p = \rho RT$, etc, estaremos nos referindo à pressão atmosférica total p (de uma mistura de gases), à densidade total ρ da atmosfera, etc ..

Portanto, vamos começar, exigindo que $pV = nRT$ valha para a mistura; em seguida, o número total de moles, n , é a soma de o número de moles de cada componente individual. Seja i o índice para cada um dos gases em uma mistura; temos

$$n = \sum_i n_i,$$

onde n_i é o número de moles do gás i .

Queremos que a lei dos gases perfeitos seja aplicável também para cada constituinte. Existem duas possibilidades para fazermos isso: o modelo de pressões parciais, e o modelo de volumes parciais. No primeiro caso, especificamos para cada gás

$$p_i V = n_i R^{\#} T.$$

Neste modelo de todos os gases ocupam um volume comum V , cada um exercendo a sua própria pressão parcial p_i , de tal modo que a pressão total é

$$p = \sum_i p_i.$$

No segundo caso,

$$p V_i = n_i R^{\#} T,$$

e agora todos os gases são sujeitos à mesma pressão p , cada um ocupando, nominalmente, um volume parcial V_i , com

$$V = \sum_i V_i.$$

Em ambos os casos, somando as equações de estado individuais recupera-se a lei dos gases perfeitos para a mistura. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\sum_i (p_i V) &= \sum_i (n_i R^\# T), \\ \left(\sum_i p_i\right) V &= \left(\sum_i n_i\right) R^\# T, \\ pV &= nR^\# T.\end{aligned}$$

Os modelos de volumes parciais e pressões parciais levam a

$$x_i = \frac{p_i}{p} = \frac{V_i}{V} = \frac{n_i}{n}$$

que define uma concentração (expressa em tradicionalmente %, partes por milhão (ppm), partes por bilião (ppb), etc.) quer em fração de pressão parcial, fração de volume parcial, ou *fração molar*. A lei de gás para cada constituinte também pode ser escrita

$$\begin{aligned}p_i &= n_i \frac{R^\#}{V} T = \frac{m_i}{M_i} \frac{R^\#}{V} T = \frac{m_i}{V} \frac{R^\#}{M_i} T \Rightarrow \\ p_i &= \rho_i R_i T,\end{aligned}$$

onde (como antes para uma substância pura)

$$m_i = n_i M_i$$

e

$$\begin{aligned}\rho_i &= m_i/V, \\ v_i &= \frac{1}{\rho_i},\end{aligned}$$

são a densidade ou a massa específica (com massa m_i ocupando o volume V) e o volume específico, respectivamente, do gás i , e M_i é a massa molar do gás i .

$$R_i = \frac{R^\#}{M_i}$$

é a constante do gás i .

Note que ρ_i é ela mesma uma concentração, dada por massa da substância i por volume ($\text{kg}_i \text{ m}^{-3}$).

Mais uma vez, $p = \rho RT$ é válida para o mistura. Para ver como, note que a massa total da mistura é

$$m = \sum_i m_i;$$

e da mesma forma para a densidade total:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\sum_i m_i}{V} = \sum_i \frac{m_i}{V} = \sum_i \rho_i.$$

Também será necessário definir a *concentração mássica* ou *fração mássica* de cada constituinte,

$$c_i \equiv \frac{m_i}{m} = \frac{\rho_i}{\rho}.$$

Agora nós somamos as equações dos constituintes para obter

$$\begin{aligned} \sum_i p_i &= \sum_i \rho_i R_i T, \\ p &= \left(\sum_i \rho_i R_i \right) T \equiv \rho R T. \end{aligned}$$

Isso *define* a constante de gás R da mistura; agora, temos

$$\begin{aligned} R &= \frac{\sum_i \rho_i R_i}{\rho} \\ &= \frac{\sum_i \frac{m_i}{V} R_i}{\frac{m}{V}} \\ &= \sum_i \frac{m_i}{m} R_i = \sum_i c_i R_i. \end{aligned}$$

Portanto, dadas as concentrações mássicas, nós podemos calcular a constante de gás equivalente.

A massa molar média da mistura é

$$M = \sum_i x_i M_i = \frac{\sum_i n_i M_i}{n} = \frac{m}{n},$$

Isso finalmente permite fechar o circuito e recuperar a constante de gás para a mistura:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{m} \left(\sum_i m_i R_i \right) \\ &= \frac{1}{m} \left(\sum_i n_i M_i R_i \right) \\ &= \frac{1}{m} \left(\sum_i n_i R^\# \right) = \frac{1}{m} \left(\sum_i n_i \right) R^\# \\ &= \frac{n}{m} R^\# = \frac{R^\#}{M}. \end{aligned}$$

Concentrações

Uma relação entre x_i e c_i pode agora ser facilmente obtida:

$$x_i = \frac{n_i}{n} = \frac{\frac{m_i}{M_i}}{\frac{m}{M}} = \frac{m_i}{m} \frac{M}{M_i},$$

ou

$$x_i M_i = c_i M.$$

Outras medidas de concentração também estão em uso em meteorologia, e precisam ser definidas. A razão de mistura pode ser expressa quer como uma *razão de mistura molar*,

$$\eta_i = \frac{n_i}{n - n_i},$$

ou como uma *razão de mistura mássica*

$$r_i = \frac{m_i}{m - m_i}.$$

É simples converter frações mássicas c_i em razões (mássicas) de mistura r_i e vice-versa:

$$r_i = \frac{\rho_i}{\rho - \rho_i} = \frac{\frac{\rho_i}{\rho}}{1 - \frac{\rho_i}{\rho}};$$

$$r_i = \frac{c_i}{1 - c_i} \Rightarrow$$

$$c_i = \frac{r_i}{1 + r_i}.$$

A razão de mistura, por conseguinte, é a razão entre a quantidade (quer em moles ou em massa) da substância i e a quantidade de todas as *outras* substâncias. Segue-se que para qualquer substância *diferente* do vapor de água, o denominador inclui a quantidade de vapor d'água presente no ar no momento da medição. Por esta razão, *quando i não é vapor d'água*, η_i e r_i são chamadas de *razões de mistura úmidas*.

Nós listamos na tabela a seguir as fracções molares de vários gases atmosféricos em g m^{-3} em uma atmosfera *seca* (uma atmosfera fictícia sem vapor de água). Os valores de M_i foram obtidos a partir de [NIST \(2020\)](#). Os valores de x_i são de [Dias \(2020a\)](#), e eles são *aproximações*, com base em várias referências existentes ([Iribarne e Godson, 1981](#); [COESA, 1976](#); [Wallace e Hobbs, 2006](#); [Wikipedia, 2020a](#)); os valores de x_i , particularmente para CO_2 , são atualizados com os dados disponíveis mais recentes (a partir de 2020). Além disso, os valores foram ajustados manualmente para garantir que

$$\sum_i x_i = 1.$$

Constituição de uma atmosfera “seca” (não incluindo vapor d'água. Os valores são aproximados, e ajustados para assegurar que as fracções molares somem 1.

| Gas | M_i (g mol^{-1}) | x_i (mol mol^{-1}) |
|----------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| N_2 | 28.0134 | 0.78078700 |
| O_2 | 31.9988 | 0.20943200 |
| Ar | 39.948 | 0.00934000 |
| CO_2 | 44.0095 | 0.00041390 |
| Ne | 20.1797 | 0.00001818 |
| He | 4.002602 | 0.00000524 |
| CH_4 | 16.0425 | 0.00000170 |
| Kr | 83.798 | 0.00000110 |
| H_2 | 2.01588 | 0.00000055 |
| N_2O | 44.0128 | 0.00000033 |
| soma | | 1.00000000 |

Estamos agora em condições de calcular a constante do gás para *ar seco*, R_d , por meio de $M = \sum_i x_i M_i$ e $R = R^\# / M$, utilizando os valores da tabela acima, e obtendo

$$R_d = 287.0429 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Este valor é ligeiramente menor do que o que foi adotado para a atmosfera padrão de 1976 ($R_d = 287.0569$), que é compatível com a tabela I-4 de [Iribarne e Godson \(1981\)](#). Note entretanto que tem havido um aumento constante no CO_2 atmosférico desde a publicação da Atmosfera Padrão de 1976, e portanto, além de não ser muito diferente do de [COESA \(1976\)](#), o valor adotado aqui é provavelmente mais próximo do estado atual (2020) da atmosfera.

Ar úmido

Note que as equações de seção 3.3 não são estritamente válidas para o ar atmosférico, o que não é uma substância *pura*; ao contrário, é uma mistura de muitos gases. Cada nova constituinte faz com que as equações termodinâmicas fiquem mais complexas; em particular, funções de estado, tais como u e h tornam-se então também funções das concentrações de cada novo constituinte.

Nós não vamos seguir o caminho rigoroso de tratar a atmosfera como uma mistura de vários gases e de dar o tratamento termodinâmico completo para a mistura; em vez disso, vamos considerar “ar seco”, discutido acima e vamos introduzir diversos índices de umidade para a concentração de vapor d’água (que é o componente variável mais importante da atmosfera).

Considere então um certo volume V , composto inicialmente de ar seco com massa m_d , número total de moles n_d , pressão p_d , e densidade ρ_d , ao qual se adiciona vapor d’água com massa m_v e n_v moles. As equações desenvolvidas na seção 3.4 aplicam-se para o ar úmido. De acordo com o modelo de pressões parciais, cada componente gasoso exerce sua própria pressão parcial em função da temperatura T e do número de moles n_i . Se vapor d’água for adicionado isotermicamente, a pressão total após sua adição aumentará em um valor igual à *pressão parcial de vapor d’água* a qual é dada por

$$e = \frac{1}{V} n_v R^\# T.$$

Estritamente falando, deveríamos ter usado p_v em lugar de e acima, mas é padrão em Meteorologia denominar a pressão parcial de vapor e , e vamos seguir essa prática.

O conteúdo de vapor d’água no ar, entretanto, é altamente variável na atmosfera; além disso, em medições de fluxos turbulentos de escalares é frequentemente preferível utilizar concentrações medidas em uma atmosfera seca equivalente (veja, por exemplo, [Butenhoff e Khalil, 2002](#)). Portanto, nós revisitaremos diversas definições de concentração em relação aos componentes de uma atmosfera seca. Para a fração molar, nós agora temos a pressão do ar seco, a razão volumétrica e a razão molar

$$x_{di} = \frac{p_i}{p_d} = \frac{V_i}{V_d} = \frac{n_i}{n_d} \quad (i \neq v)$$

e a fração mássica (ou concentração mássica) de ar seco,

$$c_{di} = \frac{\rho_i}{\rho_d} \quad (i \neq v).$$

Acima, observe que após a adição de vapor d'água, o volume dos constituintes do ar seco será $V_d < V$. Também podemos considerar as razões de mistura *secas*

$$\eta_{di} = \frac{n_i}{n_d - n_i}, \quad (i \neq v)$$

e

$$r_{di} = \frac{m_i}{m_d - m_i} \quad (i \neq v).$$

Desde que as concentrações relativas dos componentes do ar seco permaneçam as mesmas, os cálculos anteriores das propriedades do ar seco M_d e R_d (a massa molecular média e a constante de gás do ar seco, respectivamente) também permanecem inalteradas. Verifiquemos:

$$p = p_d + e,$$

onde p_d é dado por

$$p_d = \sum_{i \neq v} p_i = \sum_{i \neq v} \rho_i R_i T \equiv \rho_d R_d T.$$

Como antes, a equação acima define R_d . Portanto, o valor da constante de gás de ar seco em uma atmosfera úmida é

$$R_d = \frac{\sum_{i \neq v} \rho_i R_i}{\rho_d} = \sum_{i \neq v} \frac{\rho_i}{\rho_d} R_i = \sum_{i \neq v} c_{di} R_i,$$

onde os pesos das constantes específicas de gás R_i são agora as concentrações mássicas "secas" c_{di} . Prosseguindo,

$$\begin{aligned} R_d &= \frac{1}{m_d} \sum_{i \neq v} m_i R_i \\ &= \frac{1}{m_d} \sum_{i \neq v} n_i M_i R_i \\ &= \frac{1}{m_d} \sum_{i \neq v} n_i R^\# = \frac{1}{m_d} \left(\sum_{i \neq v} n_i \right) R^\# \\ &= \frac{n_d}{m_d} R^\# \end{aligned} \quad (3.2)$$

Mas a massa molar média do ar seco em uma atmosfera úmida é, por definição,

$$M_d = \sum_{i \neq v} x_{di} M_i = \frac{\sum_{i \neq v} n_i M_i}{n_d} = \frac{m_d}{n_d}$$

de forma que, como antes,

$$R_d = \frac{R^\#}{M_d}.$$

Note também que se as concentrações relativas dos componentes do ar seco não mudam, então os x_{di} 's de agora são os mesmos que os x_i 's na tabela acima, o que prova a afirmação de que neste caso os valores de M_d e R_d não mudam.

Com estes resultados em mão, podemos simplificar os cálculos substancialmente dividindo ar ocupando V com massa total de m em um componente seco e vapor de água:

$$\begin{aligned} m &= m_d + m_v, \\ \frac{m}{V} &= \frac{m_d}{V} + \frac{m_v}{V}, \\ \rho &= \rho_d + \rho_v, \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde ρ_v é a densidade de vapor de água. Em si mesmo, ρ_v é um índice de concentração de vapor de água; em meteorologia, é chamado *umidade absoluta*. Usando $M_v = 18.0153 \text{ g mol}^{-1}$, descobrimos que

$$R_v = 461.5230 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

é a constante de gás para o vapor d'água. A pressão parcial de vapor d'água é

$$e = \rho_v R_v T.$$

A *umidade específica* q é o mesmo que a fração mássica de vapor d'água c_v , sendo definida como

$$q = \frac{\rho_v}{\rho}.$$

Em meteorologia, é normal usar q e não c_v (este último também é fácil confundir com o calor específico a volume constante, c_v , e *será evitado*. De novo: compare $c_v \times c_v$). Somando as pressões parciais de ar seco e de ar úmido,

$$\begin{aligned} p &= p_d + e \\ &= \rho_d R_d T + \rho_v R_v T \\ &= (\rho_d R_d + \rho_v R_v) T \\ &= \rho \left(\frac{\rho_d}{\rho} R_d + \frac{\rho_v}{\rho} R_v \right) T \\ &= \rho R_d \left(\frac{\rho_d}{\rho} + \frac{\rho_v}{\rho} \frac{R_v}{R_d} \right) T \\ &= \rho R_d \left((1 - q) + \frac{R_v}{R_d} q \right) T. \end{aligned}$$

Substituindo

$$\begin{aligned} \frac{R_v}{R_d} &= 1.608 \approx 1.61 \quad \Rightarrow \\ p &= \rho R_d \underbrace{(1 + 0.61q)}_{T_v} T, \quad \text{ou} \\ p &= \rho \underbrace{R_d(1 + 0.61q)}_R T \end{aligned}$$

A *temperatura virtual* T_v definida acima é a temperatura de uma atmosfera seca com a mesma densidade ρ ; T_v é ligeiramente maior do que T . Um outro índice de umidade atmosférica é a razão de mistura (mais especificamente, a razão de mistura mássica para o vapor d'água). A razão de mistura foi definida anteriormente. Para o vapor d'água, a razão de mistura mássica é

$$r_v = \frac{\rho_v}{\rho - \rho_v} = \frac{\rho_v}{\rho_d}$$

Na sequência nós vamos usar sistematicamente a lei dos gases

$$p_i = \rho_i R_i T \Rightarrow \rho_i = \frac{p_i}{R_i T}$$

Relações úteis entre a razão de mistura e a umidade específica são

$$\begin{aligned} r_v &= \frac{\rho_v}{\rho_d} = \frac{\frac{e}{R_v T}}{\frac{(p-e)}{R_d T}} \\ &= \frac{R_d}{R_v} \frac{e}{p-e} = 0.622 \frac{e}{p-e}; \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{\rho_v}{\rho} = \frac{\frac{e}{R_v T}}{\rho_d + \rho_v} \\ &= \frac{\frac{e}{R_v T}}{\frac{p-e}{R_d T} + \frac{e}{R_v T}} \\ &= \frac{R_d}{R_v} \frac{e}{p + \left(\frac{R_d}{R_v} - 1\right) e} \\ &= 0.622 \frac{e}{p - 0.378e} \approx 0.622 \frac{e}{p}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.5 Saturação e grandezas associadas

O calor latente de evaporação da água, L_w , é a quantidade de a energia usada para mudar a fase de uma unidade de massa de líquido para vapor, em uma mistura pura das duas fases. Uma boa aproximação para a obtenção de uma expressão para L_w como uma função da temperatura é o pressuposto de que as capacidades térmicas das duas fases são iguais. Isso leva a (Adkins, 1983, Cap. 10, eq. 10.16)

$$dL_w = [c_{pv} - c_{pw}]dT$$

onde c_{pv} e c_{pw} são os calores específicos a pressão constante do vapor de água e da água no estado líquido, respectivamente. Se os calores específicos, por sua vez, forem supostos constantes, obtém-se

$$L_w = a_L + b_L T$$

onde $b_L = [c_{pv} - c_{pw}]$. No SI, com T in Kelvins, Dake (1972) fornece

$$L_w = 3.142689 \times 10^6 - 2.365601 \times 10^3 T$$

in J kg^{-1} . [Henderson-Sellers \(1984\)](#) argumenta que uma expressão mais acurada é

$$L_w = 1.91846 \times 10^6 [T/(T - 33.91)]^2.$$

Uma alternativa razoável é usar um valor constante, dado que L_w varia pouco com T na faixa de temperaturas normalmente observadas no ambiente. A $T = 288.15 \text{ K}$, $L_w = 2.464 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$.

Para um sistema constituído por vapor d'água e água no estado líquido em equilíbrio, uma equação pode ser obtida para a derivada em relação à temperatura da *pressão de saturação do vapor d'água* e^* (a pressão do vapor de água em equilíbrio com a água em estado líquido) para a mudança em volume específico v entre as duas fases e o calor latente, a saber

$$\frac{de^*}{dT} = \frac{L_w}{T\Delta v};$$

esta é a equação de *Clausius-Clapeyron equation* ([Adkins, 1983](#), Cap. 10, eq. (10.11)). Acima,

$$\Delta v = v_v - v_w.$$

Supondo a validade da lei dos gases ideais, e que o volume específico da fase líquida é insignificante em comparação com o volume específico do vapor d'água, a equação de Clausius-Clapeyron leva a ([Adkins, 1983](#), Cap. 10, eq. (10.12))

$$\frac{de^*}{dT} = \frac{L_w e^*}{R_v T^2}.$$

Observe que a dependência do calor latente L_w com a temperatura termodinâmica pode ser usada para integrar a equação acima,

$$\begin{aligned} \frac{de^*}{e^*} &= \frac{L_w}{R_v} \frac{dT}{T^2}, \\ \frac{de^*}{e^*} &= \frac{1}{R_v} \frac{(a_L + b_L T)}{T^2} dT, \\ \ln \left(\frac{e^*(T)}{e^*(T_0)} \right) &= \int_{T_0}^T \frac{1}{R_v} \frac{(a_L + b_L \tau)}{\tau^2} d\tau, \\ \ln \left(\frac{e^*(T)}{e^*(T_0)} \right) &= \frac{1}{R_v} \left\{ -b_L \ln(T_0) + b_L \ln(T) + a_L \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right\}, \end{aligned}$$

resultando em

$$e^*(T) = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{b_L}{R_v}} e^*(T_0) \exp \left[\frac{a_L}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right],$$

onde T_0 é uma temperatura de referência. Com $b_L = 0$, a equação acima se parece muito (mas não é igual) à equação empírica de Teten ([Murray, 1966](#); [Dilley, 1968](#); [Stull, 1995](#); [Alduchov e Eskridge, 1996](#)):

$$e^*(T) = e_0 \exp \left[\frac{b(T - T_1)}{T - T_2} \right],$$

com $e_0 = 610.78 \text{ Pa}$, $b = 17.2693882 \text{ K}^{-1}$, $T_1 = 273.16 \text{ K}$ e $T_2 = 35.86 \text{ K}$. Para a pressão de vapor em equilíbrio com o gelo, as constantes mudam para $b = 21.8745584$ e $T_2 = 7.66$.

Para a maioria das aplicações meteorológicas, a fórmula de Tetten é mais do que suficiente. Note entretanto que as constantes mudam para a pressão do vapor de saturação sobre o *gelo*; Note também que a presença de sais na água altera e^* significativamente. Finalmente, a equação de Richards ([Brutsaert, 1982](#)) é

$$\begin{aligned} e^*(T) &= 101\,325 \exp \left[13.3185t_r - 1.9760t_r^2 - 0.6445t_r^3 - 0.1299t_r^4 \right], \\ \frac{de^*}{dT} &= \frac{373.15}{T^2} e^*(T) \left[13.3185 - 3.9520t_r - 1.9335t_r^2 - 0.5996t_r^3 \right], \\ t_r &= 1 - \frac{373.15}{T}. \end{aligned}$$

Muitas dessas fórmulas foram obtidas para padrões antigos de temperatura (ITS-27, ITS-48, IPTS-68, IPTS-68(75), EPT-76), que foram revisitos significativamente em 1990 (ITS-90); ver [Consultative Committee for Thermometry \(2015\)](#); em particular, o ponto de ebulição da água pura (VSMOW; [Wikipedia \(2020e\)](#)) a uma pressão atmosférica (101 325 Pa) é 99.974°C, e não mais 100 °C! ([Wikipedia, 2020b](#)).

O conceito de saturação agora permite a definição de vários índices de umidade nele baseados. A *umidade relativa* y é a razão entre a razão de mistura real e a razão de mistura em uma atmosfera saturada, à mesma temperatura e à mesma pressão:

$$y = \frac{r}{r^*}.$$

Note que, por ser especificada à mesma temperatura e pressão, a densidade do ar seco na atmosfera saturada (ρ_{d^*}) é na verdade menor do que a densidade do ar seco na atmosfera não-saturada (ρ_d). As equações de estado são

$$\begin{aligned} p - e &= \rho_d R_d T, & e &= \rho_v R_v T, \\ p - e^* &= \rho_{d^*} R_d T, & e^* &= \rho_{v^*} R_v T. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} y &= \frac{r}{r^*} = \frac{\frac{\rho_v}{\rho_d}}{\frac{\rho_{v^*}}{\rho_{d^*}}} = \frac{\rho_{d^*}}{\rho_d} \times \frac{\rho_v}{\rho_{v^*}} \\ &= \frac{\frac{p-e}{R_d T}}{\frac{p-e^*}{R_d T}} \times \frac{\frac{e}{R_v T}}{\frac{e^*}{R_v T}} \\ &= \frac{p-e}{p-e^*} \times \frac{e}{e^*} \\ &= \frac{p(1-e^*/p)}{p(1-e/p)} \times \frac{e}{e^*} \\ \text{mas } \frac{1}{1-e/p} &\approx 1 + e/p; \\ &\approx (1-e^*/p)(1+e/p) \frac{e}{e^*} \\ &\approx \frac{e}{e^*}. \end{aligned}$$

A última equação acima é a comumente utilizada em cálculos.

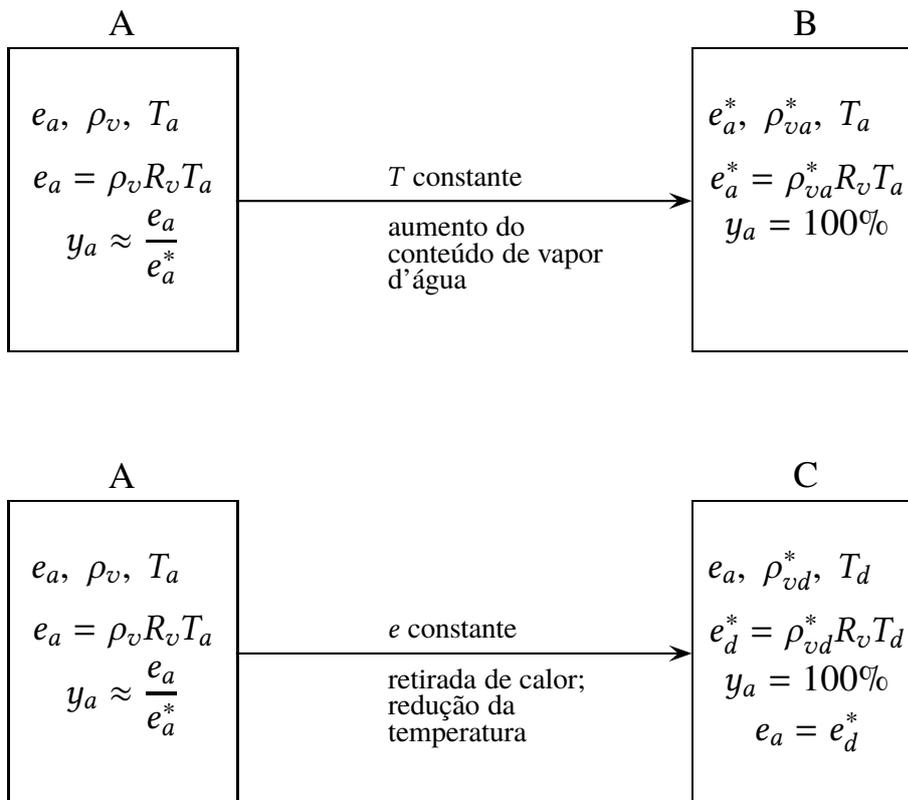
A temperatura de ponto de orvalho T_d é a temperatura à qual a pressão reinante de vapor d'água se torna a pressão de saturação:

$$e^*(T_d) = e.$$

Geralmente, a temperatura varia com a altura na camada limite atmosférica. Subscritos como T_x ou e_x , muitas vezes serão usados para especificar temperatura, pressão de vapor de água, etc, em algum nível específico. Além disso, muitas vezes, vamos usar a notação simplificada

$$\begin{aligned} e_x^* &= e^*(T_x), \\ \Delta_x &= \frac{de^*(T_x)}{dT}, \\ \rho_{vx}^* &= \rho_v^*(T_x). \end{aligned}$$

Na figura a seguir, mostramos no quadro A, as condições prevalecentes no atmosfera. No quadro B, a saturação é atingida, a partir de A, através do aumento teor de vapor de água. No quadro C, condições de saturação também são atingidas, mas desta vez através de uma queda contínua na temperatura até a temperatura de ponto de orvalho T_d .



Exercises

3.1 Show that the exact expression for e as a function of y also depends on p and is

$$e = \frac{ye^*}{1 + (y-1)\frac{e^*}{p}}.$$

Of course, e^* itself is a function of temperature.

3.6 Temperatura potencial

Análise para uma atmosfera sem condensação

Considere a expansão adiabática de uma parcela de ar, a partir de um nível (mais acima) em que a pressão ambiente é p para um nível mais baixo em que a pressão ambiente é p_0 . A primeira lei da termodinâmica é (q é o calor por unidade de massa adicionado ao sistema; w é o trabalho por unidade de massa realizado sobre o sistema)

$$du = \delta q + \delta w;$$

Para um processo adiabático ($\delta q = 0$) e reversível,

$$du = -pdv$$

$$du = c_v dT.$$

A diferenciação da lei dos gases ($pv = RT$) e o uso das definições dos calores específicos a volume constante e pressão constante leva a

$$pdv + vdp = RdT$$

$$c_v dT = vdp - RdT$$

$$(c_v + R)dT = vdp = \frac{RT}{p} dp$$

$$c_p dT = vdp = \frac{RT}{p} dp$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p}.$$

Nós agora integramos entre os pares (T, p) e (θ, p_0) :

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}.$$

A temperatura potencial θ definida acima é a temperatura de uma parcela de ar trazida adiabaticamente e reversivelmente do estado p, T para um estado de referência cuja pressão é p_0 .

O cálculo da temperatura potencial deve ser feito com o valor correto de R/c_p no caso de ar úmido. Isso ocorre porque neste caso a constante de gás e o calor específico a pressão constante de ar úmido dependem da umidade específica q . Para ver isso, suponha que a entalpia total (não a *entalpia específica*) para uma parcela de ar com massa total m possa ser calculada adicionando as entalpias de seco e o ar úmido:

$$m\hat{h} = m_d \hat{h}_d + m_v \hat{h}_v.$$

Isso produz

$$\hat{h} = \frac{\rho_d}{\rho} \hat{h}_d + \frac{\rho_v}{\rho} \hat{h}_v,$$

$$\hat{h} = (1 - q)\hat{h}_d + q\hat{h}_v,$$

$$c_p = \left(\frac{\partial \hat{h}}{\partial T} \right)_{p,q} = (1 - q)c_{pd} + qc_{pv} = (1 + 0.84q)c_{pd}$$

(usando valores tabelados para c_{pd} e c_{pv} : ver (Brutsaert, 1982, Tabela 3.1): $c_{pd} = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, e $c_{pv} = 1846 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$).

Com base na definição da temperatura virtual, a constante de gás para ar úmido é

$$R = R_d(1 + 0.61q)$$

(Note que se trata de uma interpretação alternativa de temperatura virtual: nós agora estamos mudando a constante de gás, enquanto mantemos a temperatura absoluta T , de tal forma que $p v = RT$ ainda se aplica.) Portanto,

$$\frac{R}{c_p} = \frac{R_d}{c_{pd}} \frac{1 + 0.61q}{1 + 0.84q}.$$

Usando a identidade

$$\frac{1 + ax}{1 + bx} \equiv 1 - (b - a)x + \frac{(b - a)bx^2}{1 + bx} \approx 1 - (b - a)x,$$

nós encontramos (para $x = q \ll 1$)

$$\frac{R}{c_p} \approx (1 - 0.23q) \frac{R_d}{c_{pd}}$$

para ar úmido. Portanto,

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{(1-0.23q) \frac{R_d}{c_{pd}}}$$

Também é imediato obter o calor específico a volume constante para o ar úmido:

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_{v,q} = (1 - q)c_{vd} + qc_{vv} = (1 + 0.94q)c_{vd},$$

fazendo novamente uso da Tabela 3.1 de Brutsaert (1982), com $c_{vd} = 716 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $c_{vv} = 1386 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Finalmente, essas definições se estendem para a temperatura virtual, *mas não de forma unívoca*, como discutido em Brutsaert (1982, seção 3.2b). A *temperatura potencial virtual* é a temperatura virtual que uma parcela de ar úmido teria se trazida adiabaticamente de seu estado real até a pressão de referência p_0 :

$$\theta_{vp} = T_v \left(\frac{p_0}{p} \right)^{(1-0.23q) \frac{R_d}{c_{pd}}}.$$

Isso é ligeiramente diferente (numericamente) da *temperatura virtual potencial*, que é a temperatura potencial de ar seco com a mesma pressão e a mesma densidade iniciais, e que é dada por

$$\theta_{pv} = T_v \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R_d}{c_{pd}}}.$$

As duas quantidades são obviamente muito próximas numericamente. Daqui para frente, sempre utilizaremos a temperatura potencial virtual. Além disso, nós a denotaremos simplesmente por θ_v .

A taxa de variação da temperatura em uma atmosfera com condensação (taxa pseudo-adiabática)

Considere a equação de estado de um gás ideal, e um estado hidrostático da atmosfera:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dz} &= -\frac{g}{v}, \\ pv &= RT \Rightarrow \\ pdv + vdp &= RdT\end{aligned}$$

Considere também a 1ª lei da Termodinâmica *para um gás ideal, em um processo adiabático*:

$$\begin{aligned}du &= \cancel{dw} + \overset{0}{\cancel{dq}}, \\ c_v dT &= -pdv.\end{aligned}$$

Substituindo na última equação do bloco anterior,

$$-c_v dT + vdp = RdT$$

Mas

$$vdp = -gdz; \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}-c_v dT - gdz &= RdT, \\ -gdz &= (R + c_v)dT, \\ -gdz &= c_p dT, \\ \frac{dT}{dz} &= -\frac{g}{c_p} = -0.00976 \text{ K m}^{-1},\end{aligned}$$

que é a *taxa adiabática seca*. Em uma atmosfera úmida, a coisa é mais complicada: à medida que parcelas são levantadas e atingem níveis mais altos e frios, uma parte do vapor d'água condensa, e o calor latente liberado *diminui* a queda de temperatura. Isso produz taxas *pseudo-adiabáticas úmidas*. Um valor representativo, frequentemente citado é

$$\frac{dT}{dz} = -0.00650 \text{ K m}^{-1}.$$

Nós podemos retomar os cálculos da temperatura potencial para uma atmosfera em que ocorre condensação, de forma aproximada. Seja portanto

$$\frac{dT}{dz} = -\alpha$$

a taxa pseudo-adiabática prevalecente na atmosfera. As equações agora são

$$\begin{aligned}vdp &= -gdz, & (\text{eq. hidrostática}) \\ dT &= -\alpha dz. & (\text{"substituindo a 1ª Lei"})\end{aligned}$$

Com a lei dos gases,

$$v = \frac{RT}{p},$$

$$\frac{RT}{p} dp = -g dz,$$

$$\frac{dp}{p} = \left(-\frac{g}{RT}\right) dz,$$

$$\frac{dp}{p} = \left(-\frac{g}{\alpha R}\right) \frac{dT}{T},$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{g/(\alpha R)},$$

juntamente com

$$T_2 = T_1 - \alpha(z_2 - z_1).$$

Água precipitável

É a massa de água em uma coluna da atmosfera entre dois níveis *por unidade de área* (minha definição).

$$m_P(z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} q \rho dz.$$

Exemplo 3.2.2 de [Chow et al. \(1988\)](#): Calcule a água precipitável em uma coluna de ar saturado de 10 km de altura a partir da superfície ($p = 101325 \text{ Pa}$, $T = 30^\circ\text{C}$, $\alpha = 6.5^\circ\text{C}(100 \text{ m})^{-1}$).

Para resolver o problema, nós vamos precisar de um computador, e de uma linguagem de programação. Usarei Python. Precisaremos de uma rotina para calcular a pressão de saturação de vapor d'água, de uma rotina de integração numérica, e das constantes de gás para fazermos todos os cálculos.

O programa `agprec.py` é (espero!) auto-explicativo.

Um ponto importante é o cálculo iterativo do estado da atmosfera no nível “2” a partir do estado (conhecido) no nível “1”. Para isso, nós resolvemos:

$$\Delta p = -\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} g \Delta z,$$

$$p_2 = p_1 + \Delta p,$$

$$q_2 = 0.622 \frac{e^*(T_2)}{p_2},$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{R_d T_2 (1 + 0.61 q_2)},$$

partindo de

$$q_2 = 0.622 \frac{e^*(T_2)}{p_1},$$

$$\rho_2 = \frac{p_1}{R_d T_2 (1 + 0.61 q_2)},$$

iterativamente, até a convergência de p_2 .

Listing 3.1: `agprec.py` – Cálculo de água precipitável.

```

1  #!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
2  # -*- coding: iso-8859-1 -*-
3  # -----
4  # Exemplo 3.2.2 de Chow, Maidment & Mays. Por simplicidade, partimos
5  # de  $z = 0$  com  $p_0 = 101325$  Pa,  $T_0 = 303.15$  K
6  #
7  # Nelson Luís Dias
8  # criado      em 2020-07-28T18:35:04
9  # modificado em 2020-07-28T19:20:16
10 # -----
11 def Ta(z):
12     '''
13     Calcula a temperatura do ar em função da altura z em m, em K
14     '''
15     alfa = 0.0065
16     return 273.15 + 30.0 - alfa*z
17 # -----
18 from math import exp
19 def es(T):
20     '''
21     Calcula a pressão de saturação de vapor d'água es (Pa) em função da
22     temperatura T (K) (Eq de Tetens)
23     '''
24     b = 17.2693882
25     T1 = 273.16
26     T2 = 35.86
27     e0 = 610.78
28     return e0*exp( b*(T - T1)/(T - T2) )
29 # -----
30 def newstate(p1, rho1, T1, z2, delz):
31     '''
32     Calcula o estado da atmosfera no nível z2 a partir do
33     estado no nível z1, usando a equação de estado e a equação
34     da hidrostática. newstate é um integrador "sob medida"
35     '''
36     g = 9.81                # aceleração da gravidade
37     epsp = 0.001           # erro no cálculo de p2, em Pa
38     p20 = p1 + 2*epsp     # força o while a começar
39     p2 = p1                # primeira estimativa de p2
40     T2 = Ta(z2)           # temperatura do ar em z2: não muda mais
41     e2 = es(T2)           # press vapor em z2; não muda mais
42 # -----
43 # Os 2 valores abaixo são estimativas *iniciais*
44 # -----
45     q2 = 0.622*e2/p2      # umidade esp em z2
46     rho2 = p2/(Rd*T2*(1+0.61*q2)) # densidade em z2
47     while (abs(p2 - p20) > epsp) :
48         p20 = p2          # guarda o valor anterior
49         rhobar = (rho1 + rho2)/2 # dens média da camada
50         delp = -rhobar*g*delz # eq da hidrostática
51         p2 = p1 + delp     # novo p2
52         q2 = 0.622*e2/p2  # nova umid esp em z2
53         rho2 = p2/(Rd*T2*(1+0.61*q2)) # nova densidade em z2
54         print('.')
55     pass
56     print(p2, rho2, T2, q2)
57 # -----
58 # retorna o estado da atmosfera no nível z2
59 # -----
60     return (p2, rho2, T2, q2)
61 # -----
62 # aqui começa o programa principal: as condições na superfície estão
63 # completamente determinadas.
64 # -----
65 Rd = 287.03805           # cte de gás do ar seco
66 p0 = 101325.0           # pressão na superfície
67 T0 = 303.15              # temperatura na superfície
68 e0 = es(T0)             # press vapor na superfície
69 q0 = 0.622*e0/p0        # umid esp na superfície
70 rho0 = p0/(Rd*T0*(1 + 0.61*q0)) # densidade do ar na superfície
71 print(q0, rho0)
72 # -----

```

```

73 # discretizo a atmosfera em n = 1000 pontos
74 # -----
75 n = 1000 # 1000 intervalos
76 zmax = 10000.0 # altura máxima (m)
77 delz = 10.0 # intervalo de integração (m)
78 # -----
79 # crio vetores de estado com n+1 pontos
80 # -----
81 from numpy import arange, zeros
82 p = zeros(n+1,float) # pressão em todos os pontos
83 T = zeros(n+1,float) # temperatura em todos os pontos
84 q = zeros(n+1,float) # umid esp em todos os pontos
85 rho = zeros(n+1,float) # densidade em todos os pontos
86 z = arange(0.0,zmax+delz,delz,float) # níveis de cálculo
87 # -----
88 # loop em z, de baixo para cima
89 # -----
90 (p[0],rho[0],T[0],q[0]) = (p0, rho0, T0, q0)
91 for i in range(n):
92     (p[i+1],rho[i+1],T[i+1],q[i+1]) = \
93         newstate(p[i],rho[i],T[i],z[i+1],delz)
94 pass
95 # -----
96 # A integração numérica com a regra do trapézio deve ser relativamente
97 # simples
98 # -----
99 ff = rho*q # função a ser integrada, já calculada pto a pto
100 Se = ff[0] + ff[n] # soma, ptos externos
101 Si = 0.0 # soma, ptos internos
102 for k in range(1,n):
103     Si += ff[k]
104 pass
105 I = Se + 2*Si # agora basta aplicar a fórmula
106 I *= delz
107 I /= 2.0
108 print('Água precipitável = %8.2f kg/m2' % I)

```

3.7 Precipitação

A formação de nuvens requer o levantamento de ar úmido até a condensação. Esse levantamento pode ser produzido:

1. Por frentes (chuvas frontais).
2. Pela orografia (chuvas orográficas).
3. Pela atividade convectiva (chuvas convectivas, chuvas “de verão”).

A formação de gotas de chuva requer *núcleos de condensação* (aerossóis). Vários tipos de aerossol podem funcionar como núcleos de condensação.

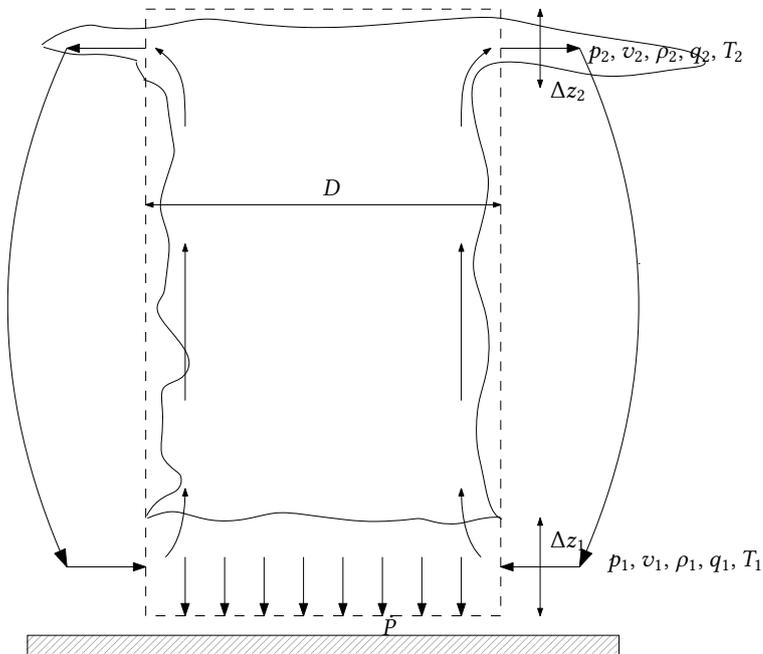
Dependendo das condições de temperatura, presença/ausência de núcleos de condensação, etc., neve e granizo podem se formar.

Gotas de chuva possuem uma velocidade terminal,

$$V_t = \left[\frac{4gD}{3C_d} \left(\frac{\rho_w}{\rho_a} - 1 \right) \right]^{1/2} .$$

Um modelo de tempestade

O modelo a seguir é muito simples, mas mesmo assim é muito útil em aplicações. Em particular, no método da precipitação máxima provável, que veremos mais à frente.



Para uma “célula de tempestade” cilíndrica, de diâmetro D , considere as equações de balanço de massa de ar seco, e de massa de vapor d’água.

Para o ar seco,

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho_d dV + \oint_{\mathcal{S}} \rho_d (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dV; \\
 0 &= [\rho(1-q)v\Delta z]_2 \pi D - [\rho(1-q)v\Delta z]_1 \pi D \\
 [\rho(1-q)v\Delta z]_2 &= [\rho(1-q)v\Delta z]_1 \\
 [\rho v\Delta z]_2 &= [\rho v\Delta z]_1 \frac{1-q_1}{1-q_2}
 \end{aligned}$$

e para o vapor d'água,

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} q\rho dV + \oint_{\mathcal{S}} q\rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dV; \\
 0 &= \dot{P} \frac{\pi D^2}{4} + [q\rho v\Delta z]_2 \pi D - [q\rho v\Delta z]_1 \pi D \\
 \dot{P} \frac{\pi D^2}{4} &= [q\rho v\Delta z]_1 \pi D - [q\rho v\Delta z]_2 \pi D \\
 \dot{P} \frac{D}{4} &= [q\rho v\Delta z]_1 - [q\rho v\Delta z]_2 \\
 \dot{P} \frac{D}{4} &= q_1 [\rho v\Delta z]_1 - q_2 [\rho v\Delta z]_2 \\
 \dot{P} \frac{D}{4} &= q_1 [\rho v\Delta z]_1 - q_2 [\rho v\Delta z]_1 \frac{1-q_1}{1-q_2} \\
 \dot{P} \frac{D}{4} &= \left(q_1 - q_2 \frac{1-q_1}{1-q_2} \right) [\rho v\Delta z]_1 \\
 \dot{P} \frac{D}{4} &= \left(\frac{q_1 - q_2}{1 - q_2} \right) [\rho v\Delta z]_1, \\
 \dot{P} &= \frac{4}{D} \left(\frac{q_1 - q_2}{1 - q_2} \right) [\rho v\Delta z]_1.
 \end{aligned}$$

Note que $\{\dot{P}\} = \text{kg}_{\text{H}_2\text{O}} \text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$. A intensidade de precipitação em m s^{-1} é

$$i = \frac{4}{\rho_w D} \left(\frac{q_1 - q_2}{1 - q_2} \right) [\rho v\Delta z]_1$$

e a intensidade de precipitação em mm h^{-1} é

$$\begin{aligned}
 \text{m s}^{-1} &= \frac{1000\text{mm}}{\text{m}} \times \frac{1}{\text{s}} \times \frac{3600\text{s}}{\text{h}} \\
 i &= \frac{4}{\rho_w D} \left(\frac{q_1 - q_2}{1 - q_2} \right) [\rho v\Delta z]_1 \times 1000 \times 3600.
 \end{aligned}$$

Façamos portanto o Exemplo 3.3.2 de [Chow et al. \(1988\)](#):

A thunderstorm cell 5 km in diameter has a cloud base of 1.5 km, and surface conditions recorded nearby indicate saturated air conditions with air temperature 30°C , pressure 101325 Pa and wind speed 1 m s^{-1} . Assuming a lapse rate of $7.5^\circ \text{C km}^{-1}$ and an average outflow elevation of 10 km, calculate the precipitation intensity from this storm. Also determine

what proportion of the incoming moisture is precipitated as air passes through the storm cell and calculate the rate of release of latent heat through moisture condensation in the column.

A solução será calculada pelo programa `stcell.py`.

Listing 3.2: `stcell.py` – Modelo de tempestade.

```

1  #!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
2  # -*- coding: iso-8859-1 -*-
3  # -----
4  # Exemplo 3.3.2, Chow, Maidment e Mays
5  #
6  # Nelson Luis Dias
7  # 2020-08-04T17:19:27
8  # -----
9  #
10 # vou precisar da fórmula para a pressão de saturação de vapor d'água
11 # -----
12 from math import exp
13 def es(T):
14     '''
15     Calcula a pressão de saturação de vapor d'água es (Pa) em função da
16     temperatura T (K) (Eq de Tetens)
17     '''
18     b = 17.2693882
19     T1 = 273.16
20     T2 = 35.86
21     e0 = 610.78
22     return e0*exp( b*(T - T1)/(T - T2) )
23 def Ta(z):
24     '''
25     Calcula a temperatura do ar em função da altura z em m, em K
26     '''
27     alfa = 0.0075 # esta mudança é muito importante!!!!
28     return 273.15 + 30.0 - alfa*z
29 # -----
30 # vou precisar de uma fórmula para o calor latente de evaporação
31 # -----
32 def latente(T) :
33     '''
34     latent: Latent heat of evaporation (in J kg-1) as a function
35     of
36     thermodynamic temperature (in K)
37
38     From Dake 1972 "Evaporative Cooling of a body of water", Water
39     Resour Res, (8)1087--1091.
40     '''
41     return (3142689.0 - 2356.01 * T)
42 # -----
43 # todas as variáveis no SI!!!!
44 # -----
45 Diam = 5000.0 # diâmetro da célula (m)
46 delz1 = 1500.0 # $Delta z_1$ (m)
47 p0 = 101325.0 # pressão atmosférica em Pa
48 T0 = 30+273.15 # temperatura do ar na "entrada", em K
49 v1 = 1.0 # velocidade do vento na "entrada", em m/s
50 rhow = 1000.0 # densidade da água líquida kg/m3
51 es0 = es(T0) # press vap na entrada (Pa)
52 q0 = 0.622*es0/p0 # umidade específica na superfície (kg/kg)
53 Rd = 287.03805 # cte de gás do ar seco
54 rho0 = p0/(Rd*T0*(1 + 0.61*q0)) # densidade do ar na superfície
55 # -----
56 # nós vamos precisar da pressão atmosférica a 10 km de altura!!!!
57 # para isso, temos que calcular a mesma integral de antes :-(
58 # copio e colo o programa que fiz antes para ir até p2
59 # -----
60 def newstate(p1,rho1,T1,z2,delz):
61     '''
62     Calcula o estado da atmosfera no nível z2 a partir do
63     estado no nível z1, usando a equação de estado e a equação
64     da hidrostática. newstate é um integrador "sob medida"
65     '''

```

```

66     g = 9.81                # aceleração da gravidade
67     epsp = 0.001           # erro no cálculo de p2, em Pa
68     p20 = p1 + 2*epsp      # força o while a começar
69     p2 = p1                 # primeira estimativa de p2
70     T2 = Ta(z2)            # temperatura do ar em z2: não muda mais
71     e2 = es(T2)            # press vapor em z2; não muda mais
72 # -----
73 # Os 2 valores abaixo são estimativas *iniciais*
74 # -----
75     q2 = 0.622*e2/p2        # umidade esp em z2
76     rho2 = p2/(Rd*T2*(1+0.61*q2)) # densidade em z2
77     while (abs(p2 - p20) > epsp) :
78         p20 = p2            # guarda o valor anterior
79         rhobar = (rho1 + rho2)/2 # dens média da camada
80         delp = -rhobar*g*delz # eq da hidrostática
81         p2 = p1 + delp      # novo p2
82         q2 = 0.622*e2/p2    # nova umid esp em z2
83         rho2 = p2/(Rd*T2*(1+0.61*q2)) # nova densidade em z2
84 #     print(' ')
85     pass
86 #     print(p2,rho2,T2,q2)
87 # -----
88 # retorna o estado da atmosfera no nível z2
89 # -----
90     return (p2, rho2, T2, q2)
91 # -----
92 # discretizo a atmosfera em n = 1000 pontos
93 # -----
94     n = 1000                # 1000 intervalos
95     zmax = 10000.0          # altura máxima (m)
96     delz = 10.0            # intervalo de integração (m)
97 # -----
98 # crio vetores de estado com n+1 pontos
99 # -----
100 # -----
101 # loop em z, de baixo para cima
102 # -----
103     print("Condições aqui em baixo:")
104     print("p\rhoTqz")
105     print("%9.2f%5.2f%5.2f%6.4f%7.1f" % (p0,rho0,T0,q0,0.0))
106     from numpy import arange, zeros
107     p = zeros(n+1,float)    # pressão em todos os pontos
108     T = zeros(n+1,float)    # temperatura em todos os pontos
109     q = zeros(n+1,float)    # umid esp em todos os pontos
110     rho = zeros(n+1,float)  # densidade em todos os pontos
111     z = arange(0.0,zmax+delz,delz,float) # níveis de cálculo
112 # -----
113 # loop em z, de baixo para cima
114 # -----
115     (p[0],rho[0],T[0],q[0]) = (p0, rho0, T0, q0)
116     for i in range(n) :
117         (p[i+1],rho[i+1],T[i+1],q[i+1]) = \
118             newstate(p[i],rho[i],T[i],z[i+1],delz)
119     pass
120     (p2,rho2,T2,q2,z2) = (p[n],rho[n],T[n],q[n],z[n])
121     print("Condições lá em cima:")
122     print("%9.2f%5.2f%5.2f%6.4f%7.1f" % (p2,rho2,T2,q2,z2))
123 # -----
124 # As variáveis q1 e rho1 agora referem-se à média sobre delz1: note
125 # que z[150] = 1500 m. Portanto, vamos fazer a média de q e a média de
126 # rho de 0 a 150 inclusive
127 # -----
128     from numpy import average
129     rho1 = average(rho[0:151])
130     print(rho1)
131     q1 = average(q[0:151])
132     print(q1)
133 # -----
134 # agora temos condições de continuar a fazer as contas. O resultado
135 # mais importante é a taxa de precip, em kg/m2/s
136 # -----
137     Pdot = (4.0/(Diam))*((q1 - q2)/(1-q2))*rho1*v1*delz1 # kg/m2/s
138     print("Pdot=",Pdot)

```

```

139 Pdms = Pdot/rhow                               # m/s
140 print("Pdms_=", Pdms)
141 Pmmh = Pdms*1000*3600                           # mm/h
142 print("Pmmh_=", Pmmh)

```

Agora, faça as contas restantes e termine o exemplo! Verifique sempre contra os resultados numéricos do livro.

Hietógrafas

A precipitação pode ser altamente variável, no espaço e no tempo. Um exemplo gritante para a precipitação anual (média de muitos anos; tipicamente, 30 anos define uma “normal” climatológica): Arica, Chile: 0.5 mm; Mt Waialeale, Havaí: 11680 mm.

Um gráfico de precipitação em função do tempo é chamado de uma *hietógrafa*.

Vamos reproduzir a Tabela 3.4.1 de [Chow et al. \(1988\)](#), que se refere à chuva observada em *um pluviômetro*, 1-Bee, 24–25 Maio de 1981, Austin, Texas; a *hietógrafa* equivalente é produzida por

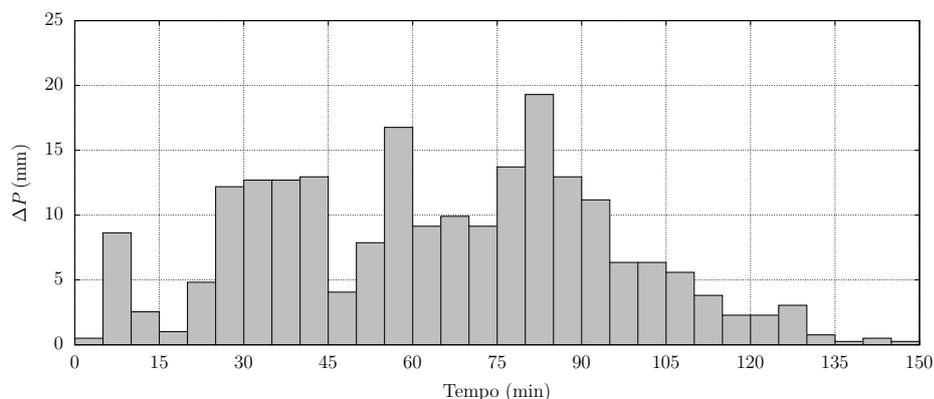
Listing 3.3: a1bee.plt – Hietógrafa de 1Bee.

```

1 set encoding iso_8859_1
2 set terminal epslatex standalone color solid font 'lmr' 12 size 21cm, 9cm
3 set output 'a1bee.tex'
4 set xrange [0:150]
5 set yrange [0:25]
6 set ytics 0,5
7 set xtics 0,15
8 set xlabel 'Tempo_(min)'
9 set ylabel '$\Delta P\$, (\mathrm{mm})$'
10 set boxwidth 1.0 relative
11 set grid
12 #set style fill solid lc rgb 'gray75' border lt 1
13 #set style line 1 lt 1 lw 4 lc rgb 'black'
14 set linetype 1 lw 2 lc rgb 'black'
15 set style fill solid 1.0 border lt 1
16 plot 'a1bee.dat' using (column(1)-2.5):(column(2)*25.4) notitle \
17 with boxes fs solid fc rgb 'gray75'

```

e é mostrada a seguir:



A hietógrafa acumulada é produzida por

Listing 3.4: stcell.py – Hietógrafa de 1Bee.

```

1 set encoding iso_8859_1
2 set terminal epslatex standalone color solid font 'lmr' 12 size 21cm, 9cm

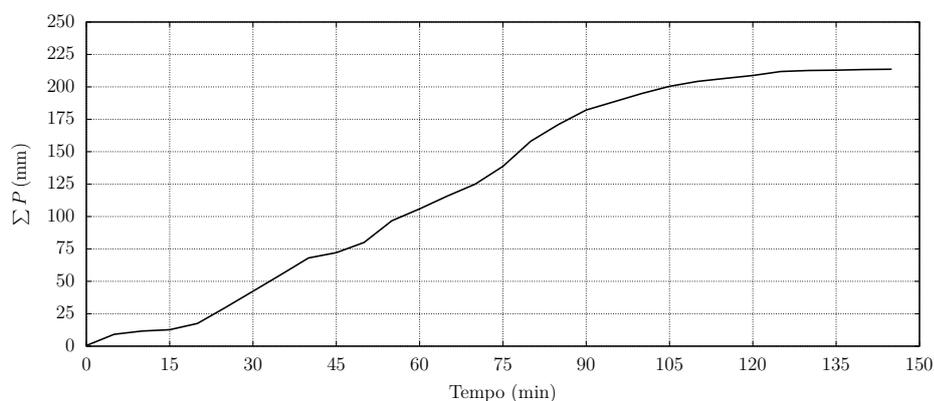
```

```

3 set output 'albee-cum.tex'
4 set xrange [0:150]
5 set yrange [0:250]
6 set ytics 0,25
7 set xtics 0,15
8 set xlabel 'Tempo (min)'
9 set ylabel '$\sum P$, (\mathrm{mm})$'
10 set grid
11 #set style fill solid lc rgb 'gray75' border lt 1
12 #set style line 1 lt 1 lw 4 lc rgb 'black'
13 set linetype 1 lw 2 lc rgb 'black'
14 set style fill solid 1.0 border lt 1
15 plot 'albee.dat' using (column(1)-5):(column(2)*25.4) notitle \
16 smooth cumulative with lines lt 1 lw 4 lc rgb 'black'

```

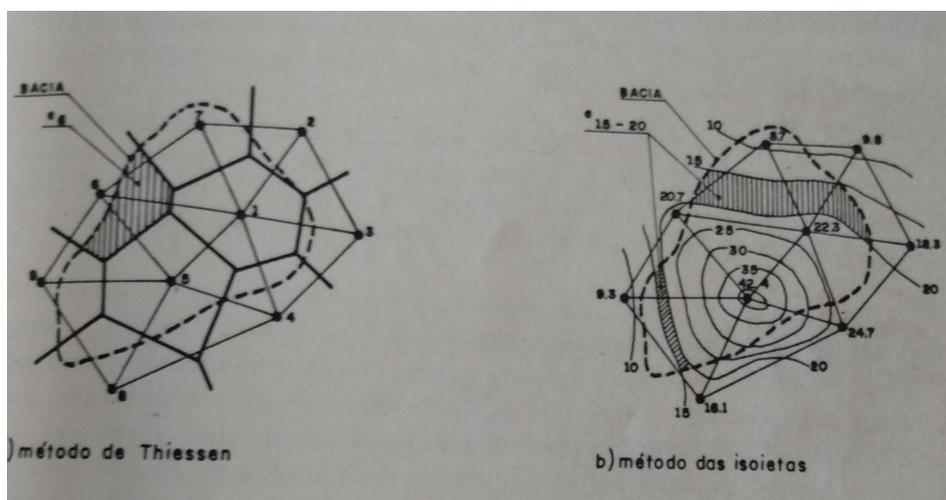
e é mostrada a seguir:



Precipitação espacial

Isoietas são simplesmente curvas de nível traçadas entre dados observados de chuva (geralmente na superfície, com medição em *pluviômetros*). Antigamente, nós desenhávamos “à mão”. Hoje em dia, existem procedimentos automáticos para o cálculo de isoietas a partir de dados observacionais.

Para cada intervalo de tempo de observação da chuva (digamos: a cada 10 minutos em uma bacia “pequena” (10 a 100 km²), a cada dia em uma bacia “grande” (10 000 a 100 000 km²), nós “traçamos” as isoietas como na figura abaixo,



e em seguida calculamos a chuva média sobre a região de interesse (tipicamente, a própria bacia hidrográfica) a cada intervalo de tempo. Muitas vezes (principalmente em modelos “concentrados”, é essa série temporal de precipitação média sobre a bacia que é utilizada em modelos e estudos.

O cálculo da chuva média na bacia sempre envolve alguma aproximação. O método mais simples, *que sempre deve ser usado como uma verificação*, é o da média aritmética. Se P_k é a precipitação acumulada ao longo de Δt na k -ésima estação pluviométrica, a precipitação média é estimada por

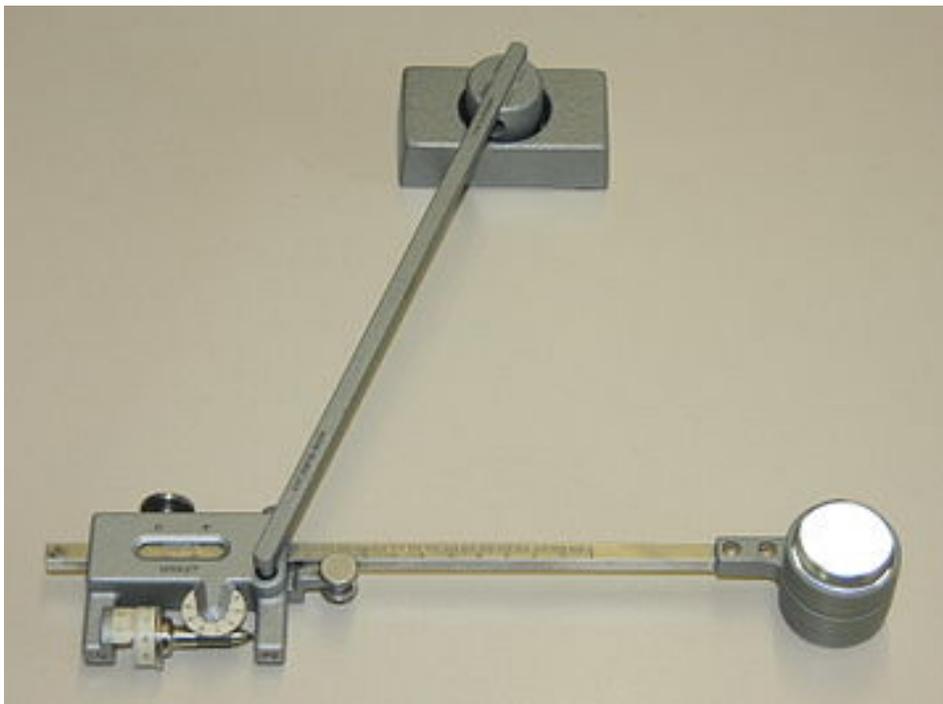
$$\bar{P} = \sum_{k=1}^{n_p} P_k,$$

onde n_p é o número de estações pluviométricas.

O método de Thiessen é originalmente um método gráfico. A bacia hidrográfica é dividida em sub-áreas de influência: cada estação pluviométrica tem uma área de influência A_k (eventualmente, pode acontecer que uma dada estação esteja tão longe da bacia em relação às suas vizinhas que $A_k = 0$). A precipitação média na bacia é então calculada por

$$\bar{P} = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{n_p} A_k P_k.$$

O método das isoeitas mostrado acima também era originalmente um método gráfico. Traçava-se “a sentimento” as curvas de nível “olhando” para os valores de P_k no papel. Em seguida, as curvas de nível eram integradas graficamente com um instrumento denominado “planímetro” [Wikipedia \(2020c\)](#), cuja fotografia mostramos abaixo:

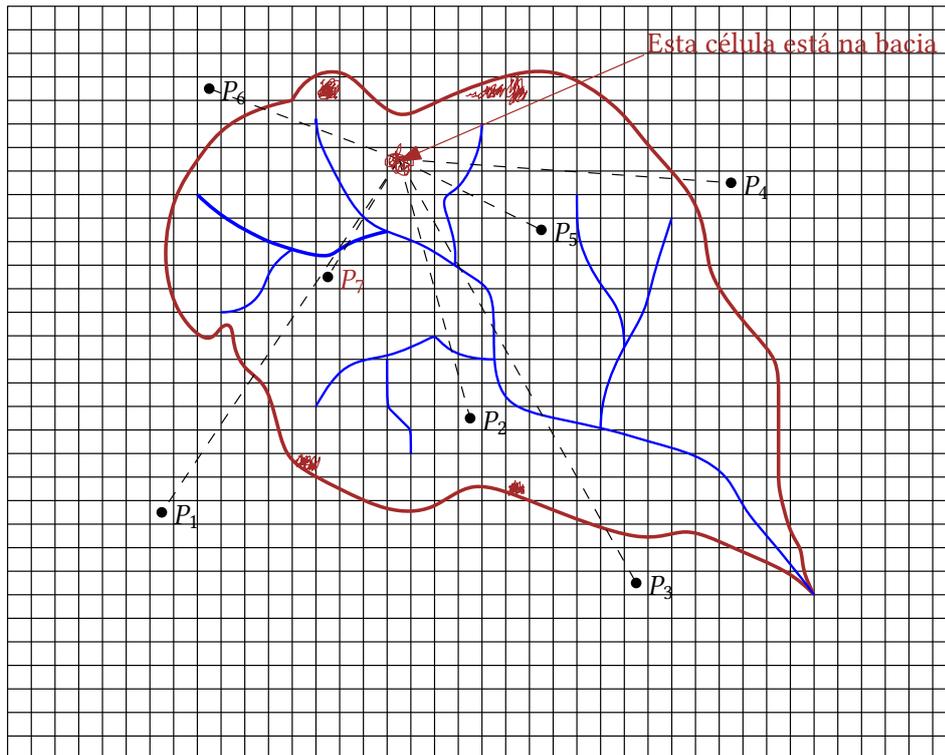


Atualmente, esses métodos foram substituídos por métodos digitais. Considere um reticulado de $m \times n$ células (m linhas, n colunas), e considere

a função indicador

$$I_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{a célula } (i, j) \text{ não pertence à bacia hidrográfica,} \\ 1, & \text{a célula } (i, j) \text{ pertence à bacia hidrográfica.} \end{cases}$$

Todos os métodos digitais (implementados como um algoritmo de computador) correspondem a calcular pesos $\omega_{i,j}$ para cada célula dentro da bacia (veja exemplos de células dentro da bacia na figura a seguir)



No método de Thiessen, por exemplo, os pesos de Thiessen correspondem a

$$\omega_k = \frac{A_k}{A}.$$

Porém agora nós vamos calcular os pesos percorrendo cada célula individualmente. Para o método de Thiessen, o algoritmo é o seguinte:

$n = 0$;

Para $k = 1, \dots, n_p$:

$n_k = 0$;

Para $i = 1, \dots, m$;

Para $j = 1, \dots, m$;

Se $I_{i,j} \neq 0$:

$n = n + 1$;

$d_{min} = +\infty$;

Para $k = 1, \dots, n_p$:

Se $d_{i,j \leftrightarrow k} < d_{min}$:

$k_{min} = k$;

$n_{k_{min}} = n_{k_{min}} + 1$

Para $k = 1, \dots, n_p$:

$\omega_k = n_k/n$ ■

No método do inverso do quadrado das distâncias, os pesos são calculados de forma diferente:

$n = 0$;

Para $k = 1, \dots, n_p$:

Para $i = 1, \dots, m$:

Para $j = 1, \dots, m$:

$$\omega_{i,j,k} = 0;$$

Para $i = 1, \dots, m$:

Para $j = 1, \dots, m$:

Se $I_{i,j} \neq 0$:

Para $k = 1, \dots, n_p$:

$$\omega_{i,j,k} = 1/d_{i,j \leftrightarrow k}^2;$$

Para $i = 1, \dots, m$;

Para $j = 1, \dots, m$;

Se $I_{i,j} \neq 0$:

$$s_0 = 0;$$

$$s_1 = 0;$$

Para $k = 1, \dots, n_p$:

$$s_0 = s_0 + \omega_{i,j,k};$$

$$s_1 = s_1 + \omega_{i,j,k} \times P_k;$$

$$p_{i,j} = s_1/s_0$$

E agora para calcular a precipitação média basta integrar numericamente a função (definida ponto a ponto dentro da bacia) $p_{i,j}$. Note que estou usando P_k para a precipitação em cada pluviômetro, e $p_{i,j}$ para a função interpolada ponto a ponto.

3.8 Evaporação: escalas e conceitos gerais

Vou utilizar o termo “evaporação” no mesmo sentido usado por [Brutsaert \(1982\)](#): como o fluxo de massa médio por unidade de área E de vapor d’água sobre uma certa área horizontal (a área de um tanque evaporimétrico; a área de um lago; a área de uma bacia hidrográfica; etc.). Ficam aí incluídas portanto tanto a evaporação de água líquida em contato com o ar, a partir de folhas, do solo úmido, de corpos d’água, etc., como a transpiração através dos estômatos das plantas.

Confrontado com a necessidade de “fechar” o ciclo hidrológico, o hidrólogo freqüentemente tem que calcular estimativas de evapotranspiração e de evaporação em lago. Os métodos disponíveis estão espalhados na literatura, indo de equações totalmente empíricas e algumas vezes obsoletas, até resultados de pesquisa micrometeorológica que não são aplicáveis às escalas hidrológicas. Nesta seção vamos procurar resumir o conhecimento básico necessário à boa prática de estimativas de evaporação/evapotranspiração. Como tal, minimiza-se os aspectos teóricos e as demonstrações, em favor de uma compilação organizada de fórmulas e métodos. As linhas gerais de ação para diversos casos comuns em hidrologia (aplicações em modelos chuva-vazão, cálculo de evapotranspiração e evaporação em lagos) são discutidas brevemente.

Introdução

Nosso objetivo é apresentar um resumo dos modelos e métodos atualmente disponíveis para estimar evaporação e evapotranspiração, na medida do conhecimento do autor, que seja ao mesmo tempo compreensível e não entre em detalhes matemáticos. Nós denominamos um procedimento de “método” quando o valor de evaporação/evapotranspiração obtido pode ser considerado uma “medição”; incluem-se nesta categoria os métodos do Balanço de Massa (em lisímetros, possivelmente em reservatórios, em bacias hidrográficas), Balanço de Energia, Medição de Covariâncias Turbulentas, e Medição de Perfis Médios na atmosfera. O procedimento é denominado “modelo” quando envolve simplificações ou coeficientes cuja incerteza é grande; aqui se incluem várias equações de transferência de massa, a equação de Penman (1948), a equação de Penman-Monteith (Monteith, 1973), a equação de Priestley-Taylor (Priestley e Taylor, 1972) e os modelos CRAE/CRLE de Morton (Morton, 1983a,b; Morton et al., 1985; Morton, 1986). As principais idéias e fórmulas são apresentadas, porém não suas deduções: o espírito deste trabalho é mais o de um guia prático do que um texto teórico sobre evaporação. Além disso, não são apresentados métodos ou modelos que sejam muito sofisticados seja do ponto de vista computacional, seja em termos de requerimento de dados. A ênfase é em procedimentos cuja aplicação é relativamente simples, e que se baseiam principalmente em dados médios diários convencionalmente medidos em estações meteorológicas. Este é o sentido do adjetivo “climatológicos” no título. Os leitores interessados poderão encontrar as bases teóricas e alguns modelos mais sofisticados na lista de referências bibliográficas.

Escalas e modelos em meteorologia e hidrologia

No método científico, sempre que procuramos analisar um problema, este é dividido em diversos elementos, de acordo com a nossa capacidade de “enxergá-los” com a lente de nossas escalas. Os elementos diretamente relevantes são aqueles que podem ser “resolvidos” ou “enxergados” explicitamente. Os elementos indiretamente relevantes são aqueles que não podem ser “resolvidos” ou “enxergados” diretamente pela menor escala que estivermos utilizando: estes elementos precisam ser parametrizados. Finalmente, há elementos irrelevantes, que podem ser totalmente desprezados, pelo menos em uma análise inicial (Brutsaert, 1986).

Por exemplo, considere a questão de modelar uma bacia hidrográfica da ordem de 20000km². Os dados disponíveis muitas vezes são informações pluviométricas e fluviométricas, e mapas do IBGE e do Ministério do Exército nas escalas 1:50000 e/ou 1:100000. Suponha a existência de 10 postos pluviométricos e 10 postos fluviométricos dentro de nossa bacia, mais ou menos uniformemente distribuídos. O modelador deverá ser capaz de identificar cerca de 10 sub-bacias hidrográficas, cada uma das quais com cerca de 2000km², e possivelmente ajustar um modelo chuva-vazão a cada uma destas unidades. Porém, na falta de informações de topografia, precipitação e vazão mais detalhadas, provavelmente será infrutífero descer à escala de bacias de 100 ou 10km². Neste caso, dizemos que a es-

Tabela 3.1: Escalas em meteorologia [Orlanski \(1975\)](#)

| Nome | Fenômenos | Dimensão Horizontal |
|----------------|--|---------------------|
| Macro α | Ondas planetárias muito longas | > 10000 km |
| Macro β | Ondas de gravidade Ondas baroclínicas | 2000 – 10000 km |
| Meso α | Frentes e Furacões | 200 – 2000 km |
| Meso β | Jato noturno | 20 – 200 km |
| | Linhas de instabilidade | |
| | Aglomerados de Nuvens | |
| | Efeitos topográficos | |
| | Efeitos de Lago | |
| Meso γ | Chuvas convectivas | 2 – 20 km |
| | Turbulência de Céu Claro | |
| | Efeitos Urbanos | |
| Micro α | Tornados | 200 m – 2 km |
| | Convecção Profunda | |
| | Ondas de gravidade curtas | |
| Micro β | Térmicas | 20 m – 200 m |
| | Esteiras | |
| | Turbilhões | |
| Micro γ | Plumas | < 20 m |
| | Turbulência | |
| | Rugosidade | |

cala espacial “resolvida” do problema é da ordem de $\sqrt{2000\text{km}^2} \approx 45\text{km}$. Tudo o que ocorre abaixo desta escala precisa ser “parametrizado”, e jamais será conhecido explicitamente. Os modelos chuva-vazão em cada sub-bacia de 2000km^2 parametrizam os processos hidrológicos, inclusive o escoamento em calha, “levando-os” até as escalas (definidas individualmente pelas seções de rio onde há medição de vazão) em que há dados confiáveis disponíveis. Este tipo de raciocínio não se aplica somente à hidrologia. De fato, a ferramenta por excelência de identificação de fenômenos relevantes em geociências é a mesma análise de escalas que exemplificamos no parágrafo anterior. Por causa da importância de classificar fenômenos meteorológicos, Orlanski (1975) propôs uma classificação racional (macro, meso, micro) com subdivisões (α , β , γ), mostrada na Tabela 3.1.

A partir da Tabela 3.1, já podemos classificar as escalas relevantes para evaporação e evapotranspiração. Esses fenômenos dependem de:

- radiação solar,
- temperatura e umidade do ar,
- pressão atmosférica,
- velocidade do vento,
- tipo de superfície,
- tipo do solo,
- umidade do solo.

Todas estas grandezas exibem variabilidade na escala meso- β ou menor, conforme exemplificado na Figura 3.1, que mostra a variação da temperatura do ar no Estado do Paraná. Isso significa que evaporação e evapotranspiração são fenômenos de escala espacial igual ou inferior a meso- β .

Nos modelos de evaporação e evapotranspiração, a influência dos campos de radiação, temperatura, umidade, vento, bem como tipo de solo e uso do solo, são incluídos explicitamente (diretamente resolvidos). Os efeitos das escalas micro- β e micro- γ são em geral parametrizados nos modelos; eles são diretamente medidos no método de medição de covariâncias turbulentas (Stull, 1988; Brutsaert, 1982).

É importante observar que o modelo de evaporação/evapotranspiração a ser utilizado vai depender da escala do problema. Assim sendo, é de se esperar que o modelo para um campo de milho de $500 \times 500\text{m}^2$ seja diferente do modelo para uma bacia hidrográfica de 2000km^2 . Infelizmente para a hidrologia, é muito mais difícil coletar informação sobre evapotranspiração regional (de uma bacia hidrográfica) nas escalas de tempo desejáveis (de dias até meses) do que sobre evapotranspiração de culturas. Por este motivo, muitos modelos desenvolvidos para escalas espaciais relativamente pequenas ($< 1\text{ km}$) acabam sendo utilizados para estimativas de evaporação/evapotranspiração em escalas muito maiores. Esta é uma limitação que deve estar em mente na hora de aplicarmos os modelos.

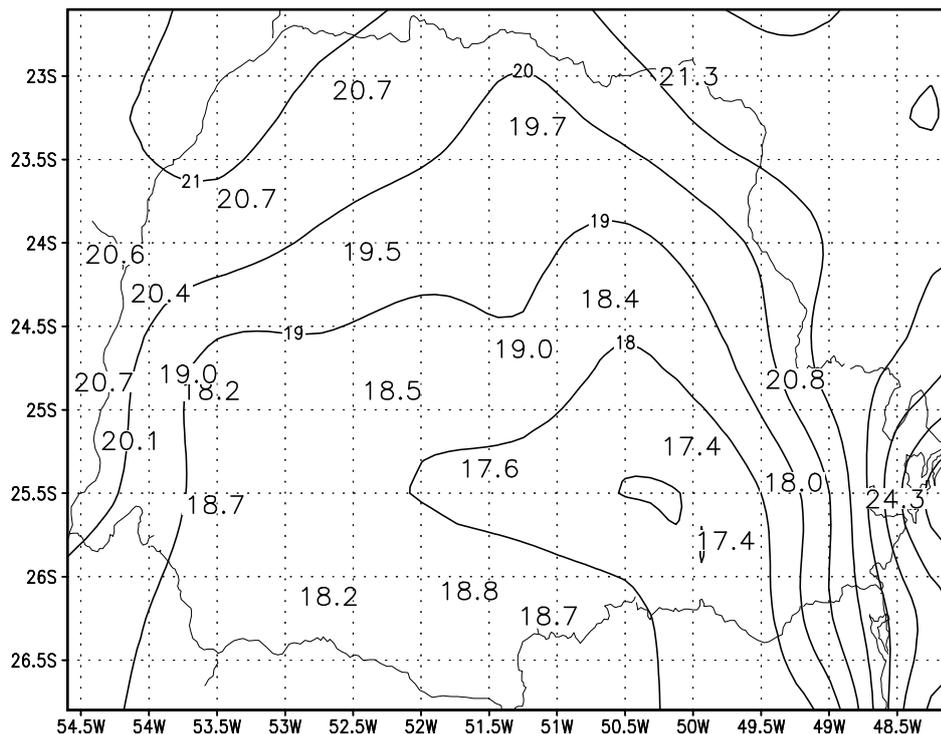


Figura 3.1: Variação da temperatura média horária no Estado do Paraná

Finalmente, note que registros contínuos de medição de evapotranspiração ou evaporação em lagos ainda são muito raros, e não há séries longas confiáveis que possam ser usadas em aplicações hidrológicas. Por este motivo, é preciso usar modelos de evaporação e evapotranspiração. Existem bons modelos para lagos baseados no método do balanço de energia que podem ser aplicados com sucesso quando há dados de perfis de temperatura da água (Reis, 1996; Reis e Dias, 1998; Dias e Kan, 2008); além disso, medições relativamente longas de evaporação em lagos, e de evapotranspiração, com o método de covariâncias turbulentas têm se tornado cada vez mais frequentes Blanken et al. (2000); Rouse et al. (2003); Dias e Malheiros (2003); Armani et al. (2020). A questão de estimativas de evapotranspiração é bem mais complexa, porque envolve a variação da umidade do solo durante o período de secamento após as chuvas. Consequentemente, a qualidade das estimativas de evapotranspiração não é tão boa. Uma forma de levar em conta o armazenamento gravitacional de água subterrânea, da região *saturada*, foi proposta por Dias e Kan (1999); a estimativa do armazenamento na região *vadosa*, entretanto, permanece (tanto quanto eu saiba) uma questão em aberto.

Fundamentos físicos

Unidades O fluxo vertical de uma grandeza qualquer a através de uma superfície plana S é por definição a quantidade de a que atravessa S por unidade de tempo. A evapo(transpi)ração entre a superfície da Terra e a atmosfera é um fluxo de massa; suas unidades SI são dadas por $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$. Expressa nestas unidades, o valor numérico de E é extraordinariamente

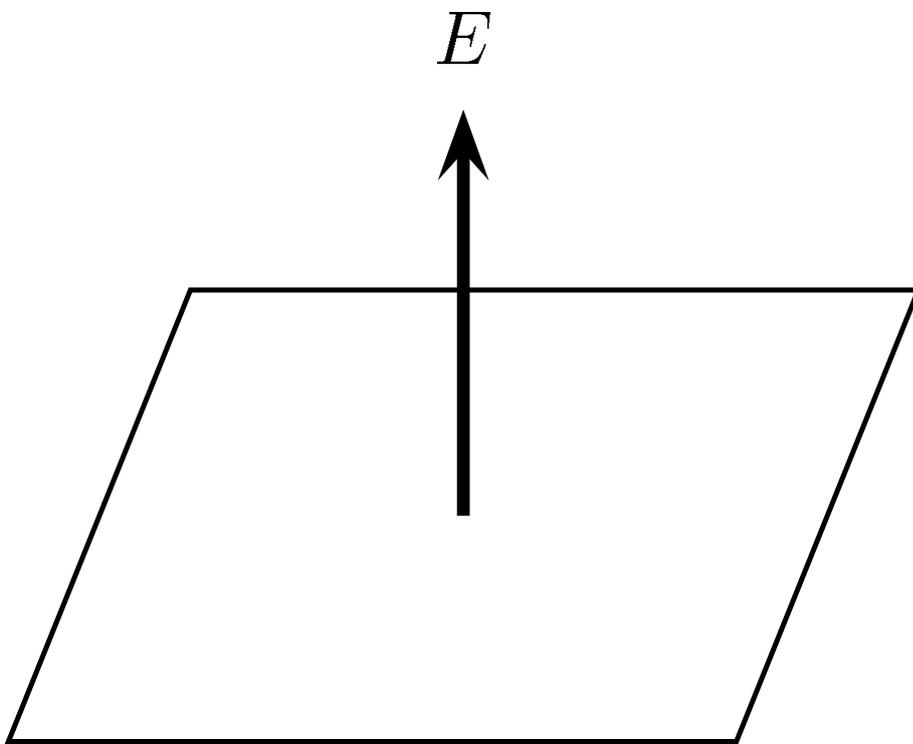


Figura 3.2: Fluxo de massa de vapor d'água através de uma superfície unitária.

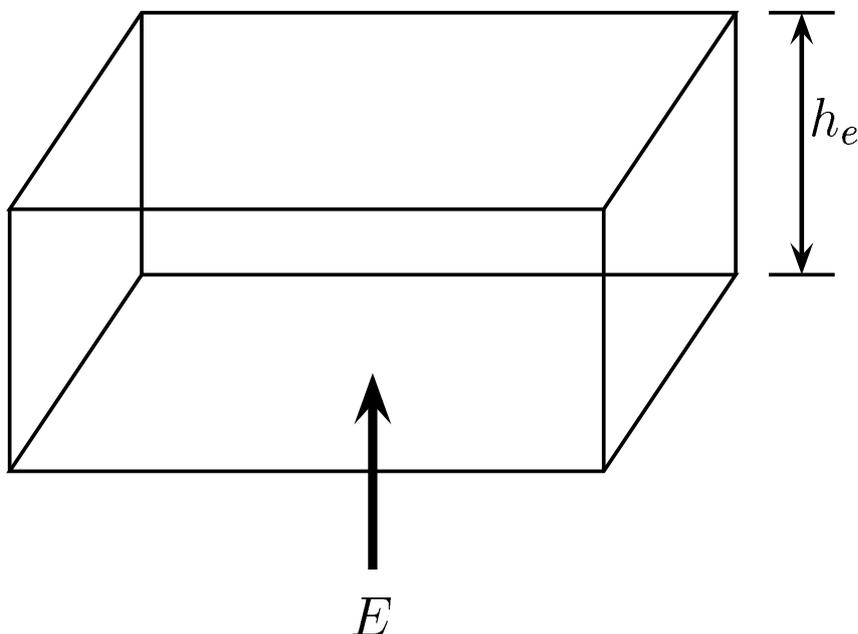


Figura 3.3: Conversão de evaporação de $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$ para mm.

pequeno. Em hidrologia, é usual expressar a evaporação em milímetros de altura de água acumulada equivalente h_E . A conversão é simples. Na Figura 3.3, M é a massa total de água evaporada ao longo de um intervalo de tempo Δt através de uma área unitária. Utilizando a densidade ρ_w da água líquida:

$$M = E\Delta t = \rho_w h_E \Rightarrow h_E = \frac{E\Delta t}{\rho_w} \times 1000.$$

O fator 1000 em (??) corresponde à conversão de metros para milímetros. Como $\rho_w = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, para obter h_E em mm basta multiplicar E pelo número de segundos do intervalo de tempo considerado.

Umidade atmosférica

Para calcular a pressão atmosférica média (em Pa) em uma estação em função da sua altitude Z (em m), use

$$p = 101325 \left(\frac{288,0 - 0,0065Z}{288,0} \right)^{5,256}.$$

Além dos índices de umidade que nós já vimos, às vezes é conveniente também definir a *temperatura de bulbo úmido* T_w , via:

$$e_a = e^*(T_w) - \gamma(T_a - T_w)$$

(Estou tentando ser consistente e usar símbolos “em Inglês”), onde $\gamma = (c_p p)/(0.622L_w)$ é a *constante psicrométrica*.

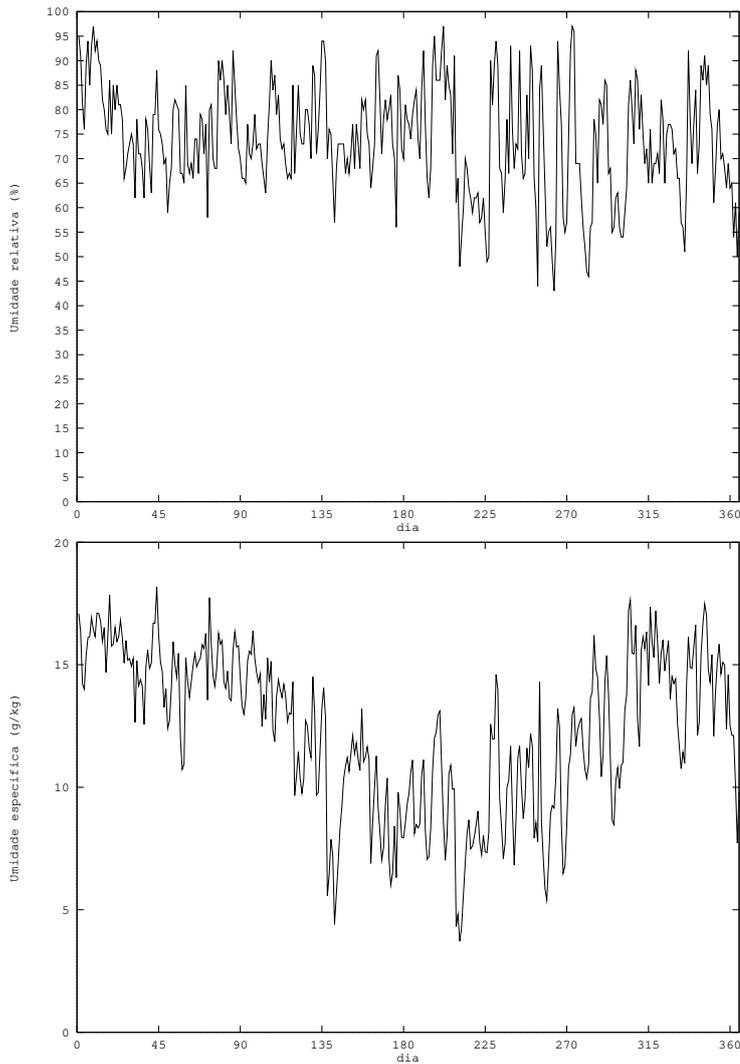
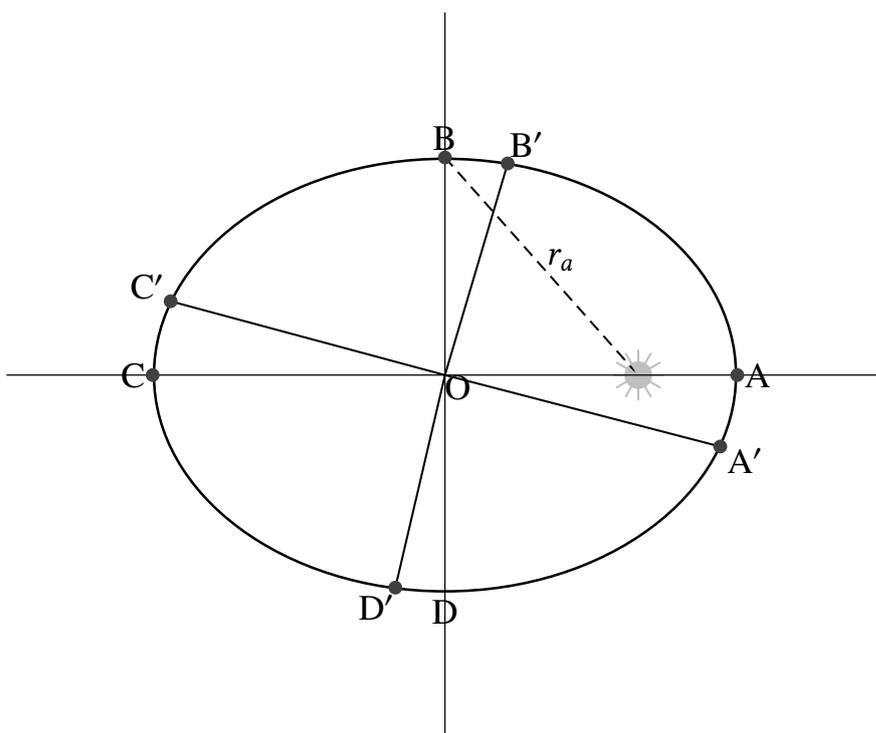


Figura 3.4: Umidade relativa, e umidade específica em Cambará (02350017), PR.

A umidade relativa não permite avaliar o conteúdo absoluto de umidade da atmosfera; ela serve mais como um indicador da sensação que temos da umidade do ar. Veja o exemplo da umidade relativa e da umidade específica em Cambará (PR) durante 1990, mostrados na Figura 3.4. A umidade relativa média diária praticamente não revela nenhuma sazonalidade, que no entanto fica clara no caso da umidade específica.

3.9 O movimento da Terra no espaço

A Terra gira em torno do Sol em uma trajetória aproximadamente elíptica. O plano da trajetória é chamado o plano da eclíptica. Na figura abaixo, a distância $OA = r_a$ é o semi-eixo maior do elipse. Ela é uma unidade de comprimento em astronomia: a Unidade Astronômica (AU).



A trajetória da Terra em torno do Sol.

Os pontos A, B, C, D, A', B', C' e D' são pontos notáveis do movimento anual do planeta Terra em torno do Sol. O ponto A marca o periélio, o ponto onde o planeta está mais próximo do Sol. De maneira similar, C marca o afélio, o ponto onde o planeta está mais distante do Sol. As datas para esses pontos variam ligeiramente de ano para ano. A Tabela a seguir, válida para 2020, foi obtida de [United States Naval Observatory \(2019\)](#).

Dias notáveis da órbita da Terra para 2020.

| Ponto | data/hora (UTC) | Nome |
|-------|-----------------------------|------------------------|
| A | Janeiro 5, 2020, 07:48 | Periélio |
| B | Abril 5, 2020, 19:48 | $r/r_a = 1$ |
| C | Julho 4, 2020, 11:35 | Afélio |
| D | Outubro 5, 2020, 19:48 | $r/r_a = 1$ |
| A' | Dezembro 21, 2020, 10:02 | Solstício de Inverno |
| B' | Março 20, 2020, 03:50 | Equinócio de Primavera |
| C' | Junho 20, 2020, 21:44 | Solstício de Verão |
| D' | Setembro 22, 2020 | Equinócio de Outono |

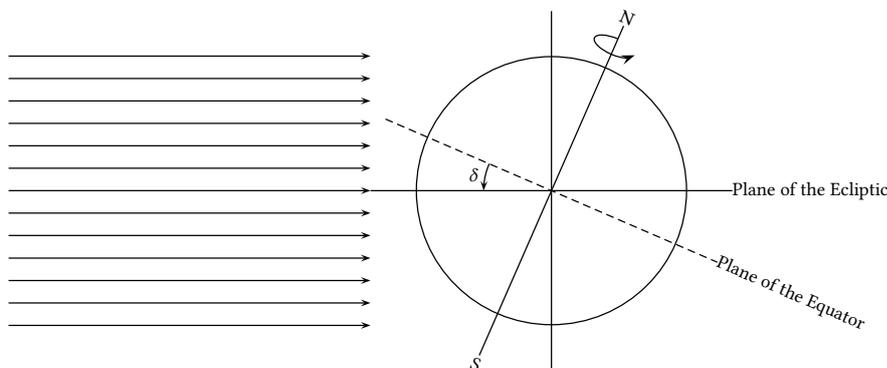
O material descrito aqui foi obtido a partir de várias fontes. Talvez a fonte mais importante seja [van Flandern e Pulkkinen \(1979\)](#) e um guia muito detalhado para o cálculo da declinação do Sol e da distância Sol-Terra pode ser encontrado em [Schlyter \(2019\)](#)

Na figura acima, o semi-eixo maior da elipse é r_a , e o semi-eixo menor é r_b . A distância entre o Sol e a Terra em qualquer ponto na trajetória é r . O valor de r_a é definido em astronomia como a *Unidade Astronômica*,

UA. A *declinação* do Sol em relação à Terra é o ângulo δ entre o plano do equador e do plano da Eclíptica, medido perpendicularmente a este último.

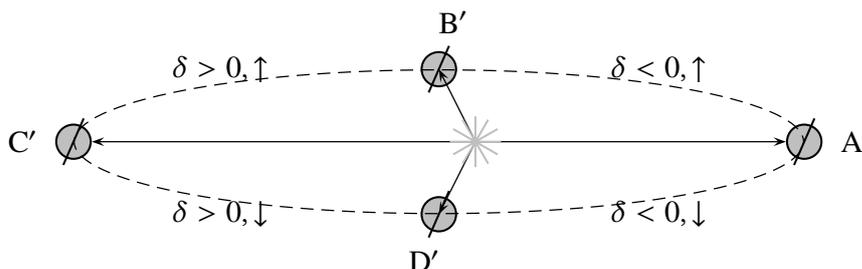
A principal causa para a mudança das estações não é a variação da distância Sol-Terra r , mas a inclinação do eixo de rotação do planeta em relação ao plano da eclíptica, e a conseqüente mudança na declinação do Sol.

Por exemplo, figura a seguir mostra a situação do planeta no que diz respeito à incidência de raios solares na época do Solstício de inverno (no hemisfério norte). Neste ponto da trajetória do planeta, a maior parte da a incidência de raios solares é sobre o Hemisfério Sul, onde é início de Verão. A situação oposta acontecerá no solstício de verão (do hemisfério norte).



The position of the planet Earth with respect to the incidence of the Sun's rays around the Northern Hemisphere Winter Solstice.

A situação ao longo do ano é mostrada na próxima figura. Note que a figura não está desenhada com precisão; no entanto ela mostra os elementos essenciais em termos de como a incidência dos raios de sol muda ao longo do ano. Os 4 pontos em destaque são os solstícios e os equinócios. Durante os solstícios, os raios do sol têm incidência máxima em um dos hemisférios, e isso determina a início do verão e do inverno. Por outro lado, nos equinócios, os raios solares incidem perpendicularmente ao equador (daí seus nomes).



The incidence of the rays of the Sun on the Earth around the year. The

sign of the Sun's declination δ is indicated between the points A', B', C' and D', as well as the sign of its rate of change, indicated as positive (\Uparrow) or negative (\Downarrow).

Fórmulas de precisão relativamente baixa para os valores de δ e r/r_a em determinada data são dadas por [van Flandern e Pulkkinen \(1979\)](#). Essas fórmulas estão convertidos em uma função em Python (ddse) na listagem 3.5.

Listing 3.5: sunearth.py – Calculation of distance and declination of Sun as a function of date.

```

1 from math import pi, modf, sin, cos, asin, sqrt, atan2
2 TwoPi = 2*pi
3 # -----
4 # ddse
5 #
6 # version: 2019-05-04T13:46:15
7 #
8 # -----
9 def ddse(yea,mon,day):
10     '''
11     ddse: declination and distance sun-earth a funcion of
12     (year, month, day)
13
14     based on
15
16     Van Flandern, T. C. and Pulkkinen, K. F. (1979) "Low Precision
17     Formulae for Planetary Positions" - The Astronomical Journal
18     Supplement Series, 41,391:411.
19     '''
20 # -----
21     assert(isinstance(yea,int))
22     assert(isinstance(mon,int))
23     assert(isinstance(day,int))
24 # -----
25 # At GMT noon: this is done with purely integer arithmetic
26 # -----
27     JD = 367 * yea - ( 7 * (yea + (mon + 9) // 12 ) // 4 ) \
28         + ( 275 * mon // 9 + day ) + 1721014
29     # JD = + 367 * yea \
30     #       - 7*(yea + (mon + 9)//12)/4 \
31     #       - 3*((yea + (mon - 9)//7)//100 + 1)//4 \
32     #       + 275*mon//9 + day + 1721029
33 # -----
34 # Obtains tee,
35 # TT == thousands of Julian years from 2000
36 # TC == hundreds of Julian years from 1900
37 # -----
38     tee = float(JD - 2451545.0 + 0.5) ;
39     #   TT = tee/365250.0
40     #   TC = tee/36525.0 + 1.0 ;
41     #   TC = 10.0*TM + 1.0
42 # -----
43 # other variables
44 # -----
45     LS = 0.779072 + 0.00273790931 * tee # mean longitude, Sun
46     GS = 0.993126 + 0.00273777850 * tee # mean anomaly, Sun
47     G5 = 0.056531 + 0.00023080893 * tee # mean anomaly, Jupiter
48     OM = 0.347343 - 0.00014709391 * tee # longitude of lunar ascending mode
49 # -----
50 # the eccentricity of the Earth comes from a different source:
51 # http://www.jgiesen.de/kepler/eccentricity.html
52 # -----
53     ec = +0.0167086342 - 0.0004203654*TT - 0.0000126734*TT**2 \
54     #       +0.0000001444*TT**3 -0.0000000002*TT**4 + 0.0000000003*TT**5
55 # -----
56 # extracts fractional part
57 # -----

```

```

58     (LS,ipart) = modf(LS)
59     (GS,ipart) = modf(GS)
60     (G5,ipart) = modf(G5)
61     (OM,ipart) = modf(OM)
62 # -----
63 # converts to radians
64 # -----
65     LS = LS * TwoPi
66     GS = GS * TwoPi
67     G5 = G5 * TwoPi
68     OM = OM * TwoPi
69 # -----
70 # obtains VS
71 # -----
72     VS = + 0.39785 * sin( LS ) \
73         - 0.01000 * sin( LS - GS ) \
74         + 0.00333 * sin( LS + GS ) \
75         - 0.00021 * TC * sin( LS ) \
76         + 0.00004 * sin( LS + 2.0 * GS ) \
77         - 0.00004 * cos( LS ) \
78         - 0.00004 * sin( OM - LS ) \
79         + 0.00003 * TC * sin( LS - GS )
80 # -----
81 # obtains US
82 # -----
83     US = + 1.0 \
84         - 0.03349 * cos( GS ) \
85         - 0.00014 * cos( 2.0 * GS ) \
86         + 0.00008 * TC * cos( GS ) \
87         - 0.00003 * sin( GS - G5 )
88 # -----
89 # Sun's declination
90 # -----
91     delta = asin( VS / sqrt(US) ) ;
92 # -----
93 # distance Sun-Earth in the form (r/a) where a is the length
94 # of the largest semi-axis of the Earth's orbit, i.e.: the equivalent
95 # to one astronomical unit, and r is the Sun-Earth distance
96 # -----
97     rr = 1.00021 * sqrt( US )
98     return (delta,rr)
99
100 # -----
101 # sunman
102 #
103 # version of 2019-04-23T09:58:05
104 # -----
105 def sunman(yea,mon,day,sec=0.0):
106     '''
107     sunman: only the sun mean anomaly a funcion of (year, month,day)
108
109     based on
110
111     Van Flandern, T. C. and Pulkkinen, K. F. (1979) "Low Precision
112     Formulae for Planetary Positions" - The Astronomical Journal
113     Supplement Series, 41,391:411.
114     '''
115 # -----
116     assert(isinstance(yea,int))
117     assert(isinstance(mon,int))
118     assert(isinstance(day,int))
119 # -----
120 # At GMT noon: this is done with purely integer arithmetic
121 # -----
122     JD = + 367 * yea \
123         - 7*(yea + (mon + 9)/12)/4 \
124         - 3*((yea + (mon - 9)/7)/100 + 1)/4 \
125         + 275*mon/9 + day + 1721029
126 # -----
127 # trying to get more accuracy by calculating seconds
128 # -----
129     JD = float(JD + sec/86400.0)
130 # -----

```

```

131 # Obtains tee,
132 # -----
133     tee = float(JD - 2451545.0) ;
134 # -----
135 # other variables
136 # -----
137     GS = 0.993126 + 0.00273777850 * tee # mean anomaly, Sun
138     (GS,ipart) = modf(GS)
139 # -----
140 # converts to radians
141 # -----
142     GS = GS * TwoPi
143     return(GS)

```

Alternativamente, fórmulas ainda mais simples são dadas por Stull (1995). A declinação do sol é

$$\delta = 0,409 \cos \left(2\pi \frac{d - d_r}{d_a} \right),$$

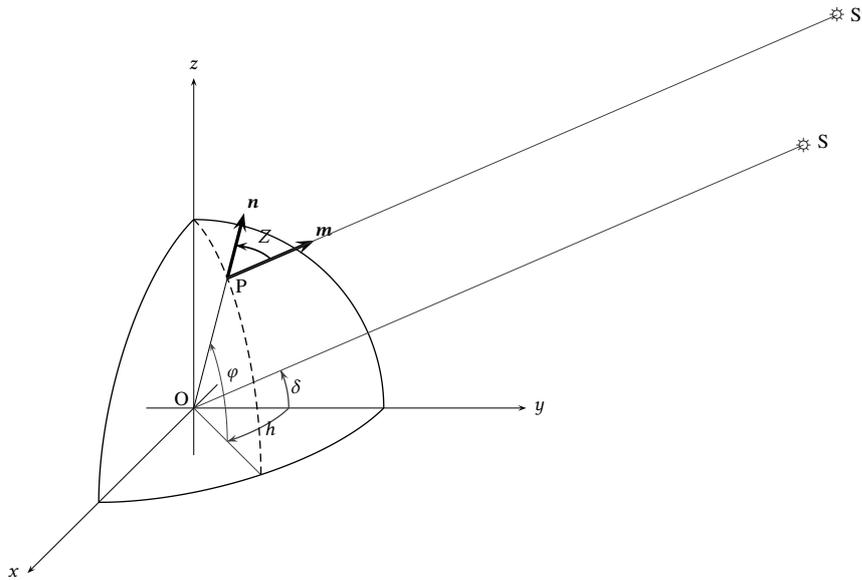
onde $d_a = 365$ ou 366 é o número de dias do ano, $d_r = 173$ ou 174 é o dia corrido do ano correspondente a 22 junho (solstício de inverno) e d é o dia corrido do ano entre 1 e 365 ou 366 dependendo de o ano ser ou não bissexto. Todos os ângulos estão em radianos. A distância sol-terra em unidades astronômicas é

$$\frac{r}{r_a} = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \left(2\pi \frac{d - d_p}{d_a} \right)}$$

onde $e = 0,0167$ é a excentricidade da órbita terrestre, e $d_p = 3$ é o dia corrido do ano correspondente ao perihélio.

A declinação do Sol vista da Terra

A figura a seguir mostra a incidência dos raios do sol vistos da Terra. O plano do equador é Oxy , e Oyz é perpendicular ao plano da eclíptica, o que não é mostrado, mas contém a linha OS ligando o centro da Terra ao centro do Sol: a declinação do Sol δ é o ângulo entre os planos da eclíptica e do Equador, e está indicada na figura. O Sol está muito longe, e podemos supor que seus raios incidem paralelamente sobre a Terra. No ponto P na superfície do Terra, um raio vem ao longo de PS' , e o Sol é efetivamente visto como na posição S' . A posição de P é dada pelo *ângulo horário* h , que é a distância angular até o meio-dia solar, e a latitude φ .



The declination of the Sun.

A vertical através P é dada pelo vetor unitário \mathbf{n} , e a direção para o Sol em P é dada pelo vetor unitário \mathbf{m} . Por definição, o ângulo zenital Z é o ângulo entre \mathbf{m} e \mathbf{n} . A partir da figura acima, obtém-se

$$\begin{aligned}\mathbf{m} &= (0, \cos \delta, \operatorname{sen} \delta), \\ \mathbf{n} &= (\cos \varphi \operatorname{sen} h, \cos \varphi \cos h, \operatorname{sen} \varphi),\end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \cos Z = \cos \delta \cos \varphi \cos h + \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varphi.$$

Várias relações úteis podem ser deduzidas a partir da equação acima:

- a) O ângulo H varrido entre o nascer do sol, quando $\mathbf{n} \parallel Oxz$ e $\cos Z = 0$, e o meio-dia solar é dado por

$$\begin{aligned}0 &= \cos \delta \cos \varphi \cos H + \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varphi \Rightarrow \\ \cos H &= -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta.\end{aligned}$$

A partir da equação acima, obtém-se o comprimento do dia em horas, N :

$$\frac{H}{\pi/2} = \frac{N}{12} \Rightarrow N = \frac{24H}{\pi}.$$

- b) A latitude φ_p da noite polar é o ponto em que $H = 0$:

$$\operatorname{tg} \varphi_p = -\operatorname{cotg} \delta \Rightarrow \varphi_p = \frac{\pi}{2} - \delta.$$

- c) Nos polos,

$$\cos Z = \operatorname{sen} \delta \Rightarrow \frac{\pi}{2} - Z = \delta,$$

de forma que a elevação do Sol é praticamente constante durante o dia.

d) Ao meio-dia solar,

$$\begin{aligned}
 \cos h &= 1, \\
 \cos Z &= \cos \delta \cos \varphi + \sin \delta \sin \varphi \\
 &= \cos(\varphi - \delta) \Rightarrow \\
 Z &= \varphi - \delta.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Radiação

O fluxo de energia por unidade de área associado com diferentes comprimentos de onda é chamado *irradiância*, e dado em unidades de W m^{-2} no SI. O comprimento de onda da radiação depende da temperatura do corpo emissor; à temperatura T , um corpo negro emite um espectro de radiação cujo pico é dada pela lei de Wien,

$$\lambda_m = \frac{\alpha}{T}, \tag{3.7}$$

onde $\alpha = 2897.0 \mu\text{m K}$ (Fleagle e Businger, 1980, p. 217).

A radiação solar, emitida pelo sol a uma temperatura de cerca de 6000 K, abrange uma gama de comprimentos de onda $\lambda \sim 0.3\text{--}3 \mu\text{m}$, e atinge o topo da atmosfera da Terra. A *constante solar* $R_{s0} \approx 1361.5 \text{ W m}^{-2}$ é a irradiância na direção dos raios do sol a uma distância de 1 UA = r_a do Sol. A irradiância numa direção perpendicular ao topo da atmosfera em um determinado dia e latitude é a *irradiância solar extra-atmosférica*, e é dada por

$$R_{sea} = R_{s0} \left(\frac{r_a}{r} \right)^2 \cos Z.$$

O valor médio de R_{sea} ao longo de 24 horas é uma quantidade útil, que pode mais tarde ser usada para estimar a irradiância solar R_s média diária que atinge a superfície da Terra.

$$\begin{aligned}
 R_{sea}(t) &= R_{s0} \left(\frac{r_a}{r} \right)^2 [\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos h(t)]; \\
 \langle R_{sea} \rangle &= \frac{1}{D} \int_0^T R_{sea}(t) dt,
 \end{aligned}$$

onde $D = 86400 \text{ s}$ é a duração do dia, e T é a duração do brilho solar, com o tempo t medido do nascer até o por do sol. Mas

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{2\pi}{\omega}, \\
 \omega dt &= dh,
 \end{aligned}$$

onde ω é a velocidade angular da Terra, donde

$$\begin{aligned}
 \langle R_{sea} \rangle &= \int_{-H}^{+H} \frac{\omega}{2\pi} R_{s0} \left(\frac{r_a}{r} \right)^2 [\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos h(t)] \frac{dh}{\omega} \\
 &= \left(\frac{r_a}{r} \right)^2 \frac{R_{s0}}{\pi} [H \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \sin H].
 \end{aligned}$$

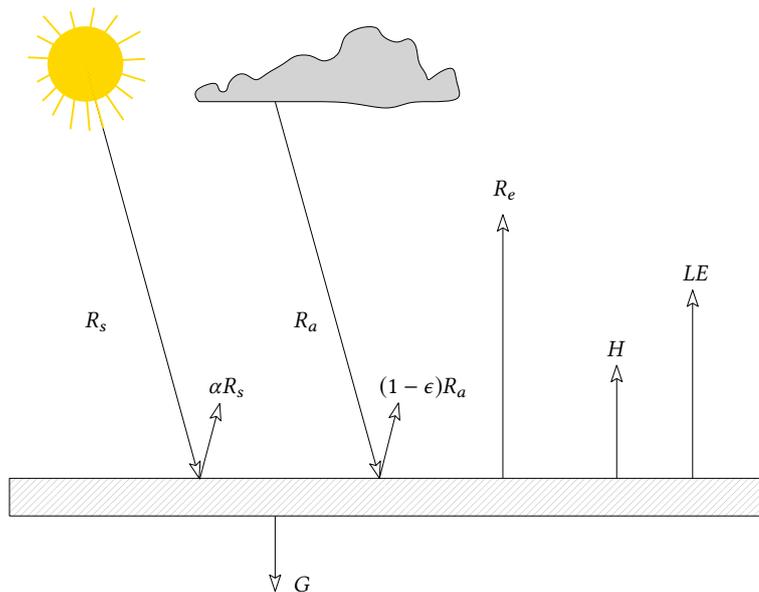
A irradiância solar ou irradiância de *ondas curtas* R_s atingindo a superfície do Terra é na maior parte do tempo menor que R_{sea} . Idealmente, ela deveria ser medida diretamente com *piranômetros*, mas historicamente tem sido estimada por medições de *duração do brilho intenso do sol* n (geralmente em horas), através da equação de Prescott (Brutsaert, 1982):

$$\langle R_s \rangle = \langle R_{sea} \rangle \left[a + b \frac{n}{N} \right],$$

com $a \sim 0.25$ e $b \sim 0.50$, e onde N é a duração do brilho do sol (o fotoperíodo): o tempo decorrido entre o nascer e o por do sol. Note que a equação de Prescott não é capaz de prever valores de R_s em uma escala de ~ 1 h, mas apenas a média de 24 horas, porque a duração do brilho intenso do sol é uma medição integral (diária).

Além de radiação solar, a superfície da Terra também recebe radiação emitida pela atmosfera, em comprimentos de onda $\lambda \sim 3-100 \mu\text{m}$, devido ao fato de que as fontes emissoras estão a temperaturas da ordem de 300 K. Esta irradiância de *ondas longas* ou *atmosférica* que atinge a superfície é R_a . Finalmente, a própria superfície re-emite radiação de volta para a atmosfera; esta é a irradiância emitida R_e .

A Figura a seguir mostra (de novo) esquematicamente o balanço de energia na superfície da terra.



A razão entre a irradiância solar refletida e a irradiância radiação solar incidente é o *albedo* α da superfície; e a razão entre a irradiância atmosférica absorvida e a irradiância atmosférica incidente é a *absortividade / emissividade* ϵ da superfície. A irradiância *líquida* é o fluxo total de energia absorvida por unidade de área da superfície:

$$R_n = R_s(1 - \alpha) + \epsilon R_a - R_e.$$

Radiação atmosférica

A estimativa da irradiância atmosférica (de onda longa) incidente é um assunto complicado. Ele geralmente é dividido em duas partes: a estimativa da irradiância atmosférica céu claro, R_{ac} , e a estimativa do aumento

de irradiância atmosférica devido a presença de nuvens. irradiância atmosférica de céu claro é geralmente obtida a partir de equações com o forma

$$R_{ac} = \epsilon_{ac} \sigma T_a^4,$$

que é obviamente inspirada pela lei de Stefan-Boltzmann para um corpo cinza. Ela parece ter tido uma origem estritamente empírica no trabalho de [Brunt \(1932\)](#), na forma

$$\epsilon_{ac} = 0.52 + 0.0065 \sqrt{e_a}.$$

(Em unidades SI), mas pode ser obtida a partir das equações para a transferência radiativa na atmosfera sob certas premissas simplificadoras. Talvez a maneira mais clara, e um das mais simples, de deduzi-la seja a de [Brutsaert \(1975a\)](#). Em princípio, a radiação de onda longa que atinge a superfície pode ser encontrada integrando-se a equação de Schwarzschild

$$dI_\lambda = -k_\lambda(I_\lambda - B_\lambda(T)),$$

onde I_λ é a irradiância no comprimento de onda λ atravessando a atmosfera. Mas uma alternativa que produz um resultado analítico mais direto é uma integral sobre o caminho ótico u ,

$$R_{ac} = \int_0^\infty \sigma T^4 \frac{d\epsilon_f}{du} du.$$

Considere agora uma distribuição exponencial de temperatura na atmosfera,

$$T(z) = T_0 \exp\left(-\frac{\gamma z}{T_0}\right)$$

com $\gamma = 6.5 \text{ K km}^{-1}$ e $T_0 = 288.15 \text{ K}$. Em primeira aproximação,

$$\frac{dT}{dz} = -\gamma,$$

de forma que

$$\begin{aligned} p &= \rho R_d T, \\ dp &= -\rho g dz, \\ \frac{dp}{p} &= \frac{g}{R_d T} dz = \frac{g}{\gamma R_d} \frac{dT}{T}, \\ \frac{p}{p_0} &= \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{g}{\gamma R_d}}. \end{aligned}$$

Para o vapor d'água,

$$\begin{aligned} e_0 &= \rho_{v0} R_v T, \\ \rho_{v0} &= \frac{e_0}{R_v T_0}, \\ \rho_v(z) &= \rho_{v0} \exp(-k_w z), \end{aligned}$$

com $k_w = 4.4 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$. Em [Brutsaert \(1975a\)](#), A emissividade efetiva ϵ_f é dada em função do caminho ótico

$$u = \int_0^z \rho_v(\zeta) \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/2} d\zeta$$

por

$$\epsilon_f = Aa^m,$$

com $A = 0.75$, $m = 1/7$ e

$$a = \frac{u}{\rho_w}$$

em centímetros equivalentes de água (com $\rho_w = 1 \text{ g cm}^{-3}$). Parece preferível, entretanto, usar uma versão em que fatores adimensionais aparecem mais claramente. Fazemos portanto

$$\epsilon_f(u) = \left(\frac{u}{u_0} \right)^m.$$

Então, obtemos a partir das equações acima

$$u_0 = (0.75)^{-1/7} = 7.491541 \text{ g cm}^{-2} = 74.91541 \text{ kg m}^{-2}.$$

Diferenciando $\epsilon_f(u)$,

$$\frac{d\epsilon_f}{du} = \frac{m}{u_0} \left(\frac{u}{u_0} \right)^{m-1},$$

e substituindo na integral para R_{ac} ,

$$\begin{aligned} R_{ac} &= \int_{u=0}^{\infty} \sigma \left(T_0 e^{-\gamma z/T_0} \right)^4 \frac{m}{u_0} \left(\frac{u}{u_0} \right)^{m-1} du \\ &= \int_{z=0}^{\infty} \sigma T_0^4 e^{-4\gamma z/T_0} \frac{m}{u_0} \left(\frac{1}{u_0} \int_{\zeta=0}^z \rho_{v0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/2} d\zeta \right)^{m-1} \rho_v \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/2} dz. \end{aligned}$$

Prosseguindo,

$$\begin{aligned} R_{ac} &= \int_{z=0}^{\infty} \sigma T_0^4 e^{-4\gamma z/T_0} \frac{m}{u_0} \left(\frac{1}{u_0} \int_{\zeta=0}^z \rho_{v0} e^{-k_w \zeta} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{g/(2\gamma R_d)} d\zeta \right)^{m-1} \rho_{v0} e^{-k_w z} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{g/(2\gamma R_d)} dz \\ &= \int_{z=0}^{\infty} \sigma T_0^4 e^{-4\gamma z/T_0} \frac{m}{u_0} \left(\frac{1}{u_0} \int_{\zeta=0}^z \rho_{v0} e^{-\left(k_w + \frac{g}{2R_d T_0}\right)\zeta} d\zeta \right)^{m-1} \rho_{v0} e^{-\left(k_w + \frac{g}{2R_d T_0}\right)z} dz \\ &= m \left(\frac{\rho_{v0}}{u_0} \right)^m \sigma T_0^4 \int_{z=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{4\gamma}{T_0} + k_w + \frac{g}{2R_d T_0}\right)z} \left(\int_{\zeta=0}^z e^{-\left(k_w + \frac{g}{2R_d T_0}\right)\zeta} d\zeta \right)^{m-1} dz. \end{aligned}$$

Para simplificar a notação um pouco, façamos

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{4\gamma}{T_0} + k_w, \\ k_2 &= k_w + \frac{g}{2R_d T_0}; \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} R_{ac} &= m \left(\frac{\rho_{v0}}{u_0} \right)^m \sigma T_0^4 \int_{z=0}^{\infty} e^{-k_1 z} \left(\int_{\zeta=0}^z e^{-k_2 \zeta} d\zeta \right)^{m-1} dz \\ &= m \left(\frac{\rho_{v0}}{u_0 k_2} \right)^m \sigma T_0^4 \int_{z=0}^{\infty} e^{-k_1 z} \left(1 - e^{-k_2 z} \right)^{m-1} k_2 dz. \end{aligned}$$

Agora nós fazemos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} t &= e^{-k_2 z}, \\ dt &= -k_2 e^{-k_2 z} dz, \end{aligned}$$

e obtemos

$$\begin{aligned} R_{ac} &= m \left(\frac{\rho_{v0}}{u_0 k_2} \right)^m \sigma T_0^4 \int_{z=\infty}^0 \left(e^{-k_2 z} \right)^{\frac{k_1}{k_2} - 1} \left(1 - e^{-k_2 z} \right)^{m-1} k_2 \left(-e^{-k_2 z} \right) dz \\ &= m \left(\frac{\rho_{v0}}{u_0 k_2} \right)^m \sigma T_0^4 \int_{t=0}^1 t^{\frac{k_1}{k_2} - 1} (1 - t)^{m-1} dt \\ &= \underbrace{\left[m \left(\frac{e_0}{u_0 k_2 R_v T_0} \right)^m B \left(\frac{k_1}{k_2}, m \right) \right]}_{\epsilon_{ac}} \sigma T_0^4. \end{aligned}$$

No SI, a equação de Brutsaert é

$$\epsilon_{ac} = 0.64 \left(\frac{e_a}{T_a} \right)^{1/7}.$$

Efeito da nebulosidade sobre a irradiância atmosférica.

A irradiância atmosférica aumenta na presença de nuvens. Uma forma de considerar esse efeito é propor

$$R_a = \phi R_{ac},$$

onde ϕ é alguma função de um índice de nebulosidade. A equação de Bolz, em termos da cobertura de nuvens c , é

$$\phi = 1 + 0.22c^2 \quad (3.8)$$

A nebulosidade é reportada em estações meteorológicas operadas manualmente em *oktas*, ou oitavos de céu coberto por nuvens [Wikipedia \(2019\)](#). Quando c não está disponível, um substituto é

$$c = 1 - n/N, \quad (3.9)$$

onde n e N foram definidos acima. Da mesma forma que a equação de Prescott, o par de equações acima só pode ser usado para produzir estimativas médias diárias.

Equações mais recentes têm sido desenvolvidas para estimar ϕ em escala horária, e podem ser encontradas, por exemplo, em [Duarte et al. \(2006\)](#).

Radiação emitida

Finalmente, a irradiância emitida pela superfície (quando esta está à temperatura T_0) é

$$R_e = \epsilon \sigma T_0^4.$$

A tabela a seguir dá as propriedades radiativas de diversos tipos de superfície:

Propriedades radiativas de diversas superfícies Fonte: Brutsaert (1982), Garratt (1994), Oke (1987) e Stull (1995)

| Superfície | Tipo | Albedo | Emissividade |
|-------------------|-------------------------|-------------|--------------|
| 1. Solos | Escuro e saturado | 0,05 – 0,15 | 0,98 |
| | Areia, saturado | 0,15 – 0,25 | 0,98 |
| | Argila, saturado | 0,15 – 0,20 | 0,97 |
| | Areia, seco | 0,20 – 0,40 | 0,95 |
| | Argila, seco | 0,20 – 0,35 | 0,95 |
| | Deserto | 0,20 – 0,45 | 0,84 – 0,91 |
| 2. Vegetação | | | |
| 2.1 Florestas | Tropicais | 0,07 – 0,15 | 0,97 – 0,99 |
| | Coníferas | 0,10 – 0,19 | 0,97 – 0,99 |
| | Decíduas, caducas | 0,14 – 0,20 | 0,96 – 0,98 |
| | Cobertas de neve | 0,20 – 0,30 | 0,97 – 0,99 |
| 2.2 Agricultura | Pomares | 0,15 – 0,20 | 0,96 – 0,97 |
| | Soja, batata, alfafa... | 0,15 – 0,25 | 0,97 – 0,98 |
| 2.3 Rasteira | Tundras, gramíneas | 0,18 – 0,25 | 0,90 |
| 2.4 Cerrado | Campinas, padarias | 0,20 – 0,30 | 0,90 – 0,95 |
| 2.5 Grama e capim | Alto e médio | 0,15 – 0,30 | 0,90 – 0,95 |
| | Baixo | 0,15 – 0,25 | 0,90 – 0,95 |
| 3. Oceano e lagos | Pequeno ângulo zenital | 0,03 – 0,10 | 0,92 – 0,97 |
| | Grande ângulo zenital | 0,10 – 1,00 | 0,92 – 0,97 |
| 4. Neve | Recente | 0,65 – 0,95 | 0,95 |
| | Velha | 0,45 – 0,65 | 0,90 |
| 5. Gelo | Calotas polares | 0,30 – 0,45 | 0,92 – 0,97 |
| | Geleiras | 0,20 – 0,40 | 0,96 |
| 6. Construções | Área urbana | 0,15 | 0,85 – 0,95 |
| | Asfalto | 0,05 – 0,15 | 0,95 |
| | Concreto | 0,15 – 0,37 | 0,71 – 0,90 |

A tabela a seguir mostra alguns valores anuais de a , b que têm sido utilizados em diversos estudos no Brasil.

Valores dos parâmetros a , b da equação de Prescott para várias localidades do Brasil. Fontes: Vianello e Alves (1991), Tubelis e Nascimento (1984), Laperuta *et al.*(1997), Silva *et al.*(1997), Reis (1996).

| Localidade | Lat. | Long. | <i>a</i> | <i>b</i> |
|-----------------------------|-----------|-----------|----------|----------|
| Bagé RS | 31° 20' S | 54° 06' O | 0,250 | 0,380 |
| Botucatu SP | 22° 52' S | 48° 26' O | 0,244 | 0,471 |
| Brasília DF | 15° 47' S | 47° 56' O | 0,279 | 0,459 |
| Campinas SP | 22° 53' S | 47° 04' O | 0,230 | 0,560 |
| Cananéia SP | 25° 00' S | 47° 55' O | 0,214 | 0,852 |
| Caxias do Sul RS | 29° 11' S | 51° 12' O | 0,250 | 0,530 |
| Encruzilhada do Sul RS | 30° 31' S | 52° 30' O | 0,230 | 0,540 |
| Estado de São Paulo | | | 0,240 | 0,580 |
| Estado do Rio Grande do Sul | | | 0,230 | 0,460 |
| Fortaleza CE | 03° 43' S | 38° 32' O | 0,270 | 0,360 |
| Irecê BA | 11° 19' S | 41° 52' O | 0,330 | 0,330 |
| João Pessoa PB | 07° 07' S | 34° 52' O | 0,280 | 0,360 |
| Mococa SP | 21° 28' S | 47° 00' O | 0,400 | 0,410 |
| Monte Alegre do Sul SP | 22° 40' S | 46° 40' O | 0,190 | 0,610 |
| Paulo Afonso BA | 09° 21' S | 38° 15' O | 0,310 | 0,330 |
| Passo Fundo RS | 28° 15' S | 52° 24' O | 0,180 | 0,400 |
| Pelotas RS | 31° 45' S | 52° 19' O | 0,350 | 0,460 |
| Petrolina PE | 09° 23' S | 40° 29' O | 0,330 | 0,410 |
| Pindamonhangaba SP | 22° 53' S | 45° 27' O | 0,280 | 0,560 |
| Piracicaba SP | 22° 42' S | 47° 38' O | 0,180 | 0,620 |
| Presidente Prudente SP | 22° 07' S | 51° 22' O | 0,190 | 0,390 |
| Propriá SE | 10° 12' S | 36° 52' O | 0,320 | 0,370 |
| Rio Grande RS | 32° 31' S | 52° 05' O | 0,160 | 0,690 |
| Salvador BA | 12° 58' S | 38° 31' O | 0,290 | 0,390 |
| São Luiz MA | 02° 32' S | 44° 18' O | 0,260 | 0,330 |
| São Luiz Gonzaga RS | 28° 24' S | 54° 57' O | 0,300 | 0,290 |
| Serra Azul MG | 19° 58' S | 44° 21' O | 0,234 | 0,377 |
| Teresina PI | 05° 05' S | 42° 48' O | 0,310 | 0,370 |
| Viçosa MG | 20° 45' S | 42° 53' O | 0,230 | 0,376 |

Agora, o balanço de energia na superfície é dado por

$$R_{n0} = H + LE + G + D.$$

O índice 0 de R_{n0} é uma novidade e indica que a superfície encontra-se à temperatura real T_0 . Esta equação define os processos fundamentais de troca de energia na superfície. A radiação líquida é repartida entre o fluxo de calor sensível (H) que vai aquecer o ar; o fluxo de calor latente (LE) responsável pela mudança de fase da água líquida em vapor na superfície; o fluxo de calor pelo fundo do volume de controle subsuperficial (G); e o termo D de aquecimento/resfriamento do volume de controle. Em terra,

podemos considerar um volume de controle subsuperficial de espessura infinitesimal, e desprezar D ; em lagos, D representa o aquecimento/resfriamento das águas do lago, e G é o fluxo de calor através do fundo do lago, sendo muitas vezes desprezado. Quando G não é medido em terra, é comum adotar-se as seguintes simplificações (Brutsaert, 1982; Stull, 1995): a nível horário,

$$G \approx 0.3R_{n0};$$

a nível diário ou sobre escalas temporais maiores, G tende a ser uma ou mais ordens de grandeza menor que os demais termos da equação de balanço de energia, e conseqüentemente pode ser desprezado (Brutsaert, 1982). Finalmente, para calcular D em lagos, é preciso levar em conta os seguintes fatores (Dias e Reis, 1996):

1. é preciso usar o teorema do transporte de Reynolds para calcular o balanço de entalpia armazenada na água a partir de perfis de temperatura da água sucessivos no tempo;
2. a sua importância é tanto maior quanto mais fundo for o lago — para lagos muito rasos, D pode ser desprezado;
3. a profundidade também afeta o intervalo mínimo de tempo necessário entre medições sucessivas para que a estimativa de D seja acurada.

Para o caso simples em que a advecção de entalpia não é importante, e os níveis do lago no início e no fim de um período Δt entre duas medições sucessivas de perfis de temperatura da água não são muito diferentes, Dias e Reis obtiveram

$$\langle D \rangle \approx \frac{1}{A_s \Delta t} \int_{z_f}^z \rho_w c_w [T(z, t + \Delta t) - T(z, t)] A(z) dz,$$

onde $\langle \cdot \rangle$ indica uma média de D sobre Δt , c_w é o calor específico da água ($\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$), $A(z)$ é a curva cota-área, z é o mínimo entre os níveis inicial e final do reservatório, z_f é a cota do fundo e $T(z, t)$, $T(z, t + \Delta t)$ são os perfis de temperatura da água.

A temperatura da superfície T_0 pode ser medida quando a superfície for líquida. Sobre superfícies terrestres, a temperatura da superfície é um parâmetro cuja definição é problemática, já que a “superfície” é formada por folhas, galhos, solo nu, etc., entremeados pelo ar. Algumas alternativas para eliminar a temperatura da superfície das equações serão mencionadas na sequência, principalmente em relação à equação de Penman. Com os termos do balanço de energia estimados (de alguma forma), duas grandezas adimensionais importantes são a Razão de Bowen

$$Bo = \frac{H}{LE}$$

e a Fração Evaporativa

$$Fe = \frac{LE}{R_{l0} - G - D}.$$

Repartição de energia e importância da evaporação e evapotranspiração

A razão de Bowen e a fração evaporativa dependem fortemente do tipo de superfície e do estado de umidade do solo. Quando há umidade disponível na superfície, a radiação líquida tende a ser utilizada para evapo(transpi)ração, e LE torna-se bem maior que H . Quando a umidade fica restrita, a proporção de H no balanço de energia aumenta (Brubaker e Entekhabi, 1995, 1996). Desta forma a razão de Bowen é pequena para superfícies líquidas, florestas úmidas, etc., e bem maior para campos ou solo nu com pouca umidade. Um outro aspecto que merece nota é a importância da evaporação/evapotranspiração no ciclo hidrológico como um todo: note na tabela a seguir que mais de 50% do que chove sobre os continentes retorna à atmosfera por evapo(transpi)ração. Note também dois outros fatos significativos: a América do Sul é extraordinariamente mais bem provida de chuva do que os outros continentes, o que certamente tem a ver com a Amazônia; e em continentes com vastas áreas de deserto (África e Oceania), a relação E/P tende a ser maior (o que é intuitivo).

Precipitação e evaporação continentais Fonte: Brutsaert (1982)

| | Europa | Ásia | África | Am. N. | Am. S. | Oceania |
|----------------|--------|------|--------|--------|--------|---------|
| $P(\text{mm})$ | 734 | 726 | 686 | 670 | 1648 | 736 |
| $E(\text{mm})$ | 415 | 433 | 547 | 383 | 1065 | 510 |
| E/P | 0.57 | 0.60 | 0.80 | 0.57 | 0.65 | 0.69 |

A tabela acima deve ser encarada com circunspeção, por se tratar de uma média sobre cada continente. Os valores individuais de E e P podem variar significativamente no espaço, mesmo sobre uma região do tamanho do estado do Paraná. Segundo Dias e Kan (1998), E/P é da ordem de 0,5 na bacia do rio Jangada, tributário do rio Iguaçu, ao Sul do Estado do Paraná, onde a precipitação é bem distribuída ao longo do ano, e a umidade e nebulosidade são altas; na bacia do rio das Cinzas, no norte do estado, $E/P \sim 0,25$ (embora não se possa eliminar totalmente a hipótese de que haja perdas subterrâneas, que distorçam a estimativa de E por balanço hídrico).

3.10 Os fundamentos físicos dos métodos de medição de evaporação

Balanço de massa

Considere um volume de controle dentro do qual a massa de água armazenada é S . Se Q_e é a vazão líquida efluente, P é a precipitação e E a evaporação/evapotranspiração através da superfície superior de área horizontal A ,

$$\frac{dS}{dt} = (P - E) - Q_e.$$

O balanço de massa é rotineiramente aplicado, embora não sem alguns problemas, em lisímetros e tanques evaporimétricos. Ele também é utilizado em agrometeorologia para determinar a necessidade de irrigação dos solos a partir de estimativas da evapotranspiração, e é a base para

estimativas climatológicas de longo curso da evapotranspiração de bacias hidrográficas (chegando à escala continental) a partir de registros de precipitação e vazão. De fato, integrando-se a equação de balanço de massa (ou hídrico) ao longo de um tempo suficientemente longo, o termo de armazenamento torna-se desprezível, e é possível explicitar E em função de P e Q .

Medição de covariâncias turbulentas (*Eddy covariance*)

O método só pode ser aplicado, como diz o nome, se levarmos em conta a presença da turbulência no ar. Para uma grandeza qualquer a (a velocidade u horizontal, a velocidade w vertical, a densidade de vapor d'água ρ_v , etc.) nós utilizaremos a decomposição de Reynolds,

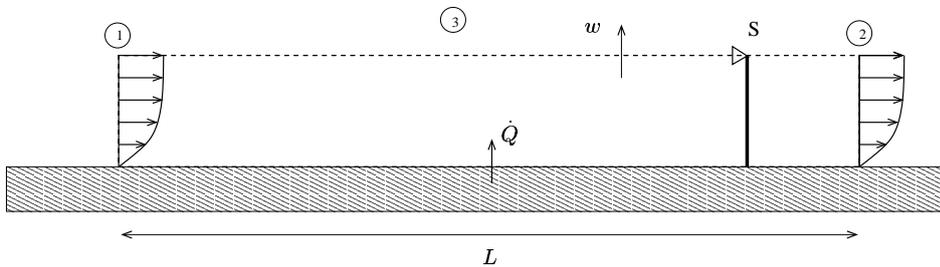
$$a = \bar{a} + a',$$

E precisaremos utilizar (em geral implicitamente neste curso, para não irmos a fundo demais nas questões) os *postulados de Reynolds*. Esses postulados estão ligados ao cálculo de médias. Tipicamente, utilizaremos

$$\begin{aligned} \overline{a'} &= 0, \\ \overline{a'b'} &\neq 0 \quad (\text{em geral}), \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{a} &= \overline{\frac{\partial a}{\partial t}}, \end{aligned}$$

etc. Note que no restante do texto quando nos referimos a uma grandeza meteorológica *nós não usamos as barras!* Por exemplo, a equação de Penman se aplica (estritamente) em nível horário ou sub-horário. No entanto, nela o símbolo u significa a velocidade média do vento durante (digamos) uma hora, enquanto que aqui estamos *explicitando essa média*, e escrevendo \bar{u} .

A figura a seguir mostra a essência do método de medição de covariâncias turbulentas. Nós vamos ilustrá-la para diversos pares de grandeza intensiva \leftrightarrow grandeza extensiva (Fox e McDonald, 1981) (identificadas pela grandeza extensiva na lista a seguir), a saber: a massa de ar seco, a massa de vapor d'água, a massa de CO_2 .



Mass balance to a virtual “box” (a control volume) of a height z_a over a homogeneous surface of length L throughout in the wind direction.

Para o volume de controle \mathcal{V} mostrado, limitado pela superfície fechada \mathcal{S} , a equação de balanço de massa de um gás atmosférico cuja concentração é c é

$$\int_{\mathcal{V}} s_c dV - \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_c) dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho_c dV + \oint_{\mathcal{S}} \rho_c (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) dS. \quad (3.10)$$

Em (3.10), \mathbf{j}_c é vetor o fluxo difusivo de massa do gás c na superfície de \mathcal{C} e s_c são as fontes de produção do gás c no interior de \mathcal{C} (por exemplo, produção de CO_2 pela respiração noturna das plantas). Estes termos formam o *fluxo total* do gás c para dentro do volume \mathcal{C} :

$$\mathcal{F}_c \equiv \int_{\mathcal{C}} s_c dV - \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_c) dS. \quad (3.11)$$

Para prosseguir, é preciso levar em consideração a composição gasosa da atmosfera, e a importância das contribuições para as fontes e os fluxos difusivos na fronteira de \mathcal{C} . Considere a atmosfera constituída essencialmente por 3 componentes. A parte “seca” é formada principalmente por O_2 e N_2 , sendo considerada como se fosse um gás com constante $R_d = 287,05 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ (a constante de gás para ar seco). A componente úmida é vapor d’água H_2O , cuja constante de gás é $R_v = 461,52 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Considere agora uma terceira componente, formada por um gás de efeito estufa. Para fixar idéias, suponha CO_2 , cuja constante de gás é $R_c = 188,92 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. A densidade do ar é a soma das densidades de cada componente:

$$\rho = \rho_d + \rho_v + \rho_c, \quad (3.12)$$

onde ρ_d é a densidade do ar seco, ρ_v é a densidade do vapor d’água, e ρ_c é a densidade do CO_2 . Da mesma forma, os fluxos difusivos e as fontes se somam:

$$s = s_d + s_v + s_c, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_d + \mathbf{j}_v + \mathbf{j}_c. \quad (3.14)$$

Para o ar seco, $s_d = 0$, $\mathbf{j}_d = 0$ (Finnigan, 2009). Segundo Lee e Massman (2011), esta hipótese é uma novidade fundamental da teoria proposta por Webb et al. (1980). Expandindo a derivada em relação ao tempo em (3.10),

$$\mathcal{F}_c = \int_V \frac{\partial \rho_c}{\partial t} dV + \oint_S \rho_c (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) dS. \quad (3.15)$$

O termo envolvendo a advecção de massa através da superfície de controle deve ser contabilizado para cada uma das superfícies ①, ② e ③:

$$\int_{\textcircled{1}} \rho_c (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) dS = - \int_{y=0}^b \int_{z=0}^{z_a} \rho_c u(x=0, y, z, t) dz dy, \quad (3.16)$$

$$\int_{\textcircled{2}} \rho_c (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) dS = + \int_{y=0}^b \int_{z=0}^{z_a} \rho_c u(x=L, y, z, t) dz dy, \quad (3.17)$$

$$\int_{\textcircled{3}} \rho_c (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) dS = + \int_{x=0}^L \int_{y=0}^b \rho_c w(x, y, z=z_a, t) dy dx. \quad (3.18)$$

Considere agora a média de (3.15), indicada por uma barra. Utilizando as propriedades de comutação da média com a derivada,

$$\overline{\mathcal{F}_c} = \int_V \frac{\partial \bar{\rho}_c}{\partial t} dV + \oint_S \overline{\rho_c (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})} dS. \quad (3.19)$$

Note que $\overline{\mathcal{F}_c}$ é uma taxa de transferência de massa para dentro de \mathcal{C} , em $\text{kg}_c \text{s}^{-1}$ no SI. Se o escoamento for *homogêneo* em x e em y , então

$$\overline{[\rho_c \mathbf{u}]}(x = 0, y, z) = \overline{[\rho_c \mathbf{u}]}(x = L, y, z), \quad \forall y, z \quad (3.20)$$

Observe que *isso é válido apenas na média*; prosseguindo,

$$\int_{\textcircled{1}} \overline{\rho_c(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})} dS + \int_{\textcircled{2}} \overline{\rho_c(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})} dS = 0. \quad (3.21)$$

A hipótese de homogeneidade horizontal também implica que $\overline{[\rho_c w]}(x, y, z = z_a)$ é independente tanto de x quanto de y , de forma que

$$\int_{x=0}^L \int_{y=0}^b \overline{[\rho_c w]}(x, y, z = z_a) dy dx = \overline{[\rho_c w]}(z = z_a) bL. \quad (3.22)$$

Para a densidade média $\overline{\rho_c}$ a hipótese de homogeneidade horizontal leva a

$$\overline{\rho_c} = \overline{\rho_c}(z, t), \quad (3.23)$$

onde (3.15), com o uso de (3.21) e (3.22), reduz-se a

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}_c} &= bL \int_0^{z_a} \frac{\partial \overline{\rho_c}}{\partial t} dz + bL \overline{[\rho_c w]}(z = z_a), \\ \frac{\overline{\mathcal{F}_c}}{bL} &\equiv F_c = \int_0^{z_a} \frac{\partial \overline{\rho_c}}{\partial t} dz + \overline{[\rho_c w]}(z = z_a), \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde F_c é o fluxo específico (fluxo por unidade de área da superfície) de massa do gás. O termo transiente é mantido em (3.24) para permitir uma análise de sua importância, que se segue agora.

Pelo Teorema do Valor Médio do Cálculo Diferencial e Integral, se $0 \leq z^* \leq z_a$:

$$F_c = \frac{\partial}{\partial t} \{z_a \overline{\rho_c}(z^*)\} + \overline{[\rho_c w]}(z = z_a). \quad (3.25)$$

O termo transiente pode ser desprezado se

$$z_a \frac{\partial}{\partial t} \{\overline{\rho_c}(z^*)\} \ll \overline{[\rho_c w]}(z = z_a); \quad (3.26)$$

neste caso, obtém-se a equação padrão do método de covariâncias turbulentas para o fluxo superficial do gás c :

$$F_c = \overline{[\rho_c w]}(z = z_a). \quad (3.27)$$

Observe como a escolha de z_a é crucial: quanto maior o seu valor, mais importante se torna o efeito de $\partial \overline{\rho_c} / \partial t$; como é de se esperar que o valor de $\overline{\rho_c}$ evolua ao longo do tempo em função inclusive do próprio fluxo superficial F_c , não é realista admitir que o termo transiente seja identicamente nulo em uma atmosfera real; a rigor, é uma combinação de um valor pequeno para a derivada temporal com uma altura de medição “baixa” (além é claro da hipótese de homogeneidade horizontal) que garante que (3.27) nos dá um valor acurado de F_c na superfície.

Como vimos acima, para o ar seco $\mathcal{F}_s \equiv 0$, donde (3.27) com $c = s$ leva a

$$\frac{\overline{\mathcal{F}_d}}{bL} = 0 = \overline{[\rho_d w]}(z = z_a). \quad (3.28)$$

Esta é uma hipótese fundamental na dedução da correção WPL (Webb et al., 1980), que no entanto é mencionada de passagem naquele artigo. Neste texto, (3.28) é deduzida rigorosamente a partir das hipóteses de homogeneidade horizontal e de estacionariedade e do balanço de ar seco para um volume de controle, da mesma forma que em Finnigan (2009), e Lee e Massman (2011).

Debaixo das mesmas hipóteses de homogeneidade e estacionariedade, os fluxos específicos (*i.e.*, por unidade de área) de massa de vapor d'água e massa de CO₂ são

$$E \equiv \frac{\overline{\mathcal{F}_v}}{bL} = \overline{[\rho_v w]}(z = z_a),$$

$$F \equiv \frac{\overline{\mathcal{F}_c}}{bL} = \overline{[\rho_c w]}(z = z_a).$$

Além dos fluxos de massa descritos acima, são também imprescindíveis em medições micrometeorológicas os fluxos de quantidade de movimento,

$$\tau \equiv \frac{\overline{\mathcal{F}_u}}{bL} = \overline{[\rho u w]}(z = z_a), \quad (3.29)$$

e o fluxo de calor sensível

$$H \equiv \frac{\overline{\mathcal{F}_\theta}}{bL} = \overline{[\rho c_p w \theta]}(z = z_a), \quad (3.30)$$

onde θ é a temperatura potencial.

Em nome da simplicidade, daqui por diante omitiremos o nível de medição; assim, por exemplo, escreveremos $\overline{\rho_v w}$ em lugar de $\overline{[\rho_v w]}(z = z_a)$.

Teoria de Similaridade de Monin-Obukhov

Hipóteses básicas:

- O escoamento médio é estacionário:

$$\frac{\partial(\overline{\cdot})}{\partial t} = 0. \quad (3.31)$$

- O escoamento é unidirecional:

$$\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}, 0, 0), \quad \bar{v} = \bar{w} = 0. \quad (3.32)$$

- O escoamento médio é homogêneo em x e y :

$$\frac{\partial(\overline{\cdot})}{\partial x} = \frac{\partial(\overline{\cdot})}{\partial y} = 0. \quad (3.33)$$

Nestas condições, a *advecção local* de qualquer grandeza na direção x é nula (homogeneidade horizontal)

$$\bar{u} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = 0. \quad (3.34)$$

Do ponto de vista de Teoria de Turbulência, os fluxos superficiais são covariâncias turbulentas, próximo à superfície, em que uma das variáveis é a flutuação da velocidade vertical w :

$$\begin{aligned} \tau &= \bar{\rho} u_*^2 = -\overline{\rho w u} \\ H &= \bar{\rho} c_p u_* \theta_* = \overline{\rho c_p w \theta} \\ E &= \bar{\rho} u_* q_* = \overline{\rho v w} \\ H_v &= \bar{\rho} c_p u_* \theta_{v*} = \overline{\rho c_p w \theta_v} \\ F &= \bar{\rho} u_* c_* = \overline{\rho c w} \end{aligned}$$

Surgem diversas *escalas turbulentas*: a velocidade de atrito u_* , a escala de temperatura θ_* , a escala de umidade específica q_* , a escala do gás c_* e a escala de temperatura virtual θ_{v*} , associada ao fluxo de calor sensível virtual H_v .

A TSMO postula que as variáveis na camada superficial devidamente adimensionalizadas pelas escalas acima, e pela distância ao plano de deslocamento zero $z - d$, são funções da variável de estabilidade de Obukhov,

$$\zeta = \frac{z - d}{L_O} = -\frac{\kappa g(z - d)\theta_{v*}}{\overline{\theta_v u_*^2}}.$$

ζ é uma medida da importância da produção térmica de turbulência em relação à produção mecânica.

A camada superficial (CS) é a região dentro da camada-limite atmosférica onde, *grosso modo*, os fluxos superficiais τ , H , H_v , etc., são aproximadamente constantes em z . Em outras palavras, *em princípio*, medições de covariâncias turbulentas dentro da CS produzem os fluxos superficiais. A CS possui várias sub-camadas: a sub-camada interfacial, a sub-camada de rugosidade, a sub-camada dinâmica e a sub-camada dinâmico-convectiva e a sub-camada de convecção livre local. Esta última, dependendo do autor, pode ser ou não considerada parte da CS. A nomenclatura também varia de acordo com o autor. As 3 primeiras classificações são razoavelmente universais (Brutsaert, 1982; Garratt, 1994); o termo sub-camada dinâmico-convectiva deve-se a Kader e Yaglom (1990); o termo sub-camada de convecção livre (ou camada, dependendo de ela ser ou não considerada parte da CS) deve-se a Wyngaard et al. (1971). Remetemos o leitor a estas referências para os detalhes das diversas sub-camadas da CS.

A CS é instável quando $\zeta < 0$, e o termo de empuxo contribui para produzir turbulência. A CS é estável quando $\zeta > 0$, e este termo ajuda a destruir turbulência. Ela é neutra quando $\zeta = 0$.

Isto serve de ilustração (mas não como demonstração) do seguinte fato: a Teoria SMO prevê que todos os momentos de flutuações turbulentas quaisquer, devidamente adimensionalizados pela combinação adequada de z , u_* , θ_* , q_* , θ_{v*} e c_* , são funções da variável (aqui tomada como

independente) ζ . Para os gradientes das grandezas médias, (momentos de ordem 1) essas funções são

$$\frac{\kappa z}{u_*} \frac{d\bar{u}}{dz} = \phi_\tau(\zeta), \quad \frac{\kappa z}{\theta_*} \frac{d\bar{\theta}}{dz} = \phi_H(\zeta), \quad \frac{\kappa z}{q_*} \frac{d\bar{q}}{dz} = \phi_E(\zeta), \quad \frac{\kappa z}{q_*} \frac{d\bar{c}}{dz} = \phi_F(\zeta).$$

O uso da derivada ordinária d/dz nas equações acima, em lugar da derivada parcial, simplesmente indica que consideramos que o escoamento é estacionário e homogêneo na horizontal, de forma que a única variável independente (do ponto de vista estatístico da turbulência) é z .

Integração dos gradientes dimensionais As equações acima, que definem os gradientes adimensionais ϕ de Monin-Obukhov, são equivalente a postular difusividades turbulentas. Considere por exemplo um escoamento turbulento numa camada-limite com estratificação de densidade. A difusividade turbulenta da quantidade de movimento, K_τ , é definida por analogia com a difusividade molecular como

$$\tau \equiv \bar{\rho} K_\tau \frac{d\bar{u}}{dz}.$$

Segue-se que a difusividade turbulenta é

$$K_\tau = \kappa(z-d)u_*/\phi_\tau(\zeta).$$

Considere agora o caso para o perfil de velocidade média horizontal \bar{u} e $\zeta = 0$ ($L_O = +\infty$):

$$\frac{\kappa z}{u_*} \frac{d\bar{u}}{dz} = \phi_\tau(0) = 1$$

onde o valor $\phi_\tau(0) = 1$ é o obtido classicamente em escoamentos turbulentos não-estratificados (Brutsaert, 1982). Integrando,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{z-d} &= \kappa \frac{d\bar{u}}{u_*} \\ \int_{x=d+z_{0\tau}}^{z-d} \frac{dx}{x-d} &= \kappa \frac{\bar{u}}{u_*} \\ \frac{\bar{u}}{u_*} &= \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z-d}{z_{0\tau}} \end{aligned}$$

Note que a integral sobre z tem limite inferior $d+z_{0\tau}$, e não d , porque a relação fluxo-gradiente vale apenas na região “inercial” CS, deixando de valer na sub-camada rugosa imediatamente acima da superfície. A constante de integração $z_{0\tau}$ é chamada de comprimento de rugosidade para a quantidade de movimento. Já vimos o análogo disso em hidráulica de canais!!!

A equação (??) é o bem conhecido perfil logaritmico de velocidade que aparece em camadas-limite turbulentas sem estratificação de densidade. Claramente, $\phi_\tau(\zeta)$ “corrige” este perfil para estratificação não-nula ($\zeta \neq 0$).

O procedimento geral de integração para o caso $\zeta \neq 0$ é o seguinte:

$$\begin{aligned}\frac{\kappa z}{u_*} \frac{d\bar{u}}{dz} &= \phi_\tau(\zeta), \\ \frac{\kappa \zeta}{u_*} \frac{d\bar{u}}{d\zeta} &= \phi_\tau(\zeta), \\ \phi_\tau(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} &= \kappa \frac{d\bar{u}}{u_*}, \\ \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\phi_\tau(x) dx}{x} &= \kappa \frac{\bar{u}_2 - \bar{u}_1}{u_*},\end{aligned}$$

para $\zeta_1 < \zeta_2$. Se

$$\begin{aligned}\Phi_\tau(\zeta) &\equiv \int \frac{\phi_\tau(x) dx}{x}, \\ u_* &= \kappa \frac{\bar{u}_2 - \bar{u}_1}{\Phi_\tau(\zeta_2) - \Phi_\tau(\zeta_1)}\end{aligned}$$

Analogamente, integrando-se os gradientes adimensionais de temperatura, umidade específica e de um gás qualquer,

$$\begin{aligned}\theta_* &= \kappa \frac{\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2}{\Phi_H(\zeta_2) - \Phi_H(\zeta_1)}, \\ q_* &= \kappa \frac{\bar{q}_1 - \bar{q}_2}{\Phi_E(\zeta_2) - \Phi_E(\zeta_1)}, \\ c_* &= \kappa \frac{\bar{c}_1 - \bar{c}_2}{\Phi_F(\zeta_2) - \Phi_F(\zeta_1)}.\end{aligned}$$

Da mesma forma que no caso de uma atmosfera neutra ($\zeta = 0$), as relações logo acima não valem para $z - d = 0$. Assim, quando o nível “1” for a superfície, usa-se $z_1 - d = z_{0\tau}$, $z_1 - d = z_{0H}$, $z_1 - d = z_{0E}$ e $z_1 - d = z_{0F}$, respectivamente.

É costumeiro supor $\phi_H = \phi_E = \phi_F$ na Camada Inercial. A igualdade das difusividades turbulentas de calor e vapor de água foi suposta explicitamente pela primeira vez no contexto micrometeorológico por Bowen em 1926 (Bowen, 1926; Brutsaert, 1982), e constantemente usada desde então, mas esta hipótese só veio a ser provada por Hill (1989) por meio de análise dimensional, e Dias (1994) e Dias e Brutsaert (1996) a partir das equações de balanço de covariâncias turbulentas para o caso de turbulência homogênea na vertical.

No que se segue, vamos supor que as funções de similaridade ϕ para calor e vapor de água são sempre idênticas, *i.e.*: $\phi_H = \phi_E = \phi_F$. Estrictamente falando, z_{0H} , z_{0E} e z_{0F} não são iguais (Brutsaert, 1975b,c) no entanto, vamos supor neste texto que eles são suficientemente próximos ($z_{0H} \approx z_{0E} \approx z_{0F}$) para efeitos práticos.

Fórmulas clássicas da TSMO Os perfis clássicos para a velocidade \bar{u} e escalares ($\bar{\theta}$, \bar{q} , \bar{c}) mais utilizados talvez sejam os de Businger-Dyer (Brutsaert, 1982). Para condições instáveis ($\zeta < 0$):

$$\phi_\tau^2 = \phi_H = \phi_E = \phi_F(1 - 16\zeta)^{-1/2}$$

e para condições estáveis ($\zeta > 0$):

$$\phi_\tau = \phi_H = \phi_E = \phi_F = 1 + 5\zeta.$$

Embora haja alguma discussão sobre os valores das constantes e mesmo a forma destas funções, elas ainda representam um consenso razoável; uma revisão recente dos perfis ϕ em moldes mais clássicos similares aos deste texto pode ser encontrada ainda em (Högström, 1988). Estimulado pelos achados de Kader e Yaglom (1990), Brutsaert (1992) sugeriu, por exemplo, novas formulações para condições instáveis. Em condições estáveis, Cheng e Brutsaert (2005) também reavaliaram as funções de similaridade utilizando dados do experimento CASES-99.

Note que numa atmosfera neutra $\zeta = 0$, donde $\Phi_\tau(0) = \Phi_H(0) = \Phi_E(0) = \Phi_F(0) = -\infty$. Isso dificulta a utilização das equações envolvendo os Φ 's, por causa da singularidade no denominador. É preferível então trabalhar com funções Ψ que definem o desvio de \bar{u} , $\bar{\theta}$ e \bar{q} em relação aos perfis logarítmicos devido à estabilidade $\zeta \neq 0$:

$$\Psi(\zeta) \equiv \int \frac{1-\phi}{\zeta} d\zeta = \ln|\zeta| - \Phi(\zeta).$$

Começando com Ψ_τ ,

$$\begin{aligned} \Psi_\tau(\zeta) &= \int_{\zeta_{0\tau}}^{\zeta} \frac{1 - (1 - 16u)^{-1/4}}{u} du \\ &= \int_{\zeta_{0\tau}}^{\zeta} \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1 - 16u)^{1/4}} \right] du \end{aligned}$$

Para calcular a integral, faça

$$x = (1 - 16u)^{1/4}; \quad x^4 = (1 - 16u); \quad \frac{1 - x^4}{16} = u; \quad du = -\frac{u^3}{4} dx; \quad (3.35)$$

$$a = (1 - 16\zeta_{0\tau})^{1/4}; \quad b = (1 - 16\zeta)^{1/4}. \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \Psi_\tau(\zeta) &= \int_a^b \left[\frac{16}{1 - x^4} - \frac{16}{x(1 - x^4)} \right] \left(-\frac{x^3}{4} \right) dx \\ &= 4 \int_a^b \left[\frac{x}{x(x^4 - 1)} - \frac{1}{x(x^4 - 1)} \right] x^3 dx \\ &= \int_a^b \frac{4(x - 1)x^2}{x^4 - 1} dx \\ &= \int_a^b \left[\frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{2}{x^2 + 1} + \frac{2}{x + 1} \right] dx \\ &= \ln(x^2 + 1) + 2 \ln(x + 1) - 2 \operatorname{arctg} x \Big|_a^b. \end{aligned}$$

Fazendo $a \approx 1$:

$$\begin{aligned} \Psi_\tau(b(\zeta)) &= \ln(b^2 + 1) + 2 \ln(b + 1) - 2 \operatorname{arctg} b - [\ln(2) + 2 \ln(2) - 2 \operatorname{arctg}(1)] \\ &= \ln \frac{b^2 + 1}{2} + 2 \ln \frac{b + 1}{2} - 2 \operatorname{arctg} b + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Note que $\Psi_\tau(b = 1) \equiv 0$.

Para Ψ_H :

$$\begin{aligned}\Psi_H(\zeta) &= \int_{\zeta_{0\tau}}^{\zeta} \frac{1 - (1 - 16u)^{-1/2}}{u} du \\ &= \int_{\zeta_{0\tau}}^{\zeta} \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1 - 16u)^{1/2}} \right] du\end{aligned}$$

Utilizando a mesma mudança de variáveis,

$$\begin{aligned}\Psi_H(\zeta) &= \int_a^b \left[\frac{16}{1 - x^4} - \frac{16}{x^2(1 - x^4)} \right] \left(-\frac{x^3}{4} \right) dx \\ &= 4 \int_a^b \left[\frac{x^2}{x^2(x^4 - 1)} - \frac{1}{x^2(x^4 - 1)} \right] x^3 dx \\ &= \int_a^b \frac{4(x^2 - 1)x}{x^4 - 1} dx \\ &= 2 \ln(x^2 + 1) \Big|_a^b.\end{aligned}$$

Fazendo $a \approx 1$:

$$\Psi_H(b(\zeta)) = 2 \ln \frac{b^2 + 1}{2}.$$

Note que, novamente, temos $\Psi_H(b = 1) \equiv 0$.

Finalmente, em condições estáveis,

$$\begin{aligned}\Psi_{\tau,H,E,F} &= \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{1 - (1 + 5\zeta)}{\zeta} d\zeta \\ &= -5(\zeta - \zeta_{0\tau,0H,0E,0F}) \approx -5\zeta.\end{aligned}$$

Desta forma, as equações que prognosticam as escalas turbulentas passam a ser escritas como

$$\begin{aligned}u_* &= \kappa \frac{\bar{u}_2 - \bar{u}_1}{\ln \frac{\zeta_2}{\zeta_1} - [\Psi_\tau(\zeta_2) - \Psi_\tau(\zeta_1)]}, \\ \theta_* &= \kappa \frac{\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2}{\ln \frac{\zeta_2}{\zeta_1} - [\Psi_H(\zeta_2) - \Psi_H(\zeta_1)]}, \\ q_* &= \kappa \frac{\bar{q}_1 - \bar{q}_2}{\ln \frac{\zeta_2}{\zeta_1} - [\Psi_E(\zeta_2) - \Psi_E(\zeta_1)]}, \\ c_* &= \kappa \frac{\bar{c}_1 - \bar{c}_2}{\ln \frac{\zeta_2}{\zeta_1} - [\Psi_F(\zeta_2) - \Psi_F(\zeta_1)]}.\end{aligned}$$

Junto com a variável de Obukhov, que define L_O em termos de u_* , θ_* , q_* e c_* , as equações acima fornecem um sistema não-linear nas variáveis u_* , θ_* , q_* , c_* e L_O , que pode ser resolvido iterativamente a partir da medição dos perfis médios $\bar{u}(z)$, $\bar{\theta}(z)$, $\bar{q}(z)$ e $\bar{c}(z)$. Em geral, isto é feito postulando-se $|L_O| = +\infty$ inicialmente, donde $\Psi_{\tau,H,E,F} = 0$; com os valores de u_* , θ_* e q_* obtidos dos perfis logarítmicos iniciais, recalcula-se L_O e então ζ_1 , ζ_2 , que podem ser utilizados numa nova estimativa das escalas turbulentas, e assim sucessivamente até que o processo convirja.

O método fluxo-gradiente As equações de transferência obtidas acima quantificam os fluxos em função de diferenças de velocidade do vento, temperatura, umidade específica e concentração mássica de um gás entre a superfície e um ou mais níveis de medição. Nós vamos supor que a temperatura $\bar{\theta}_a$, a umidade específica \bar{q}_a , e a concentração mássica \bar{c}_a são medidas no nível z_a , enquanto que a velocidade do vento \bar{u}_b é medida no nível z_b . O índice 0 (como sempre) indica a superfície. Nesse caso, as equações de transferência ficam

$$\begin{aligned}\tau &= \bar{\rho} C_\tau \bar{u}_b^2, \\ H &= \bar{\rho} c_p C_H \bar{u}_b (\bar{\theta}_0 - \bar{\theta}_a), \\ E &= \bar{\rho} C_E \bar{u}_b (\bar{q}_0 - \bar{q}_a), \\ F &= \bar{\rho} C_F \bar{u}_b (\bar{c}_0 - \bar{c}_a),\end{aligned}$$

onde C_τ , C_H , C_E e C_F são *coeficientes adimensionais de transferência* (respectivamente, de quantidade de movimento, calor, massa de H₂O e massa de um gás qualquer. O uso das equações de transferência acima para a estimativa de fluxos superficiais também é chamado muitas vezes de *método fluxo-gradiente*.

As equações de transferência não são diretamente aplicáveis em $z = 0$, pois $\ln 0 = -\infty$; assim, é preciso supor que os valores $\bar{u}_0 = 0$, $\bar{\theta}_0$, \bar{q}_0 e \bar{c}_0 na superfície ocorrem nos níveis dos comprimentos de rugosidade $z_{0\tau}$, z_{0H} , z_{0E} e z_{0F} . Para cada grandeza, tomamos então o nível 1 como sendo igual ao seu comprimento de rugosidade, e o nível 2 como sendo igual ao seu nível de medição. No nível 1, os comprimentos de rugosidade são muito pequenos, de forma que é razoável escrever

$$\frac{z_{0\tau}}{L_0} \approx 0, \quad \frac{z_{0H}}{L_0} \approx 0, \quad \frac{z_{0E}}{L_0} \approx 0, \quad \frac{z_{0F}}{L_0} \approx 0,$$

donde

$$\Psi\left(\frac{z_{0\tau}}{L_0}\right) \approx 0, \quad \Psi\left(\frac{z_{0H}}{L_0}\right) \approx 0, \quad \Psi\left(\frac{z_{0E}}{L_0}\right) \approx 0, \quad \Psi\left(\frac{z_{0F}}{L_0}\right) \approx 0.$$

Manipulando as equações, obtemos então

$$\begin{aligned}\tau &= \bar{\rho} \frac{\kappa^2}{\left[\ln \frac{z_b-d}{z_{0\tau}} - \Psi_\tau\left(\frac{z_b-d}{L_0}\right)\right]^2} \bar{u}_b^2, \\ H &= \bar{\rho} c_p \frac{\kappa^2}{\left[\ln \frac{z_b-d}{z_{0\tau}} - \Psi_\tau\left(\frac{z_b-d}{L_0}\right)\right] \left[\ln \frac{z_a-d}{z_{0H}} - \Psi_H\left(\frac{z_a-d}{L_0}\right)\right]} \bar{u}_b (\bar{\theta}_0 - \bar{\theta}_a), \\ E &= \bar{\rho} \frac{\kappa^2}{\left[\ln \frac{z_b-d}{z_{0\tau}} - \Psi_\tau\left(\frac{z_b-d}{L_0}\right)\right] \left[\ln \frac{z_a-d}{z_{0E}} - \Psi_E\left(\frac{z_a-d}{L_0}\right)\right]} \bar{u}_b (\bar{q}_0 - \bar{q}_a), \\ F &= \bar{\rho} \frac{\kappa^2}{\left[\ln \frac{z_b-d}{z_{0\tau}} - \Psi_\tau\left(\frac{z_b-d}{L_0}\right)\right] \left[\ln \frac{z_a-d}{z_{0F}} - \Psi_E\left(\frac{z_a-d}{L_0}\right)\right]} \bar{u}_b (\bar{c}_0 - \bar{c}_a).\end{aligned}$$

A penúltima equação acima é a “Lei de Dalton” Ela é mais comumente escrita em hidrologia em termos da pressão de vapor e em lugar da umidade específica q ,

$$E = \frac{0,622\bar{p}}{\bar{p}} \frac{\kappa^2}{\left[\ln \frac{z_b-d}{z_{0\tau}} - \Psi_\tau \left(\frac{z_b-d}{L_O} \right) \right] \left[\ln \frac{z_a-d}{z_{0E}} - \Psi_E \left(\frac{z_a-d}{L_O} \right) \right]} \bar{u}_b (\bar{e}_0 - \bar{e}_a).$$

Esta equação deve ser comparada com as muitas fórmulas empíricas de evaporação do século XIX e da primeira metade do século XX, do tipo

$$E = (a + b\bar{u})(\bar{e}_0 - \bar{e}_a).$$

Do ponto de vista micrometeorológico, a não possui significado físico (*i.e.*: não devia estar presente na equação) se a equação for usada em escalas de tempo compatíveis com a turbulência atmosférica, entre 30 minutos e 1 hora. Historicamente, entretanto, nota-se o uso indiscriminado de equações do tipo acima para escalas diárias e mensais. Finalmente note que, estritamente falando, b não é constante; para alturas de medição z_a e z_b fixas, e comprimentos de rugosidade idem (note que a rugosidade da superfície pode variar sobre uma cultura agrícola, ou com a direção do vento), b ainda assim depende do comprimento de estabilidade de Monin-Obukhov, que varia numa escala (semi-) horária ao longo do dia.

3.11 Os métodos e modelos clássicos de evaporação e potranspiração

Nesta seção nós abandonamos as barras sobre os símbolos que indicam médias de Reynolds para as variáveis meteorológicas, e retornamos a uma visão mais “hidrológica”.

Modelos

Transferência de massa A primeira tentativa de quantificar a evaporação a partir de superfícies líquidas deve-se a Dalton, no que ficou conhecido como “lei de Dalton”, e é modernamente denominado de equações de transferência de massa e calor:

$$E = f(u)(e_0 - e_a),$$

$$H = \gamma L f(u)(T_0 - T_a).$$

Acima,

$$\gamma = \frac{c_p p}{0,622L}$$

é denominada “constante psicrométrica” (ao nível do mar, $\gamma = 66,5 \text{ Pa K}^{-1}$); $c_p = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ é o calor específico a pressão constante do ar. Note que há duas equações “irmãs”, para o calor sensível e o calor latente. A equação de *transferência de massa* para E está apresentada na forma “clássica” em que ela aparece em hidrologia. Note que, em unidades SI, $[f(u)] = \text{kg m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Pa}^{-1}$. É conveniente escrever $f(u)$ numa forma que permita comparações entre diversas formulações possíveis:

$$f(u) = \frac{0,622\rho}{p}(u_0 + C_E u) = a + bu,$$

onde ρ é a massa específica do ar. As constantes a , b são a forma tradicional de escrever a equação de transferência de massa em hidrologia; u_0 é uma constante com dimensão de velocidade, enquanto que C_E é um coeficiente de transferência de massa de vapor d'água adimensional.

Em micrometeorologia, constata-se que C_E não é uma “constante”, mas sim função das rugosidades da superfície para quantidade de movimento e escalares (temperatura e umidade), e da estabilidade atmosférica: isto dá origem ao método de cálculo de fluxos médios sobre cerca de 30 min. a 1 hora (H e E) por meio de medição de perfis de temperatura e umidade específica, e do uso da teoria e das funções de similaridade de Monin-Obukhov.

Em nível diário, não se tem uma idéia clara dos efeitos da estabilidade atmosférica sobre os coeficientes a e b . Nas deduções das equações acima baseadas em análise dimensional, $a = 0$ (Brutsaert, 1982). Como estas deduções são válidas apenas para a escala horária, é possível que b apareça nas regressões de valores diários ou mensais dos parâmetros devido a correlações entre u e $e_0 - e_a$ na escala horária (Sellers, 1965).

Neste texto, nós nos limitaremos a fórmulas em que (u_0 , C) (ou a , b) são constantes, por simplicidade. As maiores dificuldades para usar o método de transferência de massa em aplicações práticas são o desconhecimento de e_0 em terra, e a incerteza dos parâmetros a , b . A Tabela a seguir mostra alguns pares de valores representativos, que podem ser tomados como base em aplicações. Os coeficientes foram concebidos para uso sobre superfícies líquidas; existem também questões sobre os pontos de medição de u e e_a (Dias, 1986), que tornam a comparação entre os valores mais difícil. Quando se leva em conta velocidades médias diárias do vento não muito superiores a 5 m s^{-1} , os valores encontrados pelos diversos autores não são muito diferentes, ou pelo menos estão dentro da mesma ordem de grandeza.

| Parâmetros do coeficiente de transferência $f(u)$ (Dias, 1986) | | | | |
|--|------|-------------------|----------------------------|--------------------------------|
| Autor(es) | Ano | a (10^{-8}) | b (10^{-8}) | Observação |
| Penman | 1948 | 3.01 | 1.62 | |
| Harbeck | 1962 | 0.00 | $0.002909[A^{1/2}]^{-0.1}$ | a área do lago em m^2 |
| Sellers | 1966 | 0.506 | 1.44 | |
| Kohler e Parmele | 1967 | 1.57 | 1.35 | |
| De Bruin | 1978 | 1.18 | 0.853 | |
| Morton | 1983 | 10.0 | 0.00 | |

A nível diário, é válido calcular o coeficiente de transferência de massa da lei de Dalton por meio de (Dias, 1996, eq. 103)

$$C_E = \frac{\kappa^2}{\ln(z_b/z_{0\tau}) \ln(z_a/z_{0E})},$$

onde $\kappa = 0,4$ é a constante de von Kármán; z_b é o nível de medição da velocidade u ; $z_{0\tau}$ é o comprimento de rugosidade para quantidade de movimento; z_a é o nível de medição de e_a e z_{0E} é o comprimento de rugosidade para vapor d'água; este último é bastante difícil de ser estimado, embora a

hipótese (errônea) $z_{0E} = z_{0\tau}$ não seja incomum, principalmente nos textos mais antigos. Para uma descrição de métodos de estimativa de $z_{0\tau}$ e z_{0E} , veja [Brutsaert \(1975b,c, 1982\)](#).

Do par de equações de transferência de massa e calor obtém-se

$$Bo = \gamma \frac{T_0 - T_a}{e_0 - e_a}.$$

A equação para a razão de Bowen apareceu na década de 20; medindo-se temperatura e umidade médias em dois níveis acima da superfície, radiação líquida, variação da entalpia armazenada e fluxo de calor no solo, pode-se estimar LE pelo método do balanço de energia:

$$LE = \frac{1}{Bo + 1} [R_{n0} - G - D].$$

Modelos

Penman (1948) combinou as equações de transferência de massa e de balanço de energia em um sistema em que as incógnitas são a temperatura da superfície T_0 e a evaporação E , supondo que a superfície esteja saturada: $e_0 = e^*(T_0)$, obtendo

$$LE_p = \frac{\Delta_a}{\Delta_a + \gamma} [R_{n0} - G - D] + \frac{\gamma}{\Delta_a + \gamma} Lf(u) (e_a^* - e_a).$$

A equação de Penman foi concebida para eliminar a dependência da temperatura da superfície, que é um parâmetro difícil de medir sobre superfícies cobertas com vegetação. Por isto, Penman usou

$$R_{na} = R_s(1 - \alpha) + \epsilon R_a - \epsilon \sigma T_a^4$$

em lugar de R_{n0} , o que pode introduzir um erro considerável devido à diferença entre a temperatura da superfície e a temperatura do ar. Quando medições de R_{n0} estiverem disponíveis (o que é raro em registros históricos), deve-se usá-las na equação de Penman. Embora seja incomum, pode-se explicitar T_0 analiticamente no modelo de Penman, obtendo-se

$$T_p = T_a + \frac{[R_{l0} - G - D] - Lf(u)(e_a^* - e_a)}{Lf(u)(\Delta_a + \gamma)}. \quad (3.37)$$

Para tentar contornar o problema de calcular a radiação líquida sem conhecer a temperatura da superfície, Kohler e Parmele (1967) modificaram a solução de Penman por meio de uma expansão em série de Taylor de R_{n0} em torno de T_a :

$$R_{n0} \approx R_{na} - 4\epsilon \sigma T_a^3,$$

obtendo

$$LE_k = \frac{\Delta_a}{\Delta_a + \lambda} [R_{na} - G - D] + \frac{\lambda}{\Delta_a + \lambda} Lf(u)(e_a^* - e_a)$$

com

$$\lambda = \gamma + \frac{4\epsilon \sigma T_a^3}{0,622 Lf(u)}.$$

Da mesma forma que no modelo original de Penman, o modelo de Kohler e Parmele admite uma solução analítica para a temperatura da superfície:

$$T_k = T_a + \frac{[R_{na} - G - D] - Lf(u)(e_a^* - e_a)}{Lf(u)(\Delta_a + \lambda)}.$$

Priestley e Taylor (1972) obtiveram uma relação empírica admiravelmente bem sucedida para a evaporação a partir de superfícies saturadas; ao contrário do método do balanço de energia, que requer a medida de T_0 , e_a , T_a , ou do modelo de Penman, que requer u , e_a , T_a , a equação de Priestley e Taylor utiliza apenas T_0 (ou T_a):

$$LE_s = \alpha_s \frac{\Delta_x}{\Delta_x + \gamma} [R_{n0} - G - D], \quad \alpha_s = 1,26.$$

A derivada da pressão de saturação de vapor d'água deve ser avaliada à temperatura da superfície: $T_x = T_0$; na ausência de dados de temperatura da superfície, é possível utilizar T_a .

A equação de Priestley e Taylor pode ser reconciliada com o método do balanço de energia: Dias (1988,1992) mostrou que o método do balanço de energia pode ser escrito na forma da equação de Priestley-Taylor, e que na verdade α_s é uma função da temperatura da superfície, da temperatura do ar, e da temperatura de bulbo úmido T_w :

$$\alpha_s = 1 + \frac{\gamma}{\Delta_0} \frac{T_a - T_w}{T_0 - T_w}.$$

A equação de Priestley-Taylor foi concebida para ser usada apenas quando $H > 0$; nestas condições, pode-se mostrar que a equação acima produz valores em torno da constante empírica 1,26 de Priestley e Taylor.

Monteith (1973) tentou generalizar a aplicabilidade do método de Penman introduzindo o conceito de resistência estomática r_s , em linha com a resistência aerodinâmica r_a , definidas por

$$E = \frac{1}{r_s}(e_0^* - e_0), \quad \frac{1}{r_a} = f(u).$$

Note que para uma superfície saturada $r_s = 0$, e a 1ª equação acima produz uma singularidade: $E = 0/0$. A equação resultante, de Penman-Monteith, é

$$LE_m = \frac{\Delta_a}{\Delta_a + \gamma^*} [R_{na} - G] + \frac{\gamma^*}{\Delta_a + \gamma^*} \frac{L}{r_a + r_s} (e_a^* - e_a),$$

com

$$\gamma^* = \gamma \left(1 + \frac{r_s}{r_a} \right).$$

Em tese, conhecendo-se o valor correto de r_c e r_a , a equação de Monteith produz o valor correto da evapotranspiração *real* que ocorre sobre a superfície onde R_{n0} , u , T_a e e_a são medidos. Modernamente, tem-se relacionado r_c com a umidade do solo s , grandezas atmosféricas e o índice de área foliar IAF por meio de equações do tipo (Jarvis, 1976; Wright et al., 1996; Noilhan e Planton, 1989)

$$r_c = \frac{r_{cmin}}{IAF} F_1(R_s) F_2(s) F_3(e_a^* - e_a) F_4(T_a),$$

onde r_{cmin} é uma resistência estomática ou de cobertura mínima. A forma específica de r_c acima é a utilizada por Noilhan e Planton (1989). A maior dificuldade de aplicar esta equação é a falta de informações sobre umidade do solo.

Evapo(transpi)ração potencial

A rigor, a equação de Penman só se aplica sobre superfícies saturadas; no entanto, R_s , e_a , T_a e u podem ser medidos ou estimados rotineiramente. Este fato popularizou o costume de calcular as séries de E_p com dados medidos em estações meteorológicas. É muito comum na prática da hidrologia considerar que estas séries representam o limite superior para a evaporação/evapotranspiração de uma região. Assim, a evaporação/evapotranspiração prevista pela fórmula de Penman é muitas vezes denominada de evapo(transpi)ração potencial. Antes mesmo de Penman, o conceito de evapotranspiração potencial havia sido definido por Thornthwaite (Thornthwaite, 1948; Brutsaert, 1982):

Evapotranspiração potencial é o fluxo de vapor d'água a partir de uma região com ampla disponibilidade de água no solo, que não limite a transpiração.

Isto é ligeiramente diferente do conceito de evaporação potencial (Brutsaert, 1982):

Evaporação potencial é o fluxo de vapor d'água a partir de uma região cuja cobertura vegetal tenha a superfície saturada.

No entanto, a equação de Penman não corresponde às definições originais de evapo(trans)piração potencial. De fato, quanto mais árida e quente for a atmosfera de uma região, maior tende a ser $(e_a^* - e_a)$ e consequentemente E_p . Com isto, não é raro que E_p seja maior que a radiação líquida supondo a superfície à temperatura do ar, R_{na} . A implicação na equação de balanço de energia é que o fluxo de calor sensível (potencial) associado, H_p , deve ser negativo. Esta situação é fisicamente irrealista: exceto talvez nos meses de inverno em regiões subtropicais, a média diária do fluxo de calor sensível é sempre positiva (exceções são lagos ou oásis cercados por uma região quente). A condição $H > 0$ é justamente a utilizada na equação de Priestley-Taylor, que parece ser um limite superior mais coerente para a máxima evapo(transpi)ração possível a partir de uma região com ampla disponibilidade de água. Não obstante, a equação de Penman continua a ser um instrumento importante de trabalho de agrônomos, agrometeorologistas, meteorologistas e hidrólogos. Ela é fortemente correlacionada com a evaporação que ocorre em tanques classe A, E_A , sendo propostas relações do tipo

$$E_p = a + bE_A.$$

E_p certamente tem grande utilidade para determinar a evapotranspiração de cultivos específicos, para os quais coeficientes entre evapotranspiração do cultivo e E_p podem ser determinados por meio de medições *in situ* para cada tipo de solo, cultura e época do ano. Por outro lado, a hipótese

simplificada de que a evapotranspiração real é proporcional à evaporação de Penman pode levar a resultados claramente errôneos.

Uma outra utilidade da equação de Penman está na relação complementar, proposta por Bouchet (1963), entre a evapotranspiração real regional, a evapotranspiração potencial (calculada pela equação de Penman) e evapotranspiração de uma superfície com ampla disponibilidade de água (calculada pela equação de Priestley-Taylor) utilizada por Brutsaert e Stricker (1979) em seu modelo de advecção-aridez e por Morton (1983a) em seu modelo CRAE:

$$E_r + E_p = 2E_s. \quad (3.38)$$

A complexidade do pacote radiativo e do cálculo de evapotranspiração do CRAE é muito grande para descrevê-lo aqui; por outro lado, a aplicação do modelo de Brutsaert-Stricker é imediata: E_r é calculada com a equação acima, E_p com a equação de Penman, e E_s com a equação de Priestley-Taylor; as estimativas de radiação líquida podem ser feitas com as equações de cálculo de R_s e R_a apresentadas mais acima.

3.12 Linhas de ação para aplicações

Esta seção destina-se a definir linhas gerais de ação para os casos mais comuns da prática hidrológica.

Evapo(transpi)ração potencial em modelos chuva-vazão

Este é o caso mais simples. Modelos chuva vazão sempre requerem algum tipo de dado de entrada climatológico para auxiliar no cálculo da evapotranspiração. Tipicamente, utiliza-se evaporação em tanque classe A, temperatura do ar, ou a evaporação de Penman ou Priestley-Taylor. Dados de evaporação em tanque ou de temperatura são obtidos diretamente dos registros de estações meteorológicas. A evaporação (“potencial”) de Penman, ou a evaporação de Priestley-Taylor, foram descritas na seção 3.11.

As séries de evapotranspiração real e umidade do solo produzidas por modelos chuva-vazão têm um potencial de uso em hidrologia; naturalmente, deve-se sempre ter em mente que muitas vezes estes são valores gerados pelo modelo sem calibração direta contra dados observacionais, de resto muito raros.

Evapotranspiração em parcelas

Por sua própria natureza, de áreas bem delimitadas e culturas uniformes, a evapotranspiração de parcelas plantadas é mais facilmente mensurável. Pode-se medir E diretamente, seja com medição de perfis, com o método do balanço de energia-razão de Bowen ou o método de medição de covariâncias turbulentas. Estas medidas diretas são então relacionadas com alguma forma de “evapotranspiração potencial” ou “limite superior de evapotranspiração” E_{sup} , entre as quais pode-se citar:

- evaporação em tanque classe A,
- evaporação potencial de Penman,

- evaporação potencial de Thornthwaite (Vianello e Alves, 1991).

As relações entre evapotranspiração real E_r e os diferentes índices E_{sup} são do tipo

$$E_r = K_c E_{sup} \quad (3.39)$$

onde K_c é um “coeficiente de cultura”. A descrição detalhada deste tipo de metodologia está fora do escopo do presente trabalho; o leitor interessado pode procurar Withers e Vipond (1983).

Ao contrário de regiões maiores, como bacias hidrográficas de 10km² ou mais, ou grades de modelos de mesoescala (atualmente, cerca de 10 × 10km² ou um pouco mais), parcelas (assim como lagos) podem estar sujeitas a efeitos de “advecção local”. O caso mais notório é o de uma região com boa disponibilidade de umidade na superfície cercada por um ambiente mais seco: o fluxo de calor sensível sobre a parcela pode se tornar negativo, aumentando a evapotranspiração (ou a evaporação do lago) até mesmo acima da radiação líquida. Parlange e Katual (1992) propõem um modelo derivado do modelo de advecção-aridez de Brutsaert-Stricker para esta situação.

Evapotranspiração em bacias hidrográficas

Uma alternativa, naturalmente, é usar um modelo chuva-vazão. Uma vantagem desta abordagem é que um modelo bem calibrado deve conservar massa quase perfeitamente; neste caso, as estimativas de E produzidas pelo modelo em escala anual ou plurianual deverão ser muito próximas das estimativas por balanço hídrico.

Opções totalmente independentes do balanço hídrico são o modelo de advecção-aridez de Brutsaert-Stricker, que pode ser integralmente reproduzido com as equações deste trabalho, e o modelo CRAE de Morton.

Modelos numéricos de previsão do tempo e modelos climáticos, nas escalas macro- α , macro- β e meso- α , têm calculado H e LE com esquemas de transferência solo-vegetação-atmosfera (SVATs) que procuram reproduzir com mais detalhe do que os modelos chuva-vazão tradicionais as interações (e a componente biológica) do sistema solo-planta-atmosfera; por exemplo, o SVAT utilizado pelo ARPS (Xue et al., 1995) é o proposto por Noilhan e Planton (1989). O problema de utilizar SVATs para o cálculo de evapotranspiração em bacias hidrográficas é a sua grande demanda por informação fisiográfica, tal como o índice de área foliar ou o índice normalizado de diferença vegetativa (NDVI, em inglês), e a necessidade de se conhecer a umidade do solo.

Em resumo, as opções para cálculo de evapotranspiração na escala da bacia hidrográfica (algumas dezenas de quilômetros quadrados ou mais) ainda são muito restritas. Sempre que possível, deve-se comparar os resultados obtidos com o balanço hídrico anual ou plurianual, para se ter pelo menos uma idéia da tendenciosidade das estimativas.

Evaporação em lagos

As duas dificuldades básicas para a obtenção de boas estimativas de evaporação em lago são:

1. estimar corretamente D ;

2. estimar corretamente a razão de Bowen Bo .

Valores médios de D podem ser calculados com (??) a partir de perfis de temperatura da água. Na ausência destes, há apenas dois modelos na literatura, segundo o conhecimento do autor, que produzem estimativas de D : o CRLE (Morton, 1983b) e o modelo de Hostetler e Bartlein (1990).

Quanto mais fundo for um lago, mais importante será o termo D no seu balanço de energia. A escala mínima razoável para o cálculo de D em lagos com profundidade média de 10 m ou mais excede 15 dias. Para estimativas de E baseadas no balanço de energia, valores mensais de evaporação em lago são obteníveis, mas não valores diários.

A razão de Bowen pode ser calculada explicitamente no método do balanço de energia quando há dados de temperatura da superfície da água e temperatura do ar e umidade do ar representativos dos primeiros metros da atmosfera acima da água. Os dados meteorológicos devem ser medidos no meio do lago, o que representa dificuldades logísticas consideráveis (ou um alto custo com a instalação de bóias de medição automáticas), ou então corrente abaixo (a “jusante”, a *sotavento*) do lago. É bom lembrar que em geral as estações meteorológicas existentes não estão bem localizadas em relação aos lagos para permitir a aplicação do método do balanço de energia. Existem também questões de compatibilização das escalas temporais das medições meteorológicas *vis-a-vis* o intervalo entre medições sucessivas de perfis de temperatura da água (Reis e Dias, 1998).

Mesmo que não haja medições adequadas de temperatura e umidade do ar para a aplicação do método do balanço de energia-razão de Bowen, ainda assim é possível obter estimativas razoáveis de evaporação em lago com a equação de Priestley-Taylor, desde que se tenha confiança de que os valores médios mensais de H sejam positivos. Portanto, a equação de Priestley-Taylor é uma boa alternativa em regiões úmidas. Em regiões áridas ou onde a temperatura do ar permaneça maior que a temperatura da água durante uma parte considerável do ano, é preciso medir diretamente a razão de Bowen e aplicar o método do balanço de energia.

3.13 Dedução das equações de Penman e Penman-Monteith

Penman

Considere uma *superfície saturada* de modo que

$$e_0 = e_0^*.$$

Isso é essencial na dedução da equação de Penman. Em seguida reescreva a equação de balanço de energia

$$LE = \frac{1}{1 + Bo} [R_{n0} - G],$$

$$LE(1 + Bo) = R_{n0} - G,$$

e substitua

$$Bo = \gamma \frac{T_0 - T_a}{e_0^* - e_a},$$

$$LE + LE\gamma \frac{T_0 - T_a}{e_0^* - e_a} = R_{n0} - G,$$

e agora use a equação de transferência de massa no segundo termo:

$$E = f(u) (e_0^* - e_a),$$

$$LE + \gamma Lf(u) (e_0^* - e_a) \frac{T_0 - T_a}{e_0^* - e_a} = [R_{n0} - G],$$

$$LE + \gamma Lf(u)(T_0 - T_a) = [R_{n0} - G].$$

Defina agora a *diferença finita*

$$\Delta_{0a} \equiv \frac{e_0^* - e_a^*}{T_0 - T_a}$$

e substitua:

$$LE + \gamma Lf(u) \frac{e_0^* - e_a^*}{\Delta_{0a}} = [R_{n0} - G],$$

$$LE + Lf(u) \frac{\gamma}{\Delta_{0a}} [(e_0^* - e_a) - (e_a^* - e_a)] = R_{n0} - G,$$

$$LE + LE \frac{\gamma}{\Delta_{0a}} - \frac{\gamma}{\Delta_{0a}} Lf(u)(e_a^* - e_a) = [R_{n0} - G],$$

$$LE \frac{\Delta_{0a} + \gamma}{\Delta_{0a}} - \frac{\gamma}{\Delta_{0a}} Lf(u)(e_a^* - e_a) = [R_{n0} - G].$$

Rearrume:

$$LE \frac{\Delta_{0a} + \gamma}{\Delta_{0a}} = [R_{n0} - G] + \frac{\gamma}{\Delta_{0a}} Lf(u)(e_a^* - e_a),$$

$$LE = \frac{\Delta_{0a}}{\Delta_{0a} + \gamma} [R_{n0} - G] + \frac{\gamma}{\Delta_{0a} + \gamma} Lf(u)(e_a^* - e_a).$$

As aproximações clássicas da forma final da equação de Penman são

$$\Delta_{0a} \approx \Delta_a \equiv \frac{de^*(T_a)}{dT},$$

$$R_{n0} \approx R_{na}.$$

Agora T_0 não entra mais na equação; somente T_a , e

$$LE_p = \frac{\Delta_a}{\Delta_a + \gamma} [R_{na} - G] + \frac{\gamma}{\Delta_a + \gamma} Lf(u)(e_a^* - e_a).$$

Penman-Monteith

“Dentro” da vegetação, defina uma resistência estomática r_s e uma resistência aerodinâmica r_a via

$$E = \frac{(e_0^* - e_0)}{r_s},$$

$$E = \frac{(e_0 - e_a)}{r_a}.$$

Rearrumando,

$$Er_s = e_0^* - e_0,$$

$$Er_a = e_0 - e_a,$$

Somando as duas equações acima,

$$E(r_s + r_a) = e_0^* - e_a,$$

$$E = \frac{(e_0^* - e_a)}{(r_s + r_a)}.$$

Voltemos à dedução da equação de Penman, para modificá-la. A superfície não está mais saturada, de maneira que

$$\text{Bo} = \gamma \frac{T_0 - T_a}{e_0 - e_a}.$$

A equação de transferência de massa tem a forma

$$E = \frac{e_0 - e_a}{r_a},$$

e a combinação do método de transferência de massa com o método do balanço de energia agora produz

$$LE + L\gamma \frac{T_0 - T_a}{r_a} = [R_{n0} - G].$$

Note que ainda podemos substituir $(T_0 - T_a)$ por $(e_0^* - e_a^*)/\Delta_{0a}$, obtendo

$$LE + L\gamma \frac{e_0^* - e_a^*}{r_a \Delta_{0a}} = [R_{n0} - G],$$

$$LE + \frac{\gamma}{\Delta_{0a}} \frac{L}{r_a} [(e_0^* - e_a) - (e_a^* - e_a)] = [R_{n0} - G],$$

$$LE + \frac{\gamma}{\Delta_{0a}} \frac{L}{r_a} [E(r_s + r_a) - (e_a^* - e_a)] = [R_{n0} - G],$$

$$LE + LE \frac{\gamma}{\Delta_{0a}} \left(1 + \frac{r_s}{r_a}\right) - \frac{\gamma}{\Delta_{0a}} \frac{L}{r_a} (e_a^* - e_a) = [R_{n0} - G].$$

Agora façamos

$$\frac{1}{r_a} = \frac{1}{r_a} \frac{r_s + r_a}{r_s + r_a}$$

$$= \frac{r_s + r_a}{r_a} \frac{1}{r_s + r - a}$$

$$= \left(1 + \frac{r_s}{r_a}\right) \frac{1}{r_s + r - a}.$$

Substituindo,

$$LE + LE \frac{\gamma}{\Delta_{0a}} \left(1 + \frac{r_s}{r_a}\right) - \frac{\gamma}{\Delta_{0a}} \left(1 + \frac{r_s}{r_a}\right) \frac{L}{r_s + r_a} (e_a^* - e_a) = [R_{n0} - G].$$

Para tornar a notação mais compacta, defina

$$\gamma^* \equiv \gamma \left(1 + \frac{r_s}{r_a}\right)$$

e substitua:

$$LE + LE \frac{\gamma^*}{\Delta_{0a}} - \frac{\gamma^*}{\Delta_{0a}} \frac{L}{r_s + r_a} (e_a^* - e_a) = [R_{n0} - G].$$

Agora,

$$LE \frac{\Delta_{0a} + \gamma^*}{\Delta_{0a}} = [R_{n0} - G] + \frac{\gamma^*}{\Delta_{0a}} \frac{L}{r_s + r_a} (e_a^* - e_a),$$
$$LE = \frac{\Delta_{0a}}{\Delta_{0a} + \gamma^*} [R_{n0} - G] + \frac{\gamma^*}{\Delta_{0a} + \gamma^*} \frac{L}{r_s + r_a} (e_a^* - e_a).$$

Com as mesmas aproximações finais da equação de Penman nós encontraremos

$$LE = \frac{\Delta_a}{\Delta_a + \gamma^*} [R_{na} - G] + \frac{\gamma^*}{\Delta_a + \gamma^*} \frac{L}{r_s + r_a} (e_a^* - e_a).$$

Capítulo 4

Água no solo

Os elementos importantes do ciclo hidrológico no solo incluem:

Infiltração O processo por meio do qual a água entra no solo.

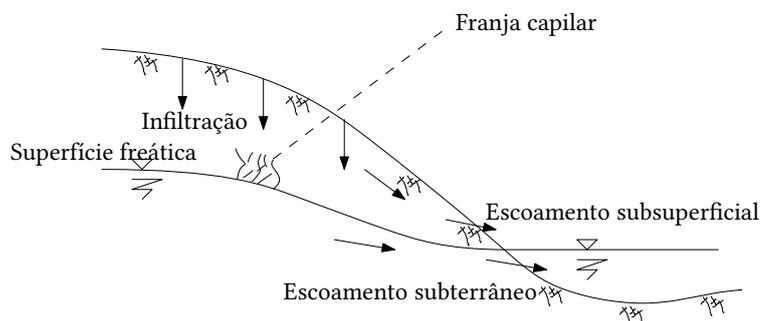
Percolação É o movimento da água *dentro* do solo.

A superfície freática Uma ficção: a região abaixo do qual a saturação é 100%, e que fica “visível” quando cavamos um poço, e encontramos água.

A franja capilar Segundo [Chow et al. \(1988\)](#), a região *saturada acima* da superfície freática, devido a efeitos de capilaridade. Isso está de acordo com o glossário reunido por [Lohman \(1972\)](#), e significa que existe uma região *acima* da superfície freática que ainda está saturada!

O escoamento subsuperficial Escoamento com componente horizontal no solo na região acima da superfície freática.

O escoamento subterrâneo Escoamento com componente horizontal abaixo da superfície freática.



A *porosidade* do solo é definida por

$$\eta \equiv \frac{\text{volume de vazios}}{\text{volume total}}.$$

A *umidade volumétrica* do solo é definida por

$$\theta \equiv \frac{\text{volume de água}}{\text{volume total}}.$$

Portanto,

$$0 \leq \theta \leq \eta.$$

Note como é difícil uniformizar a notação em Hidrologia! No capítulo 3, θ era a temperatura potencial. Na verdade,

$$\theta_r \leq \theta \leq \eta.$$

A equação da continuidade para a água no solo é

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho_w(\mathbf{x}) dV + \oint_{\mathcal{S}} \rho_w(\mathbf{x})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA$$

Note que $\rho_w(\mathbf{x})$ é uma *função indicador*:

$$\rho_w(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho_{0w} & \text{existe água no ponto } \mathbf{x}, \\ 0 & \text{não existe água no ponto } \mathbf{x}. \end{cases}$$

Acima, $\rho_{0w} = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ é simplesmente a densidade, suposta constante, da água líquida.

Além disso, por causa da geometria complicada do solo, $\rho_w(\mathbf{x})$ não é uma função suficientemente suave. Por outro lado, o campo $\theta(\mathbf{x})$ é sempre uma média do que acontece nas redondezas de \mathbf{x} , de tal modo que podemos substituir a integral de uma função não-suave por uma de uma função suave, obrigando que ambas sejam iguais. Seja portanto

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_{0w} \theta(\mathbf{x}) dV \equiv \int_{\mathcal{V}} \rho_w(\mathbf{x}) dV,$$

onde $\theta(\mathbf{x})$ foi obtida por promediação espacial de tal maneira que ela é obrigatoriamente uma função “suave”, ou “bem-comportada”.

Da mesma forma, a integral de superfície envolve a função altamente irregular $\rho_w(\mathbf{x})$. Da mesma forma que fizemos antes, nós podemos definir o *fluxo darciniano* $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, que é uma função suave, via

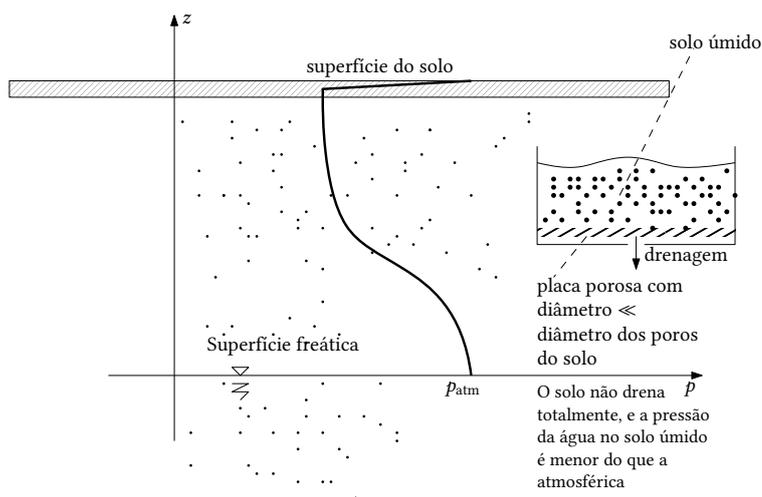
$$\oint_{\mathcal{S}} \rho_w(\mathbf{x})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA \equiv \oint_{\mathcal{S}} \rho_{0w}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}) dA.$$

Isso *não* significa que $\mathbf{q} = \mathbf{v}$! Por quê? Porque em vários pontos da superfície \mathcal{S} , $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (os pontos onde a matriz do solo impede que haja velocidade da água). O fluxo darciniano \mathbf{q} por outro lado é definido localmente como uma *média espacial* de \mathbf{v} ; ele é definido *em todos os pontos da matriz do solo* e, desde que haja movimento de água no solo nas vizinhanças, $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ sempre. Isso faz com que \mathbf{q} seja uma função suave e bem definida

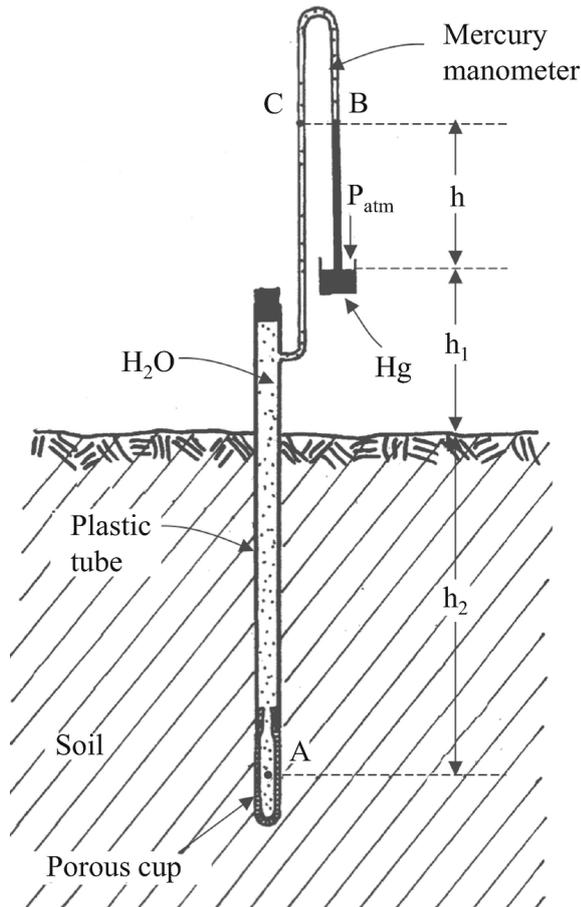
da posição. Prosseguindo,

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho_w dV + \oint_{\mathcal{S}} \rho_w (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA \\
 0 &= \int_{\mathcal{V}} \rho_{0w} \frac{\partial \theta}{\partial t} dV + \oint_{\mathcal{S}} \rho_{0w} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}) dA \\
 0 &= \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \theta}{\partial t} dV + \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{q} dV \Rightarrow \\
 0 &= \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} \right] dV \Rightarrow \\
 0 &= \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q}. \\
 0 &= \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}.
 \end{aligned}$$

À medida que um solo é secado, a pressão da água no solo cai *abaixo* da pressão atmosférica:



A pressão da água no solo, p_w , pode ser relacionada com a umidade volumétrica do solo θ , via curvas de calibração. Ela é facilmente medida com *tensiômetros*



Uma medida comum de umidade do solo é a *saturação efetiva*

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_0 - \theta_r} = \frac{\theta - \theta_r}{\eta - \theta_r},$$

onde θ_0 é a umidade à pressão atmosférica, e θ_r é uma umidade residual de água que não pode, por meios naturais, ser drenada. Acima, nós supusemos (razoavelmente) $\theta_0 = \eta$.

A *sucção*, ou potencial mátrico, do solo é relacionada à pressão da água no solo via

$$\psi_w = -\frac{p_w - p_{atm}}{\rho_w g}.$$

Naturalmente, se nós desprezarmos a energia cinética do escoamento, que é bem baixa em solos (isso é intuitivo), a carga hidráulica é

$$h = z - \psi_w.$$

Agora, a lei de Darcy (que já encontramos rapidamente no início do curso) é dada por

$$\mathbf{q} = -K \nabla h,$$

$$\mathbf{q} = -K \left[\frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial h}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial z} \mathbf{k} \right].$$

onde ∇h é o *gradiente* de h .

Para o caso unidimensional, suponha agora que $\psi = \psi(\theta)$:

$$\begin{aligned} q &= -K \frac{\partial h}{\partial z}, \\ &= -K \frac{\partial(\psi + z)}{\partial z} \\ &= -K \left[\frac{d\psi}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} + 1 \right] \\ &\equiv -D \frac{\partial\theta}{\partial z} - K, \end{aligned}$$

onde

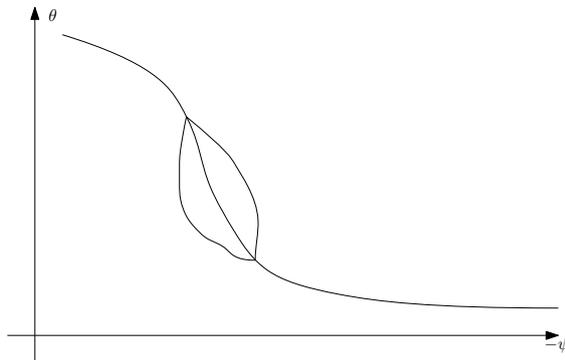
$$D \equiv K(\theta) \frac{d\psi}{d\theta}$$

é a difusividade da água no solo. Se substituirmos agora q na equação da continuidade unidimensional, encontraremos a *equação de Richards* unidimensional:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial\theta}{\partial z} + K \right).$$

Existem toneladas de aplicações para a sua solução com métodos analíticos, numéricos, etc..

Mas lembre-se: existe histerese!!!



Veja o exemplo de [Chow et al. \(1988\)](#), página 102: Computation of soil moisture flux!!!

Infiltração

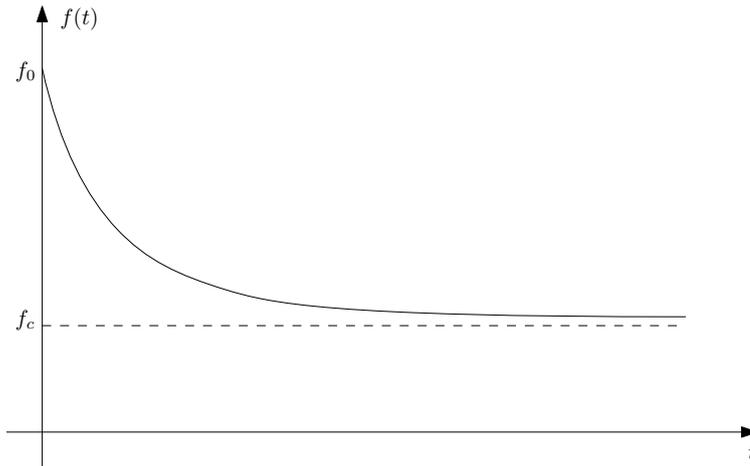
De [Linsley et al. \(1975\)](#):

Infiltration is the movement of water through the soil surface into the soil as distinguished from *percolation*, the movement of water through the soil.

A taxa de infiltração em geral é representada por $f(t)$. A taxa de infiltração potencial é aquela que ocorre quando alimentada por água empilhada na superfície. A *equação de Horton* para a taxa de infiltração é

$$f(t) = f_c + (f_0 - f_c)e^{-kt},$$

onde f_0 é a taxa inicial de infiltração, e f_c é a assíntota para a qual f tende após algum tempo.



A equação de Phillips é uma solução analítica da equação de Richards. A equação é resolvida *sem o termo de gravidade*. Portanto, ela é

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial \theta}{\partial z} \right).$$

Claramente, na ausência do termo de gravidade, a aplicação direta para infiltração vertical é um pouco questionável (e eu não sei o suficiente para discutir isso). Vamos permanecer rasos, e desprezar isso, mantendo o símbolo z (mas feita a ressalva). As condições inicial e de contorno

$$\begin{aligned} \theta(z, 0) &= \theta_i, & z > 0, \\ \theta(0, t) &= \theta_0, & t > 0, \\ \theta(\infty, t) &= \theta_i, & t > 0. \end{aligned}$$

A solução de Richards envolve o método de transformação de similaridade:

$$\phi = zt^{-1/2}.$$

Sem mostrar os detalhes, agora a ideia é que passamos de $\theta(z, t)$ para $\theta(\phi)$ (são duas funções diferentes, apesar do mesmo símbolo!), e para esta última a equação se torna uma EDO:

$$\frac{d}{d\phi} \left(D \frac{d\theta}{d\phi} \right) + \frac{\phi}{2} \frac{d\theta}{d\phi}.$$

Logo,

$$\theta = \theta(\phi).$$

O resultado de Phillips é

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{\tau=0}^t f(\tau) d\tau = St^{1/2} + Kt, \\ f(t) &= \frac{dF}{dt} = \frac{1}{2}St^{-1/2} + K, \end{aligned}$$

onde a *sorptividade* $S = S(\psi)$ é

$$S = \int_{\theta_i}^{\theta_0} \phi(\theta) d\theta.$$

O método de Green-Ampt

Continuidade:

$$F(t) = L(\eta - \theta_i) = L\Delta\theta.$$

A lei de Darcy é

$$q = -K_s \frac{\partial h}{\partial z}$$

$$q = -K_s \frac{h_2 - h_1}{z_2 - z_1}$$

$$f = -q = K_s \frac{h_2 - h_1}{z_2 - z_1}$$

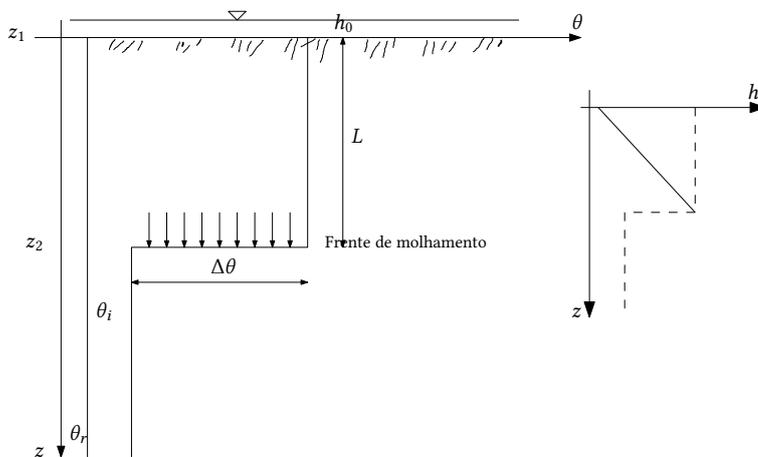
$$= K_s \frac{-\psi - L - h_0}{-L - 0}$$

$$= -K_s \frac{-\psi - L}{L}$$

$$= K_s \frac{\psi + L}{L}.$$

Cuidado! Houve uma infeliz mudança de notação sobre o significado de ψ .

E o esquema geral das coisas é



Agora escolha dois pontos, um na superfície $\psi_1 = 0$ e outro do lado seco da frente de molhamento:

$$f = -q = K_s \frac{h_1 - h_2}{z_1 - z_2}$$

$$= K_s \frac{h_0 - (-\psi - L)}{L}$$

$$\approx K \frac{\psi + L}{L},$$

se h_0 (a altura da poça) for bem pequena. Uso agora a equação da continuidade, $F = L\Delta\theta$, e elimino L :

$$f = K_s \frac{\psi \Delta\theta + F}{F},$$

ou

$$\frac{dF}{dt} = K_s \frac{\psi \Delta \theta + F}{F}.$$

A equação tem solução analítica,

$$\frac{F}{F + \psi \Delta \theta} dF = K_s dt,$$

$$\frac{F + \psi \Delta \theta - \psi \Delta \theta}{F + \psi \Delta \theta} dF = K_s dt,$$

$$\left[1 - \frac{\psi \Delta \theta}{F + \psi \Delta \theta} \right] dF = K_s dt,$$

$$\int_0^{F(t)} \left[1 - \frac{\psi \Delta \theta}{F + \psi \Delta \theta} \right] dF = K_s \int_0^t d\tau = K_s t,$$

$$F + \psi \Delta \theta \ln(\Psi \Delta \theta) - \psi \Delta \theta \ln(F + \psi \Delta \theta) = K_s t$$

$$F - \psi \Delta \theta [\ln(F(t) + \psi \Delta \theta) - \ln(\psi \Delta \theta)] = K_s t,$$

$$F(t) - \psi \Delta \theta \ln \left(1 + \frac{F(t)}{\psi \Delta \theta} \right) = K_s t.$$

$F(t) = ??$ Impossível analiticamente

Note que eu posso iterar a equação final para resolvê-la numericamente:

$$F_{k+1} = \psi \Delta \theta \ln \left(1 + \frac{F_k}{\psi \Delta \theta} \right) + K_s t.$$

Se retornarmos a $f(t)$ e manipularmos algebricamente,

$$f(t) = K_s \left(\frac{\psi \Delta \theta}{F(t)} + 1 \right).$$

Para a aplicação do método de Green-Ampt nós precisamos de estimativas de η , e ψ . [Brooks e Corey \(1964\)](#):

$$S_e = S_e(\psi) = \left[\frac{\psi_b}{\psi} \right]^\lambda$$

A porosidade efetiva é

$$\eta_e = \eta - \theta_r$$

([Chow et al. \(1988\)](#) a chamam de $\theta_e!$); a variação de umidade $\Delta \theta$ no método de Green-Ampt portanto é calculada com um pouco de cuidado!

$$S_{e,i} = \frac{\theta_i - \theta_r}{\eta - \theta_r},$$

$$\Delta \theta = \theta - \theta_i = \eta - \theta_i,$$

$$\theta_i - \theta_r = S_{e,i}(\eta - \theta_r) = S_{e,i}\eta_e,$$

$$\theta_i = \theta_r + S_{e,i}\eta_e.$$

$$\Delta \theta = \theta - \theta_i = \eta - \theta_i \quad (\text{na saturação}),$$

$$\Delta \theta = \eta - [\theta_r + S_{e,i}\eta_e]$$

$$= \eta - [(\eta - \eta_e) + S_{e,i}\eta_e]$$

$$= \eta_e(1 - S_{e,i}).$$

Para o caso de duas camadas (dois tipos diferentes de solo), em que a frente de molhamento já chegou à segunda camada (mais profunda e menos impermeável), ver figura 4.3.4 de [Chow et al. \(1988\)](#)

$$f = \frac{K_1 K_2}{H_1 K_1 + H_2 K_2} (\psi_2 + H_1 + L_2),$$

$$F = H_1 \Delta\theta_1 + H_2 \Delta\theta_2,$$

$$t = L_2 \frac{\Delta\theta_2}{K_2} + \frac{1}{K_1 K_2} [\Delta\theta_2 H_1 K_2 - \Delta\theta_2 K_1 (\psi_2 + H_1)] \ln \left(1 + \frac{L_2}{\psi_2 + H_1} \right).$$

Tempo para o empoçamento

O empoçamento se inicia quando a capacidade de infiltração do solo se torna inferior à intensidade da chuva. No método de Green-Ampt,

$$f = K_s \left(\frac{\psi \Delta\theta}{F} + 1 \right).$$

Enquanto a capacidade de infiltração é maior do que a intensidade da chuva, $f = i$, $F = it$. No tempo de empoçamento t_p ,

$$i = K_s \left(\frac{\psi \Delta\theta}{i t_p} + 1 \right),$$

$$t_p = \frac{K_s \psi \Delta\theta}{i(i - K_s)}.$$

Exemplo: Compute the ponding time and depth of water infiltrated at ponding time for a silt loam soil of 30 percent initial effective saturation, subject to $i = 1 \text{ cm h}^{-1}$.

Solução: na Tabela 4.3.1 de [Chow et al. \(1988\)](#)

$$\eta_e = \theta - \theta_r = 0.486,$$

$$\psi = 16.7 \text{ cm},$$

$$K = 0.65 \text{ cm h}^{-1},$$

$$S_e = 0.3,$$

$$\Delta\theta = 0.486 \times (1 - 0.3) = 0.486 \times 0.7 = 0.3402.$$

$$\Psi\Delta\theta = 16.7 \times 0.3402 = 5.68134,$$

$$t_p = \frac{0.65 \times 5.68134}{1(1 - 0.65)} = 10.55106 \text{ h}.$$

Capítulo 5

Água superficial

5.1 As contribuições para a formação da hidrógrafa

A chuva (ou neve, granizo, etc.) que cai sobre uma bacia se torna escoamento

- superficial,
- sub-superficial (escoamento “não saturado”),
- subterrâneo (escoamento na região saturada do solo).

Escoamento superficial (Hortoniano)

Horton: Se a intensidade da chuva, i , excede a capacidade de infiltração f , então o escoamento superficial se dá à taxa $(i - f)$. $(i - f)$ é o *excesso de precipitação*.

O ponto importante é que esse tipo de escoamento é *menos comum* do que se imagina. De [Chow et al. \(1988\)](#),

Hortonian overland flow is applicable for impervious surfaces in urban areas, and for natural surfaces with thin soil layers and low infiltration capacity as in semiarid and arid lands.

Escoamento sub-superficial

A ênfase continua:

Hortonian overland flow occurs rarely on vegetated surfaces in humid regions.

De [Freeze \(1972b\)](#),

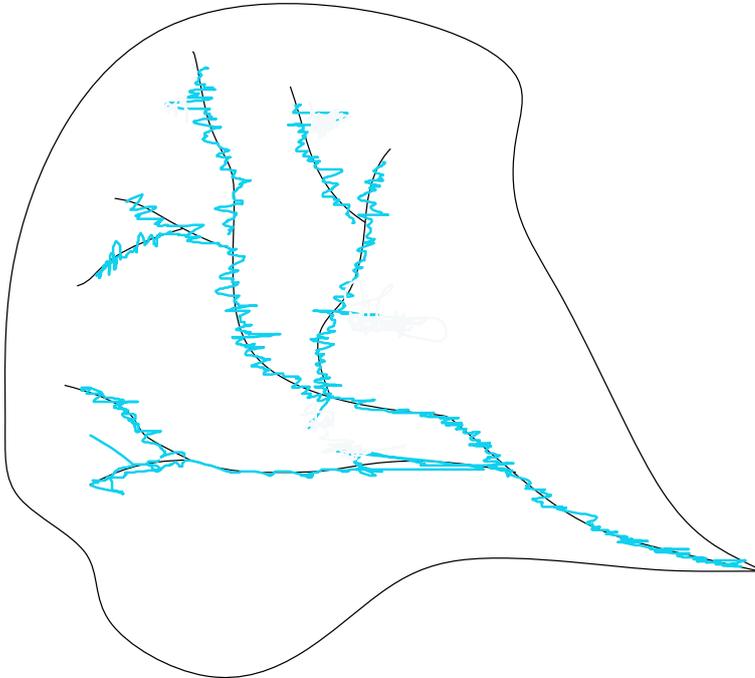
Runoff is that part of precipitation that appears as streamflow either in perennial or intermittent form.

Em regiões úmidas, em geral a capacidade de infiltração excede a intensidade da maioria das chuvas. Portanto, o escoamento no solo é importante para a formação de cheias. Entretanto, principalmente no caso do escoamento sub-superficial, a contribuição é *indireta*.

O principal mecanismo de formação de cheias passa a ser a contribuição direta das áreas saturadas próximas dos cursos d'água. Isso nos leva a

5.1.1 O escoamento superficial por saturação das áreas próximas dos cursos d'água

(Em Inglês: *Saturation overland flow*). Isso se dá pela contribuição de *áreas parciais*, ou *áreas de contribuição variáveis*. Figura!



Os papers de [Freeze \(1972a\)](#), [Freeze \(1972b\)](#), [Dunne e Black \(1970a\)](#) e [Dunne e Black \(1970b\)](#) são fundamentais para entender o assunto: leia-os!

5.2 A hidrógrafa

É simplesmente o gráfico de vazão \times tempo, $Q(t)$. O intervalo de plotagem é o intervalo em que os dados são medidos ou são reportados. É comum no Brasil (e nos EUA) a medição de níveis d'água, que são depois convertidos em vazão, duas vezes por dia, às 07:00 e às 17:00 h. Note que isso é uma conveniência, e que as medições não estão espaçadas de 12 horas, mas sim de 10:00 e 14:00 h.

$Q(t)$ pode ser plotada em diversas escalas. A mais comum, em bacias relativamente grandes (da ordem de 1000 km² ou mais), é a escala diária, mas em bacias pequenas pode ser necessário medir a cada hora ou mesmo em intervalos de tempo menores.

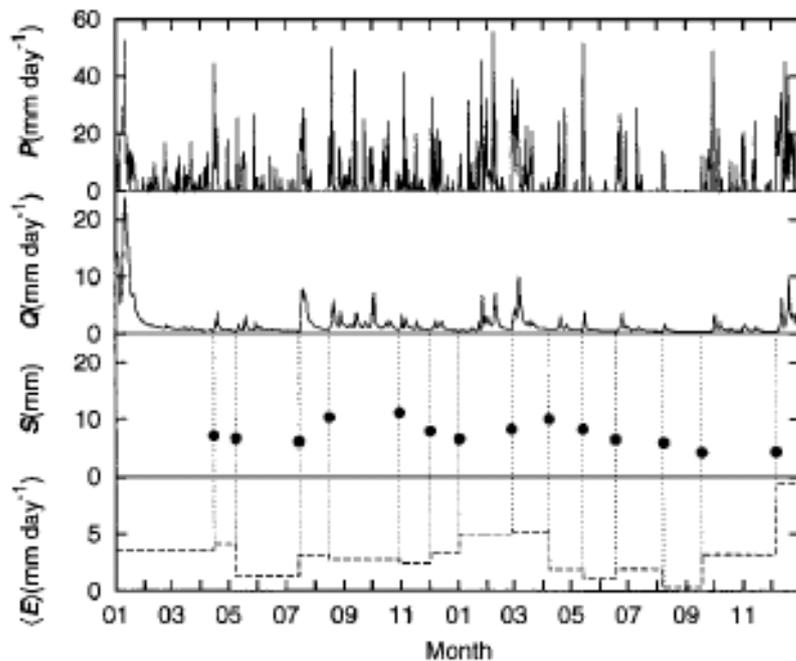
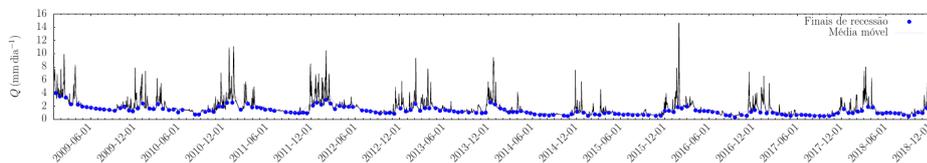


Figure 4. Seasonal estimates of evapotranspiration $\langle E \rangle$ from water budget and hydrograph recession analysis for Cinzas River, 1990–1991.



Escoamento de base e separação da hidrógrafa

Em princípio, o escoamento básico (ou de base) é o sustentado pelo lençol freático. Ele pode ser modelado usando-se a equação de Boussinesq para representar o esvaziamento progressivo de um maciço poroso (veja [Brutsaert e Nieber \(1977\)](#), [Troch et al. \(2013\)](#), [Brutsaert \(2008\)](#), [Brutsaert \(2010\)](#), [Michel \(1999\)](#), [Brutsaert e Lopez \(1998\)](#), [Zecharias e Brutsaert \(1988\)](#), [Chor et al. \(2019\)](#), [Chor e Dias \(2015\)](#), [Chor et al. \(2015\)](#), [Dias et al. \(2014\)](#), etc.).

Veja a figura

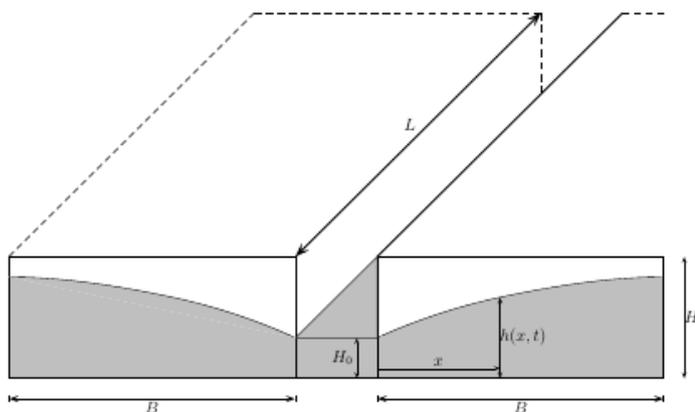


Figure 1. Schematic of a watershed of simple geometry during a hydrologic recession.

Uma solução *linearizada* do problema é dada por (Boussinesq, 1903; Chor e Dias, 2015)

$$h(x, t) = H_0 + \frac{4}{\pi}(H - H_0) \left[\sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi nx}{2B} \right) \exp \left(-\frac{\pi^2 n^2 K_0 p H t}{4\eta B^2} \right) \right].$$

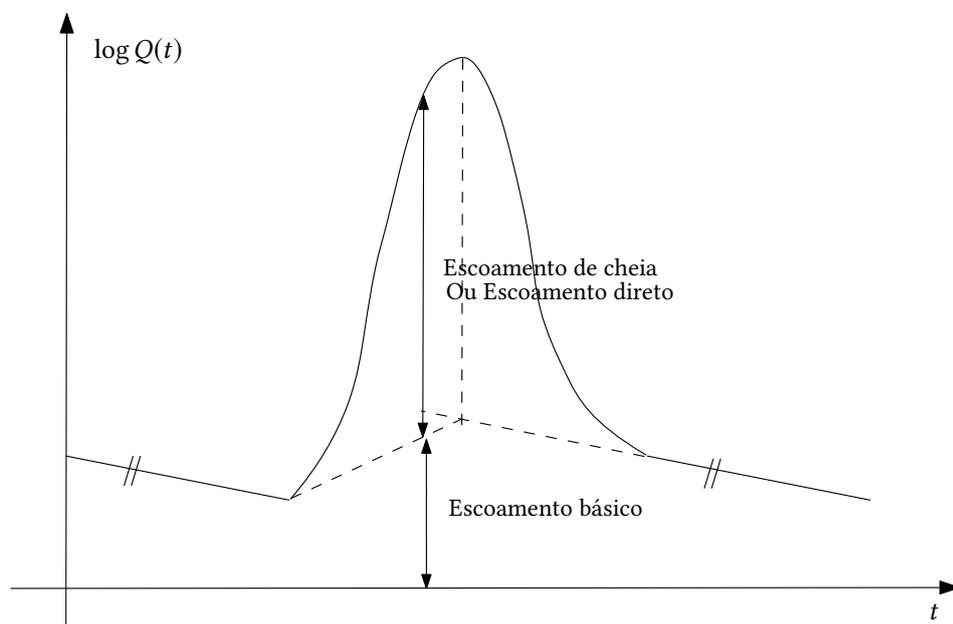
Rapidamente, os termos com $n > 1$ decaem, e ficamos com uma *vazão de recessão* do tipo

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t-t_0}{T}}.$$

T (com dimensões de tempo) é a *constante de recessão*.

Existem diversos métodos de *separação da hidrógrafa*, que tentam determinar quanto da hidrógrafa recebe a contribuição direta de uma chuva. Todos eles têm forte embasamento “gráfico” (porque foram inventados em uma época em que tudo era feito graficamente, e não computacionalmente), e todos eles têm alto grau de subjetividade.

Um método de separação tão bom (ou tão ruim) quanto qualquer outro é

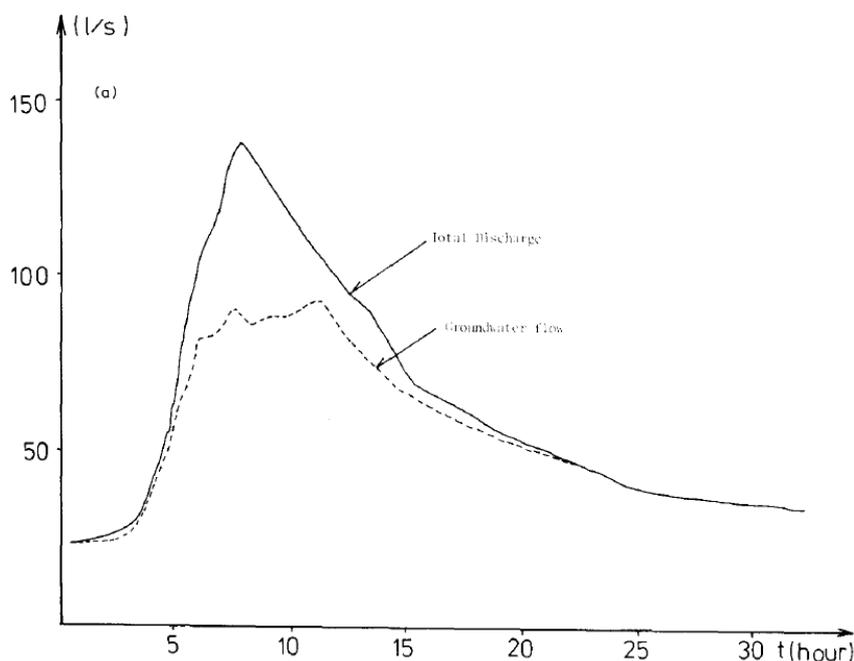


O método supõe uma contribuição relativamente pequena da água da região saturada (do escoamento subterrâneo) para a vazão de cheia, mas a realidade é mais complicada! Uma boa revisão de técnicas de separação é dada por Tallaksen (1995).

No entanto, a ideia de que a contribuição da água subterrânea para a vazão de cheia é pequena é falsa! Veja Sklash e Farvolden (1979) e Hino e Hasebe (1986), e leia (Resumo de Sklash e Farvolden (1979)):

Groundwater plays a much more active, responsive and significant role in the generation, of storm and snow-melt runoff in streams than the recent literature on the subject suggests. Basin-wide tracer experiments using environmental isotopes (^{18}O , deuterium, tritium) and hydrometric studies carried out in hydrogeologically diverse watersheds, indicate that for all except the most intense rain storms and the most prolific melting days, groundwater dominates the runoff hydrographs in the study basins. The increased groundwater discharge during runoff events is apparently related to a rapid rise in hydraulic head along the perimeter of transient and perennial discharge areas. This groundwater ridging phenomenon probably arises from the almost instantaneous conversion of the near-surface tension-saturated capillary fringe into phreatic water. The ridging precedes, and is apparently independent of the response of the rest of the basin. In addition to its compatibility with several of the field observations commonly associated with contemporary concepts of runoff generation, the groundwater discharge theory explains some of the temporal variations in stream water chemistry which are not adequately accounted for by other theories.

e veja a figura de Hino e Hasebe (1986):



5.3 Chuva efetiva e escoamento direto

Suponha que você tenha uma hietógrafa $i(k)$ associada a uma hidrógrafa de cheia $q(k)$, onde $k = 1, \dots, n$ é o índice do tempo decorrido.

Em primeiro lugar, suponha que você já tenha “separado” a hidrógrafa, e possua a série de escoamento direto $q_d(k)$. Desejamos obter o “excesso” de chuva, ou a “chuva efetiva”, que contribuiu para a formação de q_d . Suponha também que as *dimensões* de i e de q_d sejam as mesmas. Por exemplo, se $\{i\} = \text{mm h}^{-1}$, nós podemos dividir a vazão pela área da bacia e (tomando cuidado com as unidades) obter também $\{q_d\} = \text{mm h}^{-1}$.

Uma restrição bem simples é subtrair uma quantidade constante de tal maneira que os volumes sejam iguais. A quantidade a ser “retirada”, ou ϕ pode ser maior que algumas das intensidades observadas no início e no final da chuva. Nós desejamos que

$$\sum_{k: i(k) > \phi} [i(k) - \phi] \Delta t = \sum_{k=1}^n q_d(k) \Delta t.$$

O valor de ϕ deve ser ajustado até que a conta acima “feche”.

Note que todos esses métodos são ideias bem simples, e que nós poderíamos inventar infinitas variações sobre eles.

Coeficientes de escoamento

Variam muito em definição, uso, etc. De maneira geral eles são calculados por

$$C = Q/P,$$

mas o significado do numerador e do denominador varia muito. Podem ser valores de pico de vazão para média da chuva, valores médios de vazão e chuva, etc.. Naturalmente, esperamos as mesmas unidades, e $\llbracket C \rrbracket = 1$.

Chuva efetiva, pelo método de Green-Ampt

Vamos nos lembrar de que

$$\begin{aligned} F(t) - \psi \Delta \theta \ln \left(1 + \frac{F(t)}{\psi \Delta \theta} \right) &= K_s t, \\ F(t + \Delta t) - F(t) - \psi \Delta \theta \left[\ln \left(1 + \frac{F(t + \Delta t)}{\psi \Delta \theta} \right) - \ln \left(1 + \frac{F(t)}{\psi \Delta \theta} \right) \right] &= K_s (t + \Delta t) - K_s t, \\ F(t + \Delta t) - F(t) - \psi \Delta \theta \ln \left(\frac{1 + \frac{F(t + \Delta t)}{\psi \Delta \theta}}{1 + \frac{F(t)}{\psi \Delta \theta}} \right) &= K_s \Delta t, \\ F(t + \Delta t) - F(t) - \psi \Delta \theta \ln \left(\frac{F(t + \Delta t) + \psi \Delta \theta}{F(t) + \psi \Delta \theta} \right) &= K_s \Delta t, \\ F_{k+1} &= F(t) + \psi \Delta \theta \ln \left(\frac{F_k + \psi \Delta \theta}{F(t) + \psi \Delta \theta} \right) + K_s \Delta t, \\ F(t + \Delta t) &= \Phi(F(t), \Delta t). \end{aligned}$$

5.4 O excesso de precipitação

O nosso problema agora é calcular o “excesso de precipitação”. Conhecendo as características hidráulicas de um solo, ou seja, K_s , $\Delta \theta$ e ψ , nós

queremos contabilizar quando de uma chuva discretizada no tempo infiltra, e quanto fica disponível para “escoar”. Como vimos, esta é uma ideia simplista, mas vamos trabalhar nela mesmo assim!

Vamos discretizar nossa hietógrafa em intervalos Δt . Em $t = 0$, a altura acumulada de chuva é $h_0 = 0$. A cada intervalo de tempo Δt , um pluviômetro/pluviógrafo registra uma altura acumulada (no intervalo) p_k , $k = 1, \dots, n$, de tal maneira que a *intensidade média* da precipitação ao fim de cada intervalo k é

$$\bar{i}_k = \frac{p_k}{\Delta t}.$$

Analogamente, a infiltração real acumulada a cada intervalo de tempo será $F_k = F(k\Delta t)$, com $F_0 = 0$. O método de Green-Ampt prevê uma relação *instantânea* entre a taxa de infiltração potencial (ou capacidade de infiltração) f^* e a infiltração acumulada,

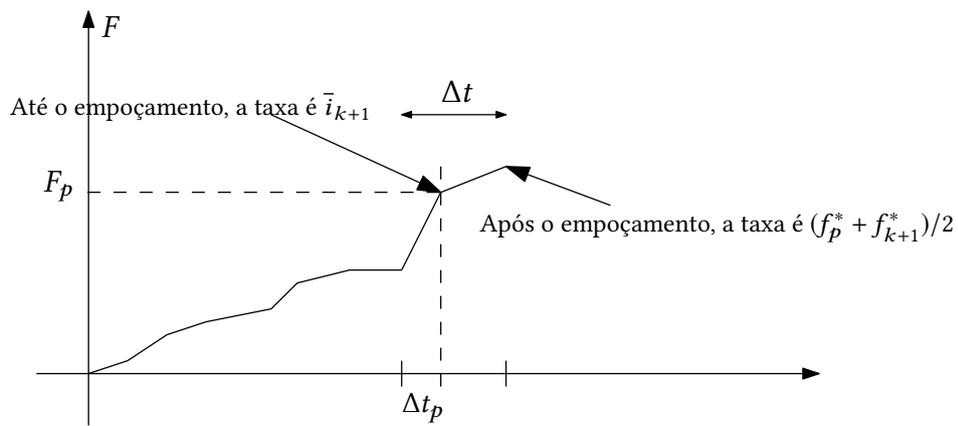
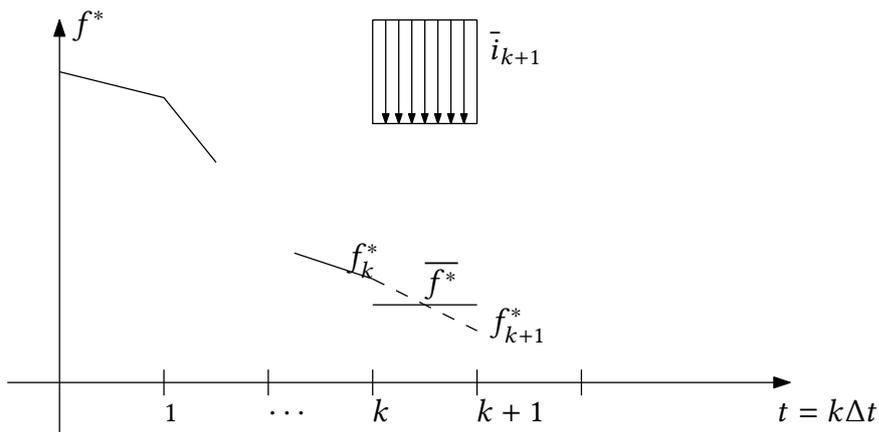
$$f^*(t) = \phi(F(t)) = K_s \left(\frac{\psi \Delta \theta}{F(t)} + 1 \right).$$

O termo “infiltração potencial” e o símbolo f^* estão sendo usados agora para indicar que no método nós supusemos que a superfície do solo está saturada (o solo está “empoçado”) desde o início do processo.

Em uma chuva real, isso pode não ser verdade: se durante um intervalo de tempo k ocorrer $\bar{i}_k < \bar{f}_k^*$, a infiltração real será $\bar{f}_k = \bar{i}_k < \bar{f}_k^*$ (isso é óbvio). Por que a barra? justamente porque os $f^* = \phi(F)$ são valores instantâneos ao final de cada intervalo k . Como estamos discretizando o processo, o mais simples é supor que

$$\begin{aligned} \bar{f}_k^* &= \frac{f_{k-1}^* + f_k^*}{2}, \\ \bar{f}_k &= \frac{f_{k-1} + f_k}{2}. \end{aligned}$$

O nosso problema agora é o seguinte: para o intervalo $[k\Delta t, (k+1)\Delta t]$, conhecendo F_k (real!) e \bar{i}_{k+1} (medido), calcular $(F_{k+1}, f_{k+1}^*, \bar{f}_{k+1})$. O problema está ilustrado na figura a seguir.



Para cada intervalo, o cálculo é o seguinte:

FUNÇÃO FKF($F_k, f_k^*, \bar{i}_{k+1}$) retorna ($F_{k+1}, f_{k+1}^*, \bar{f}_{k+1}$):

$$\widehat{F}_{k+1} = F_k + \bar{i}_{k+1}\Delta t; \quad \# F_{k+1} \text{ tentativa}$$

$$\widehat{f}_{k+1}^* = \phi(\widehat{F}_{k+1}) \quad \# f_{k+1}^* \text{ tentativa}$$

$$\overline{f}_{k+1}^* = (f_k^* + \widehat{f}_{k+1}^*)/2 \quad \# \text{m\u00e9dia de } k\Delta t$$

$$\text{se } \overline{f}_{k+1}^* > \bar{i}_{k+1} \text{ ent\u00e3o} \quad \# \text{infiltrou tudo}$$

$$F_{k+1} = \widehat{F}_{k+1};$$

$$f_{k+1}^* = \widehat{f}_{k+1}^*;$$

$$\bar{f}_{k+1} = \bar{i}_{k+1};$$

$$\text{retorne } (F_{k+1}, f_{k+1}^*, \bar{f}_{k+1}, 0);$$

sen\u00e3o, se $\bar{i}_{k+1} > f_k^*$ ent\u00e3o $\#$ J\u00e1 estava empo\u00e7ado desde o in\u00edcio

$$F_{k+1} = \Phi(F_k, \Delta t);$$

$$f_{k+1}^* = \phi(F_{k+1});$$

$$\bar{f}_{k+1} = (f_k^* + f_{k+1}^*)/2;$$

$$\text{retorne } (F_{k+1}, f_{k+1}^*, \bar{f}_{k+1}, 1);$$

sen\u00e3o $\#$ empo\u00e7ou Δt_p ap\u00f3s o in\u00edcio do intervalo

$$F_p = (K_s\psi\Delta\theta)/(\bar{i}_{k+1} - K_s);$$

$$f_p^* = \phi(F_p);$$

$$\Delta t_p = (F_p - F_k)/\bar{i}_{k+1};$$

$$F_{k+1} = \Phi(F_p, \Delta t - \Delta t_p);$$

$$f_{k+1}^* = \phi(F_{k+1});$$

$$\bar{f}_{k+1} = \left[\Delta t_p \bar{i}_{k+1} + (\Delta t - \Delta t_p)(f_p^* + f_{k+1}^*)/2 \right] / \Delta t$$

$$\text{retorne } (F_{k+1}, f_{k+1}^*, \bar{f}_{k+1}, 2);$$

5.5 O m\u00e9todo do SCS

$$P = P_e + I_a + F_a$$

$$\frac{F_a}{S} = \frac{P_e}{P - I_a},$$

com

P_e Precipita\u00e7\u00e3o efetiva, ou excesso de precipita\u00e7\u00e3o,

I_a Reten\u00e7\u00e3o inicial,

F_a \u00c1gua "retida" na bacia (que n\u00e3o se torna precipita\u00e7\u00e3o).

e onde S é a máxima retenção possível de água.

Resolvendo-se o sistema de 2 equações,

$$P_e = \frac{(P - I_a)^2}{P - I_a + S},$$

$$I_a = 0.2S,$$

$$P_e = \frac{(P - 0.2S)^2}{P + 0.8S},$$

$$S = \frac{1000}{\text{CN(II)}} - 10, \quad \text{condições normais}$$

$$\text{CN(I)} = \frac{4.2\text{CN(II)}}{10 - 0.058\text{CN(II)}}, \quad \text{condições secas}$$

$$\text{CN(III)} = \frac{23\text{CN(II)}}{10 + 0.13\text{CN(II)}}, \quad \text{condições úmidas}$$

com S em polegadas.

A *distribuição* temporal da retenção F_a pode ser obtida de

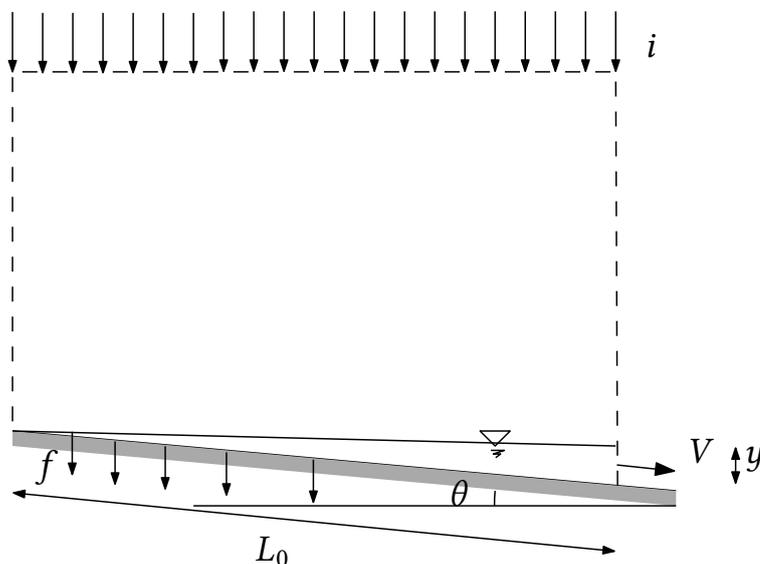
$$F_a = \frac{S(P - I_a)}{P - I_a + S},$$

$$\frac{dF_a}{dt} = \frac{S^2}{P - I_a + S^2} \frac{dP}{dt}.$$

5.6 Escoamento com superfície livre na bacia hidrográfica

Escoamento superficial

O escoamento superficial é forma uma camada fina de água e pode ser aproximado pelas equações para escoamento laminar em um plano inclinado.



As equações são facilmente obtidas!

$$q_0 = Vy = (i - f)L_0 \cos \theta,$$

$$V = \frac{gS_0 y^2}{3\nu},$$

$$h_f = f \frac{L}{4y} \frac{V^2}{2g},$$

$$f = \frac{96 + 108i^{0.4}}{\text{Re}},$$

$$\text{Re} = 4Vy/\nu,$$

$$y = \left(\frac{f q_0^2}{8gS_0} \right)^{1/3}.$$

Na 4ª equação acima, $\{i\}$ = pol.

Para escoamento superficial turbulento, pode-se utilizar a equação de Manning (que já vimos!)

Escoamento em canais

Para escoamento em canais (no caso, os diversos cursos d'água da bacia hidrográfica), o ponto de partida é a equação de Manning:

$$Q = \frac{A}{n} R^{2/3} S_0^{1/2}.$$

Na fórmula de Manning, dada a vazão Q e a declividade S_0 , a profundidade do escoamento y é uma função *implícita*:

$$Q(y) = \frac{A(y)}{n} [R(y)]^{2/3} S_0^{1/2},$$

$$y = Q^{-1}(y)$$

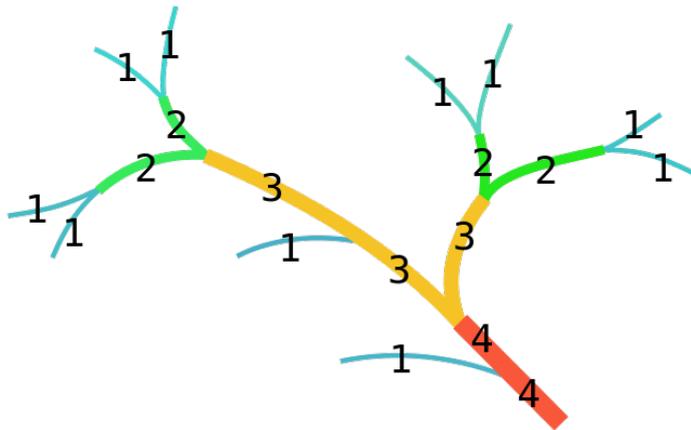
onde $Q^{-1}(y)$ significa a *função inversa*. Como sempre, o que já aprendemos antes sobre métodos numéricos, cálculo de raízes de equações, etc., pode agora ser posto em prática. Note também que por causa da contribuição lateral tanto de água subterrânea quanto de água superficial ou sub-superficial, a vazão vai aumentando ao longo do eixo x do canal: $Q = Q(x)$.

Tempo de viagem, contribuição parcial para a vazão na exutória, etc.

Isso provavelmente é melhor absorvido por estudo individual, lendo-se diretamente a seção 5.7 de [Chow et al. \(1988\)](#).

Ordem dos canais em uma bacia; geomorfologia

Classificação de Strahler



Isso dá origem a algumas ideias muito legais: veja [Rodríguez-Iturbe e Valdés \(1979\)](#).

Algumas leis empíricas

- Taxa de Bifurcação; Lei de Horton para o número de canais

$$\frac{N_i}{N_{i+1}} = R_B$$

- Lei de Horton para os comprimentos dos canais

$$\frac{L_{i+1}}{L_i} = R_L$$

- Lei de áreas das bacias de contribuição

$$\frac{A_{i+1}}{A_i} = R_A$$

- Densidade de drenagem

$$D = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{N_i} L_{ij}}{A_I}$$

Capítulo 6

Medições hidrológicas

Na abertura, [Chow et al. \(1988\)](#) mencionam

- Computadores (sim claro!)
- Bancos de dados
- Medição em tempo real e transmissão

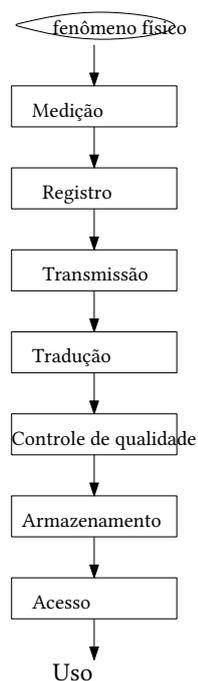
Mais ou menos obviamente, quanto mais próxima for a medição do ponto de interesse hidrológico, melhor. Isso é sempre um compromisso com os recursos disponíveis para adquirir e manter redes de observação.

As medições são sempre pontuais, e feitas com uma certa frequência. Em cada ponto de medição, isso gera *séries temporais*.

Nas últimas décadas, o *sensoriamento remoto* tem desempenhado um papel cada vez mais importante. Exemplos de medições desse tipo incluem a temperatura da superfície medida por satélite, índices vegetativos idem (por exemplo NDVI), e a chuva observada por radar meteorológico.

Inevitavelmente, medições *in situ* são necessárias para validar medições por sensoriamento remoto.

A figura 6.1.1 de [Chow et al. \(1988\)](#) pode ser útil. Vamos reproduzi-la.



Invariavelmente, a medição envolve alguma forma de *conversão analógico-digital*. O nome em Inglês para o tipo de aparelho que une a conversão com alguma forma de armazenamento local é *datalogger*. A etapa de “Registro” portanto provavelmente se refere a algum tipo de armazenamento local. A transmissão pode ocorrer de diversas formas: rádio, telefonia celular, etc.. Muitas vezes, a coleta do dado do *datalogger* é manual, e o dado é levado em cartões de memória, etc., para o escritório.

Conselho:

Aprenda a usar *dataloggers*!

Isso é uma habilidade que envolve aprender a linguagem específica que o datalogger usa, e como programar a aquisição de diversas formas:

- que canais
- que tipo de medição analógica (voltagem, corrente, etc.)
- que tipo de armazenamento local (binário, texto, etc.)
- que frequência de aquisição (1 s, 1 min, 1 hora, etc.)
- que tipo de processamento local (médias de 10 minutos? totais? etc.)

Uma discussão bacana é a feita por [Maggiotto et al. \(2007\)](#).

6.1 Medições típicas, por tipo de estação

Estações meteorológicas

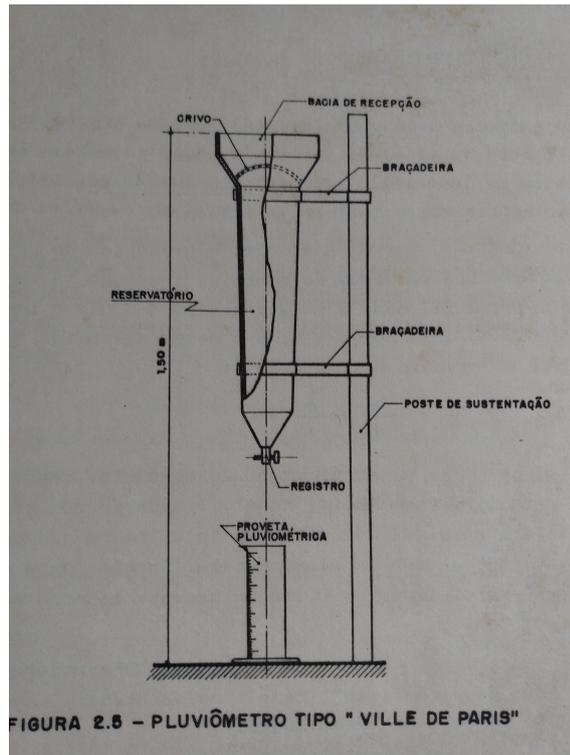
- Temperatura
 - Termômetro de mercúrio (bulbo seco)
 - Sensor resistivo
- Umidade (UR, ponto de orvalho, etc.)
 - Termômetro de mercúrio (bulbo úmido)
 - Sensor capacitivo
- Velocidade do vento horizontal
 - Anemômetro de concha
 - Anemômetro de hélice
 - Anemômetro sônico (a maioria sofre com chuva)
- Direção do vento horizontal
 - Aleta
 - Direções x e y do anemômetro sônico.
- Pressão atmosférica

- Barômetro de mercúrio
- ...
- Precipitação
 - Pluviômetro com leitura manual
 - Pluviômetro/ógrafa de balança (*tipping-bucket*)
- Radiação solar
 - Heliógrafo (medição indireta)
 - Piranômetro de 1ª classe
 - Piranômetro de silício
- Evaporação em Tanque Classe A
 - Tanque classe A, mais velocidade a 0.5 m, e temperatura da água. Pouco uso justificável, exceto como um sucedâneo da Evaporação Potencial.
 - Não é normalmente automatizado

Medição de chuva e outras formas de precipitação

- Estações pluviométricas (pluviômetros isolados).
- Estimativa de chuva por radar.
- Medição de neve: altura, peso, derretimento por aquecimento e altura de água equivalente.
- Intercepção: muito difícil de medir.
- *Stem flow* é possível medir o escoamento em troncos específicos, em condições experimentais, etc..

Cuidado com *undercatch*! Subestimativa da chuva medida com o pluviômetro!



Um pluviômetro.

Medição de evapotranspiração

- Lisímetros
- Estações de medição de razão de Bowen:

$$Bo = \frac{H}{LE} = \gamma \frac{T_1 - T_2}{e_1 - e_2}$$

$$LE = \frac{1}{1 + Bo} [R_n - G]$$

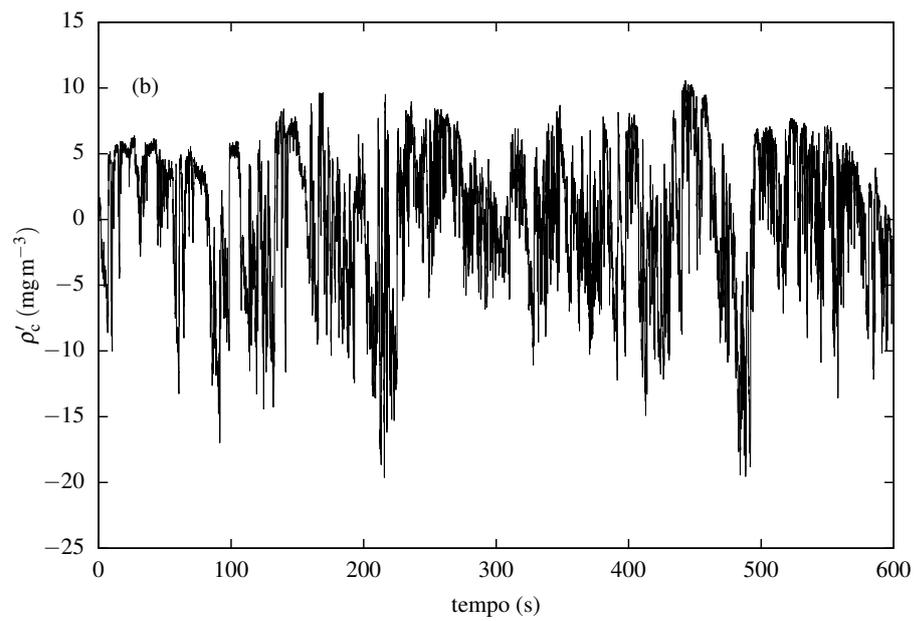
- Estações de medição de covariâncias turbulentas (*eddy covariance*):

$$E = \bar{\rho} \overline{w'q'}$$

(EC = *Endless corrections*) É comum que haja problemas de falta de fechamento do balanço de energia:

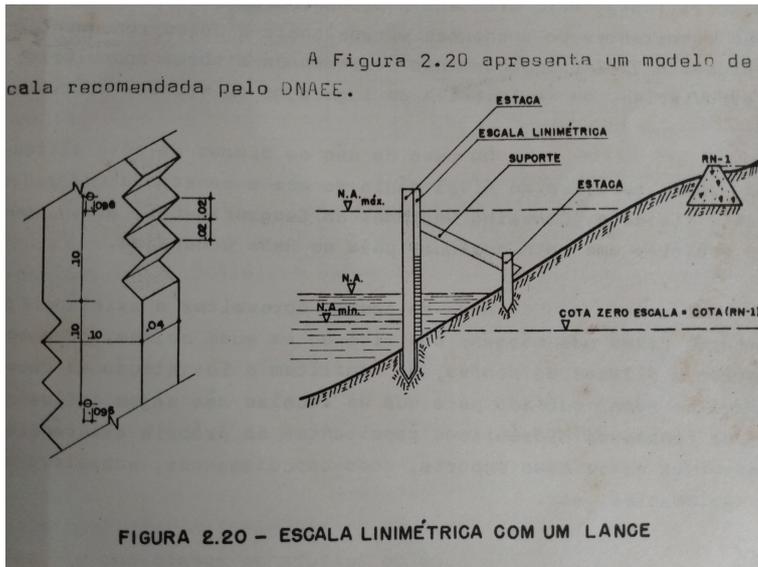
$$R_n \stackrel{?}{=} H + LE + G$$

EC é muito intensivo de processamento por pessoal altamente qualificado.



Nível d'água

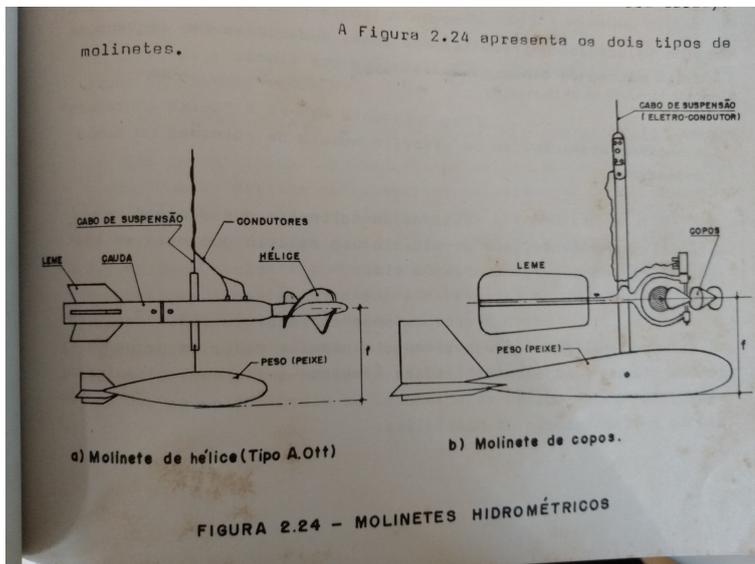
- Réguas linimétricas.
- Sensores de pressão.
- Sensores acústicos.



Velocidade da água/vazão

veja: https://www.usgs.gov/special-topic/water-science-school/science/how-streamflow-measured?qt-science_center_objects=0#qt-science_center_objects

- Molinetes, micromolinetes
- Calhas Parshall, etc. (para pequenos cursos d'água)
- Sensores acústicos: ADCP (*Acoustic Doppler Current Profiler*.)



Molinetes

Quantas medições em cada vertical?

$$\begin{aligned}
u(z) &= \frac{u_*}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right), \\
q &= \int_{z_0}^h u(z) dz \\
&= \frac{u_*}{\kappa} \left[z_0 + h \ln \left(\frac{h}{z_0} \right) - h \right] \\
&= \frac{u_*}{\kappa} \left[z_0 + h \left(\ln \left(\frac{h}{z_0} \right) - 1 \right) \right] \\
&\approx \frac{u_*}{\kappa} \left[h \left(\ln \left(\frac{h}{z_0} \right) - 1 \right) \right]
\end{aligned}$$

onde $\kappa = 0.4$ é a constante de vón Kármán.

Vamos agora mostrar que a velocidade média é muito parecida com a velocidade a $0.6h$:

$$hu(0.4h) = \frac{u_* h}{\kappa} \ln \left(\frac{0.4h}{z_0} \right);$$

e agora

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{u_* h}{\kappa} \ln \left(\frac{0.4h}{z_0} \right)}{\frac{u_* h}{\kappa} \left[\ln \left(\frac{h}{z_0} \right) - 1 \right]} &= \frac{\ln \left(\frac{h}{z_0} \right) + \ln 0.4}{\ln \left(\frac{h}{z_0} \right) - 1} \\
&\approx \frac{\ln \left(\frac{h}{z_0} \right) - 0.91}{\ln \left(\frac{h}{z_0} \right) - 1} \\
&\approx 1.
\end{aligned}$$

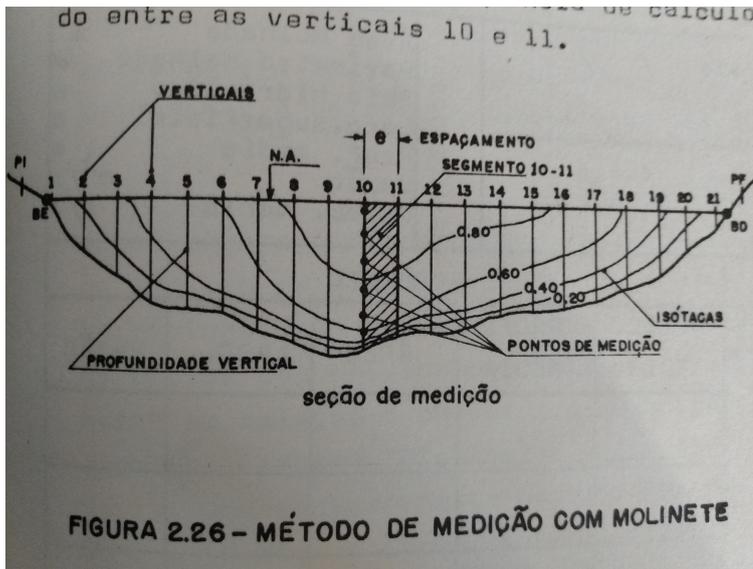
Agora faça a mesma coisa para a média aritmética nos níveis $0.2h$ e $0.8h$.

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{u_* h}{2\kappa} \left[\ln \left(\frac{0.2h}{z_0} \right) + \ln \left(\frac{0.8h}{z_0} \right) \right]}{\frac{u_* h}{\kappa} \left[\ln \left(\frac{h}{z_0} \right) - 1 \right]} &= \frac{2 \ln \left(\frac{h}{z_0} \right) + \ln 0.2 + \ln 0.8}{2 \left[\ln \left(\frac{h}{z_0} \right) - 1 \right]} \\
&= \frac{2 \ln \left(\frac{h}{z_0} \right) - 1.83}{2 \left[\ln \left(\frac{h}{z_0} \right) - 1 \right]} \\
&\approx \frac{2 \ln \left(\frac{h}{z_0} \right) - 2}{2 \ln \left(\frac{h}{z_0} \right) - 2} \\
&= \frac{\ln \left(\frac{h}{z_0} \right) - 1}{\ln \left(\frac{h}{z_0} \right) - 1} = 1
\end{aligned}$$

A partir das medições de velocidade, a vazão em uma seção transversal é

$$Q = \int_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA$$

$$= \sum_{i,j} v_{i,j} \Delta A_{i,j}.$$

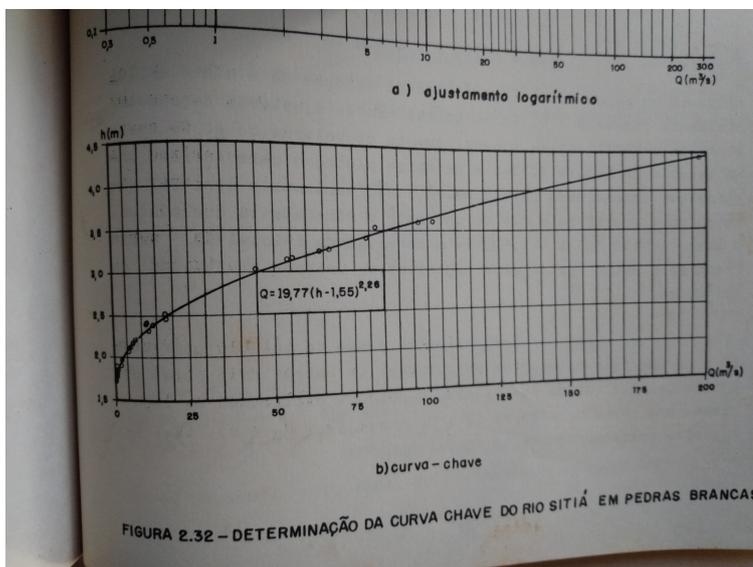


A curva-chave

A curva-chave é simplesmente uma relação

$$Q = Q(z),$$

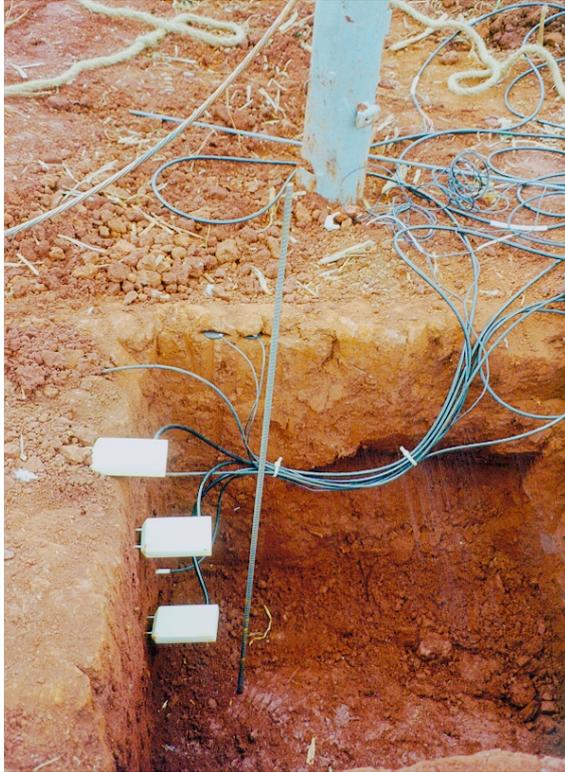
onde z é o nível d'água medido na seção, e Q é a vazão. As medições de vazão são feitas em campanhas *esporádicas*. Tipicamente, uma vez por mês.



Um exemplo de curva-chave.

Umidade do solo

- Tensiômetros
- Sondas de Nêutron
- Sensores TDR (*Time-Domain Reflectometry*)



Instalação de um conjunto de TDRs para perfilamento da umidade do solo.

6.2 Redes de Monitoramento

Redes de monitoramento têm se tornado cada vez mais comuns, e mais fáceis de “montar”, graças à facilidade de comunicação principalmente por telefonia celular.

Isso levou a uma grande fragmentação dos padrões de *medição*: médias horárias, máximos, mínimos, valor médio dos últimos 10 minutos, etc.. No trabalho 02 vocês já se depararam com isso.

Minha crítica: em geral falta pessoal em quantidade e com treinamento suficiente para operar adequadamente as redes: é mais fácil comprar e instalar do que operar.

Capítulo 7

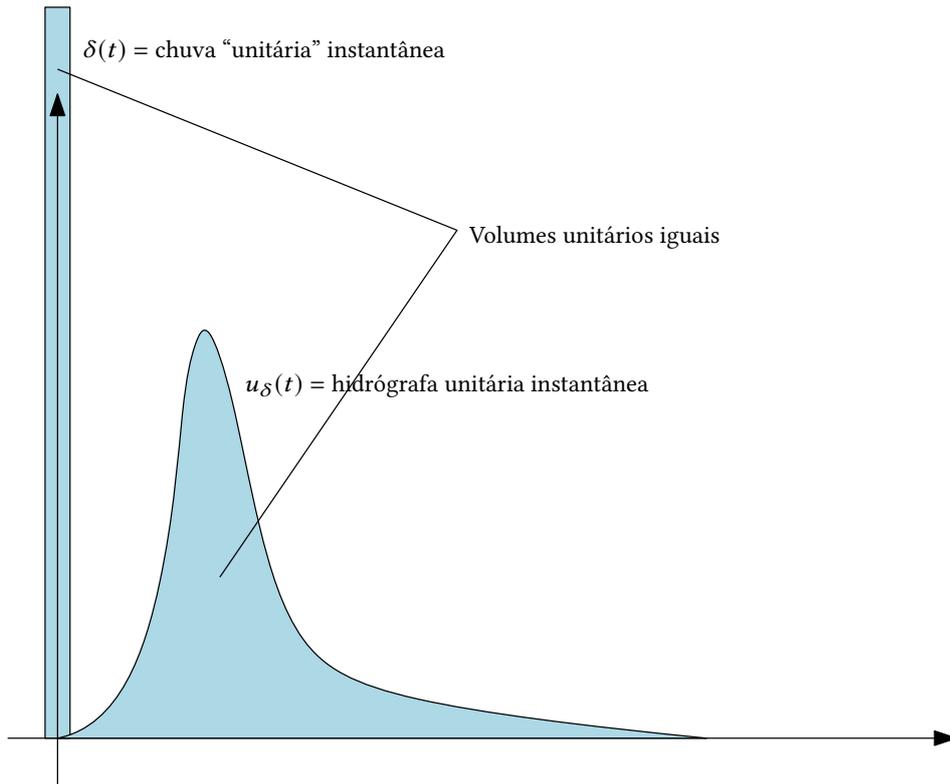
A hidrógrafa unitária

As hipóteses de aplicação da hidrógrafa unitária são:

- A distribuição espacial da chuva é uniforme durante toda a duração do evento. Um limite máximo de área de drenagem de 1800 km^2 para o qual esta hipótese é razoável, é citado por Brutsaert (2005, p. 468).
- A chuva que “entra” no cálculo da vazão é a chuva *efetiva*.
- Da mesma forma, a vazão produzida pelas simulações utilizando a hidrógrafa unitária é a “vazão direta”.
- O método portanto subentende que as técnicas de cálculo de chuva efetiva e separação da hidrógrafa para a determinação do escoamento direto já foram aplicadas.
- A bacia hidrográfica é um sistema linear e estacionário: a resposta não depende da intensidade da chuva, e não varia sazonalmente.
- sistemas cuja resposta aumenta com a intensidade da entrada (da chuva) podem ser chamados de “superlineares”.
- sistemas cuja resposta diminui com a intensidade da entrada (da chuva) podem ser chamados de “sublineares”.

Nosso objetivo é obter a vazão $y(t)$ (por unidade de área) que é a resposta da bacia a uma chuva *qualquer* cuja intensidade instantânea é $x(t)$. A forma mais limpa e clara de fazer isso é definir a hidrógrafa unitária instantânea HUI, que é a resposta da bacia a uma chuva de volume unitário e *duração* nula. Matematicamente, a hidrógrafa unitária é a resposta da bacia a uma chuva que tem a forma de uma delta de Dirac. Portanto, a HUI é a *função de Green* da bacia hidrográfica compreendida como um sistema linear e estacionário.

O conceito da HUI pode ser visto na figura a seguir.



A Hidrógrafa Unitária Instantânea.

É importante atentar para as dimensões: a “chuva” que produz a HUI é uma delta de dirac; sabemos que (neste caso), $[\delta(t)] = T^{-1}$, e que

$$\int_{t=0_-}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Note portanto que a “chuva” que produz a HUI tem dimensões T^{-1} e não $L T^{-1}$! Da mesma forma, a resposta dessa chuva será $u_{\delta}(t)$, com $[u_{\delta}(t)] = T^{-1}$ e

$$\int_{t=0_-}^{\infty} u_{\delta}(t) dt = 1.$$

Existe aí uma hipótese implícita de conservação de massa, naturalmente: todo o volume precipitado de chuva efetiva torna-se escoamento direto.

Agora, a resposta deste sistema linear (a bacia hidrográfica) a *qualquer* chuva com intensidade instantânea $x(t)$ (agora sim, $[x(t)] = L T^{-1}$) será simplesmente a *convolução* da hidrógrafa unitária:

$$y(t) = \int_{\tau=0}^t x(\tau) u_{\delta}(t - \tau) d\tau,$$

onde a convolução é utilizada no sentido da convolução da transformada de Laplace. Dimensionalmente,

$$\begin{aligned} [u_{\delta}(t - \tau) d\tau] &= 1, \\ [y(t)] &= L T^{-1}. \end{aligned}$$

Lembre-se: você já pre-processou os dados de tal forma que

$$\int_0^{\infty} x(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} y(\tau) d\tau.$$

De certa forma, isso é tudo o que temos, em termos de teoria, sobre a hidrógrafa unitária. O restante é implementação. Como sempre, isso nos toma um pouco mais de tempo!

O problema, obviamente, é a discretização. Suponha então que (como já vimos antes) a intensidade da chuva seja *discretizada*:

$$x(\tau) = x_m, \quad t - \Delta t \leq \tau \leq t.$$

Faz sentido supor, correspondentemente, que a hidrógrafa resultante seja igualmente discretizada:

$$y(\tau) = y_n, \quad t - \Delta t \leq \tau \leq t.$$

Seja agora $t = n\Delta t$; temos que

$$\begin{aligned} y_n = y(n\Delta t) &= \int_{\tau=0}^{n\Delta t} x(\tau)u_\delta(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{m=1}^n \int_{\tau=(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} x_m u_\delta(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{m=1}^n x_m \int_{\tau=(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} u_\delta(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

As integrais resultantes,

$$\int_{\tau=(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} u_\delta(t - \tau) d\tau,$$

dependem de m , n , de Δt , e da própria $u_\delta(t)$. Definamos

$$u_{n+1-m}^{(\Delta t)} \equiv \int_{\tau=(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} u_\delta(n\Delta t - \tau) d\tau.$$

Quando Δt for implicitamente conhecido, escreveremos simplesmente u_{n+1-m} . Dimensionalmente,

$$[[u]] = [[u_\delta]] \times [[d\tau]] = T^{-1} \times T = 1.$$

Voltemos a $u_n^{(\Delta t)}$. O seu significado pode ser melhor compreendido com uma mudança de variável. Seja

$$\begin{aligned} \xi &= n\Delta t - \tau; \\ d\xi &= -d\tau; \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u_{n+1-m} &= \int_{\tau=(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} u_\delta(n\Delta t - \tau) d\tau; \\ &= \int_{\xi=(n+1-m)\Delta t}^{(n-m)\Delta t} u_\delta(\xi) (-d\xi); \\ &= \int_{\xi=(n-m)\Delta t}^{(n+1-m)\Delta t} u_\delta(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

A expressão vale para n e m quaisquer (e este é um dos poderes impressionantes da Matemática); logo, podemos fixar $m = 1$ e obter

$$\begin{aligned} u_n^{(\Delta t)} &= \int_{\xi=(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} u_\delta(\xi) d\xi \\ &= \int_{\xi=0}^{n\Delta t} u(\xi) d\xi - \int_{\xi=0}^{(n-1)\Delta t} u(\xi) d\xi \\ &= S(n\Delta t) - S((n-1)\Delta t), \end{aligned}$$

onde a “curva S ” é simplesmente a integral da HUI:

$$S(t) \equiv \int_{\tau=0}^t u_\delta(\tau) d\tau.$$

Note que uma condição importante de normalização é

$$\sum_{n=1}^H u_n = 1.$$

Portanto,

Para obter a hidrógrafa unitária $\mathbf{u}^{(\Delta t)}$ na escala Δt , basta subtrair duas curvas S defasadas de Δt .

Obtemos agora a forma *discretizada* da expressão da hidrógrafa unitária: para isso, precisamos levar em conta a duração M da chuva. Então,

$$y_n = \sum_{m=1}^n x_m u_{n+1-m}.$$

Se escrevermos por extenso,

$$y_n = x_1 u_n + x_2 u_{n-1} + \dots + x_n u_1.$$

Do ponto de vista numérico e de implementação, faz sentido chamar o vetor

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

também de “hidrógrafa unitária” (na escala de discretização Δt). Cuidado, porque a expressão acima precisa ser restringida pelas durações M da chuva real e H da hidrógrafa unitária.

Vamos a isso: Note que as expressões acima não necessariamente vão até n , porque:

1. A chuva real pode durar menos que n ; ou
2. A resposta unitária \mathbf{u} pode durar menos que n .

Vamos, desde já, indicar a duração total da HUI discreta \mathbf{u} como sendo $T_H = H\Delta t$; suponha (para fixar ideias) Agora, se a chuva dura exatamente $1\Delta t$, então a hidrógrafa real tem o mesmo tamanho (H) que a HU; a partir

daí, a duração da hidrógrafa real N é incrementada de $1\Delta t$ para cada Δt adicional de chuva, ou seja: se M é a duração da chuva real,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_M),$$

e

$$M = 1 \Rightarrow N = H;$$

$$M = 2 \Rightarrow N = H + 1;$$

⋮

$$M = M \Rightarrow N = H + M - 1.$$

A melhor maneira de entender isso vai ser escrever, penosamente, as equações correspondentes uma a uma: partimos de

$$y_n = \sum_{m=1}^n x_m u_{n+1-m}.$$

mas vamos modificar a expressão!!! Repito: *a expressão acima não é a definitiva!!!*

Para $M \leq H$ teremos:

$$y_1 = x_1 u_1$$

$$y_2 = x_1 u_2 + x_2 u_1$$

⋮

$$y_M = x_1 u_M + x_2 u_{M-1} + \dots + x_M u_1$$

$$y_{M+1} = x_1 u_{M+1} + x_2 u_M + x_3 u_{M-1} + \dots + x_M u_2 + \cancel{x_{M+1}}^0 u_1$$

$$y_{M+2} = x_1 u_{M+2} + x_2 u_{M+1} + x_3 u_M + x_4 u_{M-1} + \dots + x_M u_3$$

⋮

$$y_H = x_1 u_H + x_2 u_{H-1} + \dots + x_M u_{H-M+1}$$

$$y_{H+1} = x_1 \cancel{u_{H+1}}^0 + x_2 u_H + \dots + x_M u_{H-M+2} + \cancel{x_{M+1}}^0 u_{H-M+1}$$

⋮

$$y_{N-1} = x_{M-1} u_H + x_M u_{H-1}$$

$$y_N = x_M u_H$$

Talvez, agora, a gente possa tentar generalizar os índices dos somatórios?

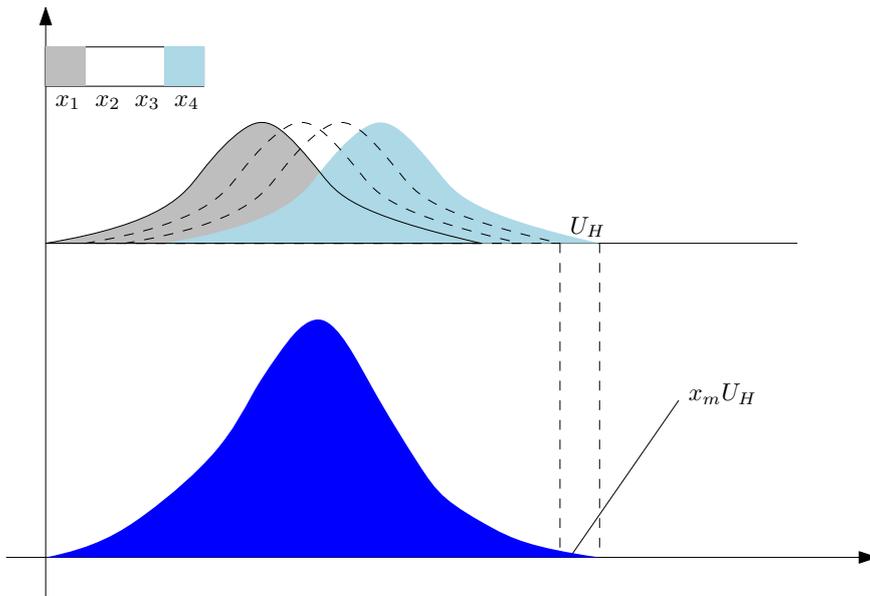
Antes disso, entretanto, vale a pena escrever na forma matricial, e depois fazer um desenho.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \\ y_{M+1} \\ y_{M+2} \\ \vdots \\ y_H \\ y_{H+1} \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} u_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u_2 & u_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_M & u_{M-1} & u_{M-2} & \dots & u_2 & u_1 \\ u_{M+1} & u_M & u_{M-1} & \dots & u_3 & u_2 \\ u_{M+2} & u_{M+1} & u_M & \dots & u_4 & u_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_H & u_{H-1} & u_{H-2} & \dots & u_{H-M+2} & u_{H-M+1} \\ 0 & u_H & u_{H-1} & \dots & u_{H-M+3} & u_{H-M+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_H & u_{H-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & u_H \end{bmatrix}_{N \times M} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix}_{M \times 1}$$

Existe uma outra representação matricial, que vai ser útil para obter (u_1, u_2, \dots, u_H) !

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \\ y_{M+1} \\ y_{M+2} \\ \vdots \\ y_H \\ y_{H+1} \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_M & x_{M-1} & x_{M-2} & \dots & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x_M & x_{M-1} & \dots & x_2 & x_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_M & \dots & x_3 & x_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_M & x_{M-1} & \dots & x_2 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_M & \dots & x_3 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & x_M & x_{M-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & x_M \end{bmatrix}_{N \times H} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \\ u_{M+1} \\ u_{M+2} \\ \vdots \\ u_H \end{bmatrix}_{H \times 1}$$

Agora, a figura:



Convolução, $M \leq H$.

Para $M > H$ teremos:

$$y_1 = x_1 u_1$$

$$y_2 = x_1 u_2 + x_2 u_1$$

⋮

$$y_H = x_1 u_H + x_2 u_{H-1} + \dots + x_H u_1$$

$$y_{H+1} = x_1 \overset{0}{u_{H+1}} + x_2 u_H + \dots + x_H u_2 + x_{H+1} u_1$$

$$y_{H+2} = x_1 \overset{0}{u_{H+2}} + x_2 \overset{0}{u_{H+1}} + x_3 u_H + x_4 u_{H-1} + \dots + x_{H+2} u_1$$

⋮

$$y_M = x_1 \overset{0}{u_M} + \dots + x_{M-H+1} u_H + x_{M-H+2} u_{H-1} + \dots + x_M u_1$$

$$y_{M+1} = x_1 \overset{0}{u_{M+1}} + \dots + x_{M-H+2} u_H + x_{M-H+3} u_{H-1} + \dots + x_M u_2 + x_{M+1} \overset{0}{u_1}$$

$$y_{M+2} = x_1 \overset{0}{u_{M+2}} + \dots + x_{M-H+3} u_H + x_{M-H+4} u_{H-1} + \dots + x_M u_3 + x_{M+1} \overset{0}{u_2} + x_{M+2} \overset{0}{u_1}$$

⋮

$$y_{N-1} = x_1 \overset{0}{u_{N-1}} + \dots + x_{M-1} u_H + x_M u_{H-1}$$

$$y_N = x_1 \overset{0}{u_N} + \dots + x_M u_H$$

A matriz agora é mais complicada!

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_H \\ y_{H+1} \\ y_{H+2} \\ \vdots \\ y_M \\ y_{M+1} \\ y_{M+2} \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} u_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ u_2 & u_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ u_H & u_{H-1} & \cdots & u_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_H & u_{H-1} & \cdots & u_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_H & u_{H-1} & \cdots & u_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & u_H & u_{H-1} & u_{H-2} & \cdots & u_2 & u_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & u_H & u_{H-1} & \cdots & u_3 & u_2 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & u_H & \cdots & u_4 & u_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & u_H & u_{H-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_H \end{bmatrix}_{N \times M} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_H \\ x_{H+1} \\ x_{H+2} \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix}_{M \times 1}$$

Novamente, existe uma outra representação matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_H \\ y_{H+1} \\ y_{H+2} \\ \vdots \\ y_M \\ y_{M+1} \\ y_{M+2} \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2 & x_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_H & x_{H-1} & x_{H-2} & \cdots & x_2 & x_1 \\ x_{H+1} & x_H & x_{H-1} & \cdots & x_3 & x_2 \\ x_{H+2} & x_{H+1} & x_H & \cdots & x_4 & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_M & x_{M-1} & x_{M-2} & \cdots & x_{M-H+2} & x_{M-H+1} \\ 0 & x_M & x_{M-1} & \cdots & x_{M-H+3} & x_{M-H+2} \\ 0 & 0 & x_M & \cdots & x_{M-H+4} & x_{M-H+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_M & x_{M-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_M \end{bmatrix}_{N \times H} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_H \end{bmatrix}_{H \times 1}$$

O que nós acabamos de ver acima é que em geral podemos escrever a relação chuva-vazão via hidrógrafa unitária discreta de uma das duas formas a seguir:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{y}]_{N \times 1} &= [\mathbf{U}]_{N \times M} [\mathbf{x}]_{M \times 1}, \\
[\mathbf{y}]_{N \times 1} &= [\mathbf{X}]_{N \times H} [\mathbf{u}]_{H \times 1}.
\end{aligned}$$

Um pouco acima nós mostramos detalhadamente a formação das matrizes $[\mathbf{U}]$ e $[\mathbf{X}]$ para os casos $M \leq H$ e $M > H$, respectivamente.

A primeira representação acima é a escolha natural quando conhecemos a hidrógrafa unitária $[\mathbf{u}]^T = [u_1, u_2, \dots, u_H]$ e queremos simular a vazão produzida por uma chuva $[\mathbf{x}]^T = [x_1, x_2, \dots, x_M]$; a segunda representação é útil quando temos uma chuva real $[\mathbf{x}]$, uma vazão observada $[\mathbf{y}]^T = [y_1, y_2, \dots, y_N]$, e desejamos obter a hidrógrafa unitária correspondente $[\mathbf{u}]$.

No entanto, a segunda equação matricial,

$$[\mathbf{y}]_{N \times 1} = [\mathbf{X}]_{N \times H} [\mathbf{u}]_{H \times 1},$$

possui mais equações (N) do que incógnitas u_m . Consequentemente, não podemos inverter $[\mathbf{X}]$ e determinar $[\mathbf{u}]$. Existem muitas maneiras “práticas” de resolver este problema e encontrar um $[\mathbf{u}]$ que resolva o sistema “na média”. Vamos olhar para uma única maneira, que é muito elegante. A ideia é determinar $[\mathbf{u}]$ de tal maneira que o quadrado da diferença entre o valor de $[\hat{\mathbf{y}}]$ estimado pelo uso da equação e o efetivamente observado seja mínimo; em outras palavras, vamos determinar o $[\mathbf{u}]$ ótimo por mínimos quadrados.

Sejam portanto as vazões estimadas

$$[\hat{\mathbf{y}}] = [\mathbf{X}][\mathbf{u}];$$

A soma dos quadrados das diferenças entre vazões modeladas e observadas é

$$\begin{aligned} Q &= [\hat{\mathbf{y}}] - [\mathbf{y}]^\top [\hat{\mathbf{y}}] - [\mathbf{y}] \\ &= [\mathbf{X}][\mathbf{u}] - [\mathbf{y}]^\top [\mathbf{X}][\mathbf{u}] - [\mathbf{y}] \\ &= [\mathbf{u}]^\top [\mathbf{X}]^\top - [\mathbf{y}]^\top [\mathbf{X}][\mathbf{u}] - [\mathbf{y}] \\ &= [\mathbf{u}]^\top [\mathbf{X}]^\top [\mathbf{X}][\mathbf{u}] - [\mathbf{y}]^\top [\mathbf{X}][\mathbf{u}] - [\mathbf{u}]^\top [\mathbf{X}]^\top [\mathbf{y}] + [\mathbf{y}]^\top [\mathbf{y}] \end{aligned}$$

Para derivarmos com facilidade em relação aos u_{ms} , é preferível escrever a expressão acima em notação indicial:

$$\begin{aligned} Q &= u_j X_{ji} X_{il} u_l - y_i X_{ij} u_j - u_j X_{ji} y_i + y_n y_n; \\ \frac{\partial Q}{\partial u_k} &= \delta_{jk} X_{ji} X_{il} u_l + u_j X_{ji} X_{il} \delta_{lk} - y_i X_{ij} \delta_{jk} - \delta_{jk} X_{ji} y_i = 0, \\ 0 &= X_{ki} X_{il} u_l + u_j X_{ji} X_{ik} - y_i X_{ik} - X_{ki} y_i. \end{aligned}$$

É conveniente agora retornar à notação matricial: mas quem são, agora, os “transpostos”? Não é difícil, se lembrarmos que

$$[\mathbf{y}]_{N \times 1}, \quad [\mathbf{X}]_{N \times H}, \quad [\mathbf{u}]_{H \times 1},$$

e “copiarmos” as expressões acima de forma correspondente; obteremos

$$\begin{aligned} [\mathbf{0}] &= [\mathbf{X}]_{H \times N}^\top [\mathbf{X}]_{N \times H} [\mathbf{u}]_{H \times 1} + [\mathbf{u}]_{1 \times H}^\top [\mathbf{X}]_{H \times N}^\top [\mathbf{X}]_{N \times H} \\ &\quad - [\mathbf{y}]_{1 \times N}^\top [\mathbf{X}]_{N \times H} - [\mathbf{X}]_{H \times N}^\top [\mathbf{y}]_{N \times 1} \end{aligned}$$

Mas isso ainda não está certo! Temos na verdade duas equações aqui; uma envolvendo matrizes $H \times 1$ e outra envolvendo matrizes $1 \times H$! Precisamos reescrever a equação com dois “zeros” matriciais:

$$\begin{aligned} [\mathbf{0}]_{H \times 1} + [\mathbf{0}]_{1 \times H} &= [\mathbf{X}]_{H \times N}^\top [\mathbf{X}]_{N \times H} [\mathbf{u}]_{H \times 1} + [\mathbf{u}]_{1 \times H}^\top [\mathbf{X}]_{H \times N}^\top [\mathbf{X}]_{N \times H} \\ &\quad - [\mathbf{y}]_{1 \times N}^\top [\mathbf{X}]_{N \times H} - [\mathbf{X}]_{H \times N}^\top [\mathbf{y}]_{N \times 1} \end{aligned}$$

Coletamos agora os termos similares, e obtemos duas equações:

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}]_{H \times N}^T [\mathbf{X}]_{N \times H} [\mathbf{u}]_{H \times 1} - [\mathbf{X}]_{H \times N}^T [\mathbf{y}]_{N \times 1} &= [\mathbf{0}]_{H \times 1} \\ [\mathbf{u}]_{1 \times H}^T [\mathbf{X}]_{H \times N}^T [\mathbf{X}]_{N \times H} - [\mathbf{y}]_{1 \times N}^T [\mathbf{X}]_{N \times H} &= [\mathbf{0}]_{1 \times H} \end{aligned}$$

É trivial verificar que as equações acima são uma a transposta da outra; portanto, temos duas equações totalmente equivalentes, e basta resolver uma delas. Fiquemos com a primeira:

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}]_{H \times N}^T [\mathbf{X}]_{N \times H} [\mathbf{u}]_{H \times 1} - [\mathbf{X}]_{H \times N}^T [\mathbf{y}]_{N \times 1} &= [\mathbf{0}]_{H \times 1} \\ [\mathbf{X}]_{H \times N}^T [\mathbf{X}]_{N \times H} [\mathbf{u}]_{H \times 1} &= [\mathbf{X}]_{H \times N}^T [\mathbf{y}]_{N \times 1} \\ [\mathbf{u}]_{H \times 1} &= \{[\mathbf{X}]_{H \times N}^T [\mathbf{X}]_{N \times H}\}^{-1} [\mathbf{X}]_{H \times N}^T [\mathbf{y}]_{N \times 1}, \end{aligned}$$

que é a solução desejada para a hidrógrafa unitária.

Observe que depois de montadas as matrizes

$$[\mathbf{y}]_{N \times 1}, \quad [\mathbf{X}]_{N \times H}, \quad [\mathbf{u}]_{H \times 1},$$

todas as operações são “triviais” computacionalmente, e estão pré-implementadas na maioria das linguagens de programação que possuem a capacidade de “processar” vetores e matrizes, tais como FORTRAN, Matlab, Python, etc..

Finalmente, note que o algoritmo para produzir uma hidrógrafa a partir da hidrógrafa unitária conhecida \mathbf{u} é *muito* simples:

para $n = 1, \dots, N$ faça

$$y[n] = 0$$

fim

para $m = 1, \dots, M$ faça

para $k = 1, \dots, H$ faça

$$y[m+k-1] = y[m+k-1] + x[m] * u[k]$$

fim

fim

Portanto, a matriz \mathbf{P} é desnecessária para simular vazões!

Finalmente, hidrógrafas unitárias *sintéticas* são úteis em bacias sem medição de vazão. Dois métodos populares são o método de Snyder e o método do SCS.

O método do SCS parece ser mais simples e fácil de aplicar. Ele precisa de uma estimativa do *tempo de concentração* da bacia hidrográfica, que é o tempo necessário para que toda a bacia contribua para a vazão.

Mesmo uma forma muito simplificada para a hidrógrafa unitária (um triângulo, por exemplo) “dá certo”, por causa da convolução.

Capítulo 8

Propagação de cheias: modelos concentrados

8.1 Vertedor livre

Em Hidráulica, a equação de descarga para um vertedor é

$$Q = CLH^{3/2},$$

onde Q é a vazão, C é o coeficiente de descarga, L é a largura do vertedor e H é a carga sobre a soleira. No sistema britânico de unidades (Q em $\text{ft}^3 \text{s}^{-1}$, L e H em ft), $C \sim 2.8$. Obtenha C no SI.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}(\text{m}/0.3048)^3 \text{s}^{-1} &= 2.8 \times (\text{m}/0.3048)^{5/2}, \\ \text{m}^3 \text{s}^{-1} &= 2.8 \times \frac{(0.3048)^3}{(0.3048)^{5/2}} \text{m}^{5/2}; \Rightarrow \\ C &= 2.8 \times 0.3048^{1/2} = 1.546.\end{aligned}$$

Uma outra abordagem é tentar um ataque *racional* e dimensionalmente consistente para o problema. Note que a equação

$$Q = CLH^{3/2}$$

é *dimensionalmente inconsistente*: uma evidência disso é que C muda de valor quando mudamos o sistema de unidades. É relativamente fácil corrigir isso, entretanto. Na equação acima a vazão cresce linearmente com a largura da soleira; portanto, basta considerar a *vazão por unidade de largura*, $q = Q/L$. Esta por sua vez depende claramente de H . Com um pequeno esforço, notamos que o escoamento é forçado apenas pela gravidade; incluímos portanto a aceleração da gravidade g na lista de variáveis intervenientes. Temos agora 3 variáveis (q , g e H) e 2 dimensões fundamentais: o comprimento L e o tempo T . A lista de dimensões das variáveis é

$$\begin{aligned}[[q]] &= L^2 T^{-1}, \\ [[g]] &= L T^{-2}, \\ [[H]] &= L.\end{aligned}$$

A matriz dimensional é

| | | | |
|---|-----|-----|-----|
| | q | g | H |
| L | 2 | 1 | 1 |
| T | -1 | -2 | 0 |

Existe apenas um parâmetro adimensional, que tem que ser constante; portanto,

$$\frac{q}{H\sqrt{gH}} = \alpha \quad \Rightarrow \quad Q = \alpha\sqrt{g}LH^{3/2}.$$

Uma segunda forma de responder à questão sobre o valor de C no SI, portanto, é reconhecer que $C = \alpha\sqrt{g}$ (em qualquer sistema de unidades!), onde agora α é uma constante adimensional e *universal*. No sistema britânico, $g = 32.2 \text{ ft s}^{-2}$; logo,

$$\begin{aligned} \alpha\sqrt{32.2} &= 2.8; \\ \alpha &= \frac{2.8}{\sqrt{32.2}} = 0.493. \end{aligned}$$

Portanto, no SI nós revertemos o raciocínio:

$$C = \alpha\sqrt{g} = 0.493 \times \sqrt{9.81} = 1.545 \blacksquare$$

Exemplo 8.2.1

Um reservatório de acumulação de cheias urbano tem uma área horizontal $A = 100000 \text{ m}^2$ e paredes verticais. O reservatório está inicialmente vazio, e recebe uma cheia $I(t)$ mostrada em vermelho na figura 8.1. O reservatório possui um vertedor de soleira livre e largura $L = 20 \text{ m}$. Use o coeficiente C calculado acima, e obtenha a vazão efluente $O(t)$ em função do tempo, de 1 em 1 minuto. Resolva o problema usando um método de diferenças finitas *de sua escolha* para a equação de balanço hídrico do reservatório,

$$\frac{dS}{dt} = I(t) - O(t).$$

SOLUÇÃO

Em geral, precisamos de uma relação

$$O = O(S).$$

As paredes do reservatório de acumulação são verticais:

$$\begin{aligned} S &= AH, \\ O &= \alpha\sqrt{g}LH^{3/2}. \end{aligned}$$

No instante inicial, o reservatório está vazio:

$$S(0) = H(0) = 0.$$

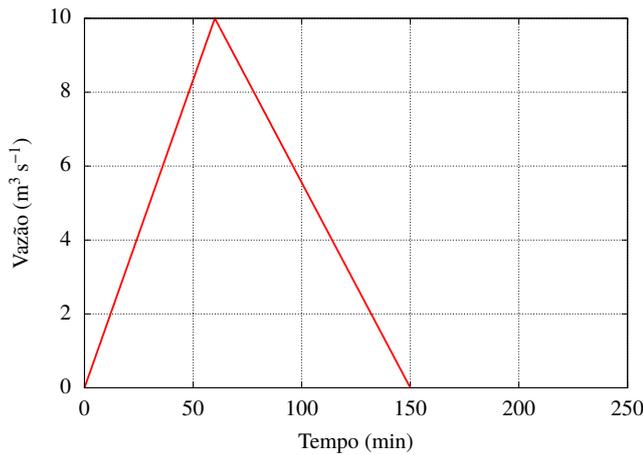


Figura 8.1: Cheia afluente a um reservatório de acumulação urbano.

Isso nos dá a condição inicial do problema.

A vazão efluente é “triangular”, com duas retas cujas equações são facilmente obtidas:

$$I(t) = \begin{cases} t/360, & 0 \leq t \leq 3600, \\ 50/3 - t/540 & 3600 < t \leq 9000. \end{cases}$$

Note que nós já convertimos as equações de o gráfico da figura 1 para t em segundos. A equação diferencial que temos que resolver é

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= I(t) - O(t), \\ S &= AH, \\ O(t) &= \alpha\sqrt{gL}[H(t)]^{3/2}, \\ \frac{d[AH]}{dt} + \alpha\sqrt{gL}[H(t)]^{3/2} &= I(t), \\ \frac{dH}{dt} + \left[\frac{\alpha\sqrt{gL}}{A} \right] H^{3/2} &= \frac{I(t)}{A}, \\ \frac{dH}{dt} + bH^{3/2} &= f(t), \\ b &= \frac{\alpha\sqrt{gL}}{A}, \\ f(t) &= \frac{I(t)}{A}. \end{aligned}$$

Solução A forma mais simples de resolver numericamente a equação diferencial deste problema é utilizar um esquema de diferenças finitas explícito de 1ª ordem:

$$\begin{aligned} \frac{H_{n+1} - H_n}{\Delta t} + bH_n^{3/2} &= f(t_n); \\ H_{n+1} - H_n + b\Delta t H_n^{3/2} &= f(t_n)\Delta t; \\ H_{n+1} &= H_n - b\Delta t H_n^{3/2} + f(t_n)\Delta t; \\ H_{n+1} &= H_n + \Delta t \left[f(t_n) - bH_n^{3/2} \right]. \end{aligned}$$

O programa de computador `rout01.py` foi escrito para resolver o problema, e é mostrado na listagem 8.1.

Listing 8.1: `rout01.py` – Propagação de cheia com um método explícito.

```

1  #!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
2  -*- coding: iso-8859-1 -*-
3  #-----
4  # rout01: propagação de cheia em um reservatório de acumulação de
5  # cheias com um esquema explícito
6  #
7  # Nelson Luís Dias
8  # 2020-07-05T12:26:50
9  # -----
10 from math import sqrt
11 # -----
12 # constantes do problema
13 # -----
14 A = 100000.0          # área horizontal do reservatório
15 alfa = 0.493         # constante universal para um vertedor
16 g = 9.81             # aceleração da gravidade
17 L = 20.0             # largura da soleira
18 b = alfa * sqrt(g) * L / A # cte da eq diferencial
19 # -----
20 # hidrógrafa afluente (m3/s/m2)
21 # -----
22 def f(t):
23     if t <= 3600:
24         return (t/360.0)/A
25     elif t <= 9000:
26         return (50.0/3.0 - t/540.0)/A
27     else :
28         return 0.0
29     pass
30 pass
31 # -----
32 # tudo pronto para resolver?
33 # -----
34 fou = open('rout01.out','wt')
35 told = 0
36 Iold = 0.0
37 Hold = 0.0          # altura inicial
38 Oold = 0.0          # hidrógrafa efluente inicial
39 fou.write('    Tempo(s)    I(t) (m3/s)    O(t) (m3/s)\n')
40 fou.write('    %8d    %8.2f    %8.2f\n' % (told,Iold,Oold))
41 # -----
42 # aplicação do método explícito. note que told, tnew e deltat são
43 # variáveis inteiras.
44 # -----
45 deltat = 60          # passo de tempo de um minuto
46 while told < 36000 :
47     tnew = told + deltat
48     Inew = A*f(tnew)
49     Hnew = Hold + deltat*( f(told) - b*Hold**1.5)
50     Onew = b*A*Hnew**1.5
51 # -----
52 # imprime esta linha de resultados
53 # -----
54     fou.write('    %8.2f    %8.2f    %8.2f\n' % (tnew,Inew,Onew))
55     told = tnew
56     Hold = Hnew
57 pass
58 fou.close()

```

Graficamente, a figura 8.2 mostra o resultado da simulação. Quando $O = O(S)$, o máximo de O acontece em

$$I = O.$$

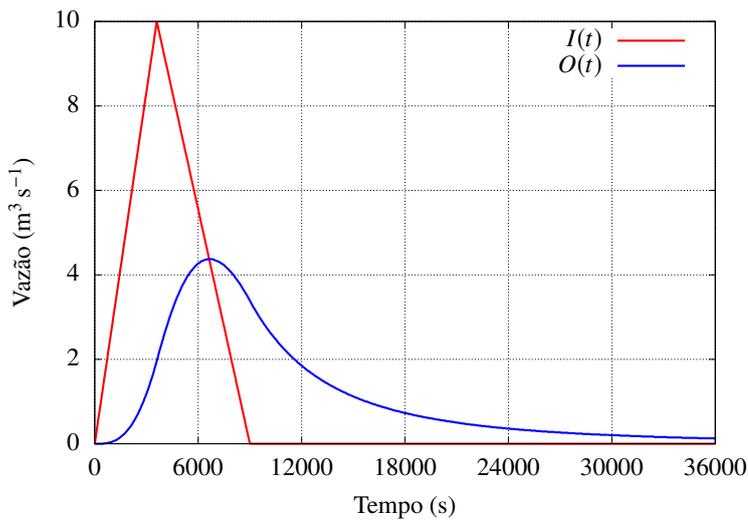


Figura 8.2: Simulação de um reservatório de acumulação de cheias com um método explícito.

pois

$$\begin{aligned}
 O &= O(S); \\
 \frac{dO}{dt} &= \frac{dO}{dS} \frac{dS}{dt}; \\
 \frac{dO}{dt} = 0 &\quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{dt} = 0; \\
 \frac{dS}{dt} = I - O = 0 &\quad \Rightarrow \quad I = O.
 \end{aligned}$$

Com Runge-Kutta

O mesmo problema também pode ser resolvido facilmente pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem (Dias, 2020b). O programa `rout02.py` implementa essa solução alternativa.

Inicialmente, colocamos a equação diferencial em uma forma reconhecível pelo método de Runge-Kutta:

$$\frac{dH}{dt} = F(t, H) = f(t) - bH^{3/2}.$$

Com isso, é muito simples implementar $F(t, H)$ (que denominamos FF no programa `rout02.py`). O programa completo é mostrado na listagem 8.2.

Listing 8.2: `rout02.py` – Propagação de cheia com o método de Runge-Kutta.

```

1 #!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
2 # -*- coding: iso-8859-1 -*-
3 #-----
4 # rout02: propagação de cheia em um reservatório de acumulação de
5 # cheias com um método de Runge-Kutta de 4a ordem
6 #
7 # Nelson Luís Dias

```

```

8 # 2020-07-05T13:41:13
9 # -----
10 from math import sqrt
11 # -----
12 # constantes do problema
13 # -----
14 A = 100000.0           # área horizontal do reservatório
15 alfa = 0.493           # constante universal para um vertedor
16 g = 9.81              # aceleração da gravidade
17 L = 20.0              # largura da soleira
18 b = alfa * sqrt(g) * L / A # cte da eq diferencial
19 # -----
20 # hidrógrafa afluente (m3/s/m2)
21 # -----
22 def f(t):
23     if t <= 3600:
24         return (t/360.0)/A
25     elif t <= 9000:
26         return (50.0/3.0 - t/540.0)/A
27     else :
28         return 0.0
29     pass
30 pass
31 def FF(t,H):
32     return f(t) - b*H**1.5
33 pass
34 # -----
35 # método de Runge-Kutta
36 # -----
37 def rk4(t,H,deltat,FF):
38     '''
39     rk4 implementa um passo do método de Runge-Kutta de ordem 4
40     '''
41     k1 = deltat*FF(t,H)
42     k2 = deltat*FF(t+deltat/2,H+k1/2)
43     k3 = deltat*FF(t+deltat/2,H+k2/2)
44     k4 = deltat*FF(t+deltat,H+k3)
45     Hn = H + k1/6.0 + k2/3.0 + k3/3.0 + k4/6.0
46     return Hn
47 pass
48 # -----
49 # Propaga a cheia usando o método de Runge-Kutta de ordem 4
50 # -----
51 deltat = 60.0           # passo em t
52 t = [0.0]              # t inicial
53 H = [0.0]              # H inicial
54 NN = int(36000.0/deltat) # número de passos
55 for n in range(0,NN):
56     tn = (n+1)*deltat   # novo t
57     Hn = rk4(t[n],H[n],deltat,FF) # novo H
58     t.append(tn)        # adiciona t à lista
59     H.append(Hn)        # adiciona H à lista
60 pass
61 fou = open('rout02.out','wt')
62 fou.write('    Tempo(s)    I(t) (m3/s)    O(t) (m3/s)\n')
63 for n in range(0,NN+1):
64     fou.write('    %8d    %8.2f    %8.2f\n' % (t[n],A*f(t[n]),b*A*H[n]**1.5))
65 pass
66 fou.close()

```

Graficamente, a figura 8.3 mostra o resultado da simulação.

Finalmente, nós comparamos as duas soluções na figura 8.4. Como podemos ver, embora o método de Runge-Kutta seja teoricamente muito mais acurado, o intervalo de tempo de simulação $\Delta t = 60$ s é suficientemente pequeno para que o método explícito produza um bom resultado, praticamente igual ao obtido pelo método de Runge-Kutta.

8.2 O método de Muskingum

No método de Muskingum, a área molhada é proporcional à vazão:

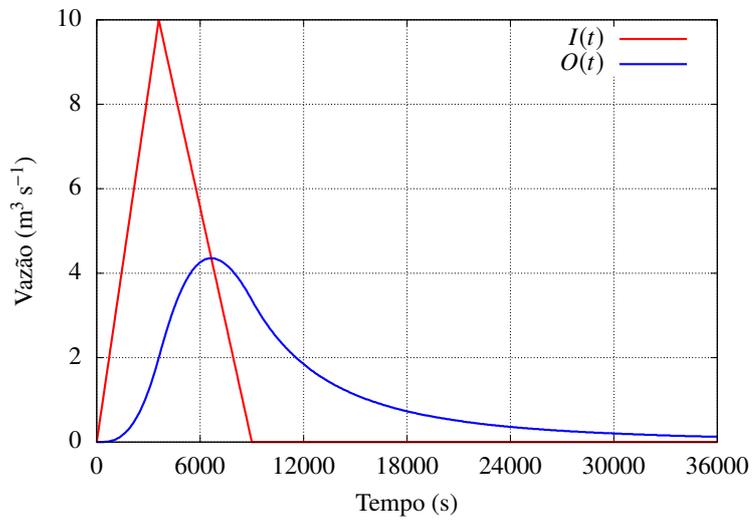


Figura 8.3: Simulação de um reservatório de acumulação de cheias com o método de Runge-Kutta.

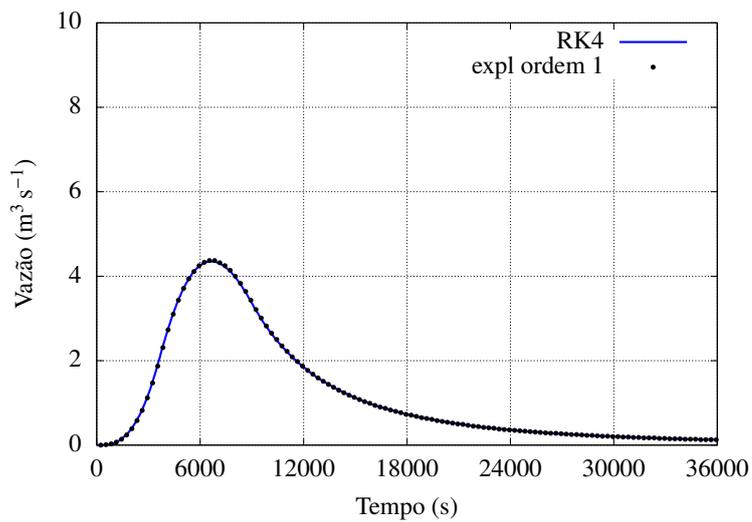
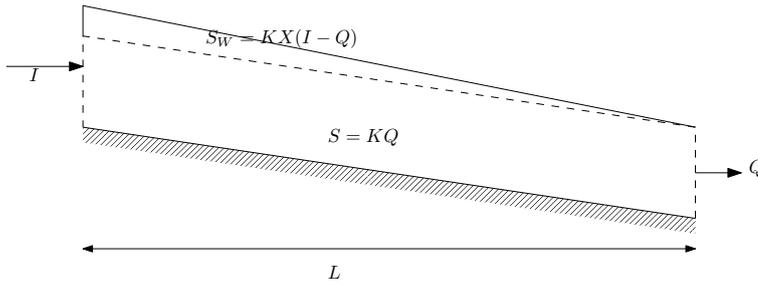


Figura 8.4: Comparação entre os métodos explícito (ordem 1) (pontos pretos) e de Runge-Kutta (linha azul) para a simulação de um reservatório de acumulação de cheias.



As bases geométricas do método de Muskingum.

$$A = Q/v$$

e o volume do armazenamento é simplesmente

$$S = AL = \frac{Q}{v}L = \frac{L}{v}Q = KQ.$$

O volume da cunha (o “triângulo” da figura abaixo) é, pelo mesmo motivo,

$$S_w = KX(I - Q)$$

Para uma cunha triangular, $X = 0.5$. Para trechos de rio, em geral $X < 0.5$.

Agora, o armazenamento pode ser escrito como

$$S = KQ + KX(I - Q)$$

Note que

$$K = \frac{L}{v} = \text{tempo de viagem entre as seções.}$$

Agora tudo o que nós precisamos fazer é discretizar no tempo a equação da continuidade:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= I(t) - Q(t), \\ \frac{S_{n+1} - S_n}{\Delta t} &= \frac{I_{n+1} + I_n}{2} - \frac{Q_{n+1} - Q_n}{2} \\ \frac{KQ_{n+1} + KX(I_{n+1} - O_{n+1}) - KQ_n - KX(I_{n+1} - O_{n+1})}{\Delta t} &= \frac{I_{n+1} + I_n}{2} - \frac{Q_{n+1} - Q_n}{2} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= C_1 I_{n+1} + C_2 I_n + C_3 Q_n, \\ C_1 &= \frac{\Delta t - 2KX}{2K(1 - X) + \Delta t} \\ C_2 &= \frac{\Delta t + 2KX}{2K(1 - X) + \Delta t} \\ C_3 &= \frac{2K(1 - X) - \Delta t}{2K(1 - X) + \Delta t} \\ K_n &= \frac{0.5\Delta t[(I_{n+1} + I_n) - (Q_{n+1} + Q_n)]}{X(I_{n+1} - I_n) + (1 - X)(Q_{n+1} - Q_n)} \end{aligned}$$

O programa `muskingum.py` realiza (manualmente) a busca dos parâmetros K e X ótimos para o exemplo 8.4.1 de [Chow et al. \(1988\)](#).

Listing 8.3: musk.py — Propagação de cheia com o método de Muskingum.

```

1  #!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
2  # -*- coding: iso-8859-1 -*-
3  '''
4  musk.py: O método de Muskingum
5
6  N. L. Dias (nldias@ufpr.br),
7  2020-09-02T08:31:22
8  '''
9  # -----
10 # documentação
11 # -----
12 from argparse import ArgumentParser, RawTextHelpFormatter;
13 parser = ArgumentParser(prog='musk.py',
14                          formatter_class=RawTextHelpFormatter,
15                          description=__doc__);
16 parser.add_argument("--X", dest="X",
17                    required=True,
18                    help="X de Muskingum");
19 # -----
20 # rotinas auxiliares de estatística, etc..
21 # -----
22 from math import sqrt
23 def stat2(x):
24     '''
25     -----
26     (xm,xv) = stat2(x) calculates the mean xv and variance xv of x
27
28     Nelson Luís Dias
29     2009-05-12T09:18:31
30     2009-05-12T09:18:38
31     -----
32     '''
33 # -----
34 # be careful with empty arrays
35 # -----
36 n = len(x)
37 if n == 0:
38     return (fnan,fnan)
39 fn = float(n) # just in case
40 # -----
41 # first the mean
42 # -----
43 xm = 0.0
44 for xi in x:
45     xm += xi
46 xm /= fn
47 # -----
48 # now the variance
49 # -----
50 xv = 0.0
51 for xi in x:
52     xv += (xi - xm)**2
53 xv /= fn
54 return (xm,xv)
55 def covar(x,y,xmed,ymed):
56     '''
57     -----
58     sxy = covar(x,y,xmed,ymed) gives the covariance
59     sxy = (1/n) sum_{k=1}^n (x_i - xmed)(y_i - ymed).
60
61     Nelson Luís Dias
62     2010-01-14T16:25:12
63     2010-01-14T16:25:15
64     -----
65     '''
66 n = len(x)
67 if n == 0:
68     return fnan
69 assert n == len(y)
70 sxy = 0

```

```

71     fn = float(n) # just in case
72     for i in range(n):
73         sxy += (x[i] - xmed)*(y[i] - ymed)
74     return sxy/fn
75 def reglina(x,y):
76     '''
77     -----
78     calculates the linear regression  $y = a x$  , the correlation coefficient r,
79     the standard deviation sy of the distribution of y given x, and the standard
80     deviation sa the estimator of a
81     -----
82     '''
83     # -----
84     # check dimensions
85     # -----
86     nx = len(x)
87     ny = len(y)
88     assert (nx == ny)
89     fn = float(nx)
90     # -----
91     # starts by calculating central moments
92     # -----
93     (xavg,xvar) = stat2(x)
94     (yavg,yvar) = stat2(y)
95     coxy = covar(x,y,xavg,yavg)
96     # -----
97     # translates to non-central moments
98     # -----
99     sx20 = fn * ( xvar + (xavg*xavg) )
100    sy20 = fn * ( yvar + (yavg*yavg) )
101    sxy0 = fn * ( coxy + (xavg*yavg) )
102    # -----
103    # obtains the slope
104    # -----
105    a = sxy0 / sx20
106    # -----
107    # 2007-09-21T01:40 each time I look at this I get a different result; at least
108    # this time I have documented the equation in stat.tex
109    # -----
110    sa = sqrt( yvar / sx20 )
111    # -----
112    # now calculates mean square error and correlation coefficient via the
113    # definition that r is the ratio of explained to total variance of y
114    # -----
115    s2 = ( sy20 - 2.0 * a * sxy0 + a * a * sx20 ) / fn
116    sy = sqrt(s2)
117    if (s2 > yvar):
118        r = 0.0
119    else:
120        r = sqrt(1.0 - s2/yvar)
121    return (a,r,sy,sa)
122    # -----
123    # vazões afluyente II e efluente QQ
124    # -----
125    II = [93.0, 137.0, 208.0, 320.0, 442, 546.0, 630.0, 678.0, 691.0,
126          675.0, 634.0, 571.0, 477.0, 390.0, 329.0, 247.0, 184.0, 134.0,
127          108.0, 90.0];
128    QQ = [85.0, 91.0, 114.0, 159.0, 233.0, 324.0, 420.0, 509.0, 578.0,
129          623.0, 642.0, 635.0, 603.0, 546.0, 479.0, 413.0, 341.0, 274.0,
130          215.0, 170.0];
131    deltat = 1.0; # deltat = 1 hora
132    args = parser.parse_args();
133    X = float(args.X);
134    print(X);
135    # -----
136    # qual é a duração da cheia?
137    # -----
138    n = len(II)
139    assert len(QQ) == n;
140    # -----
141    # KKnum e KKden agora têm que ser arrays ...
142    # -----
143    from numpy import zeros;

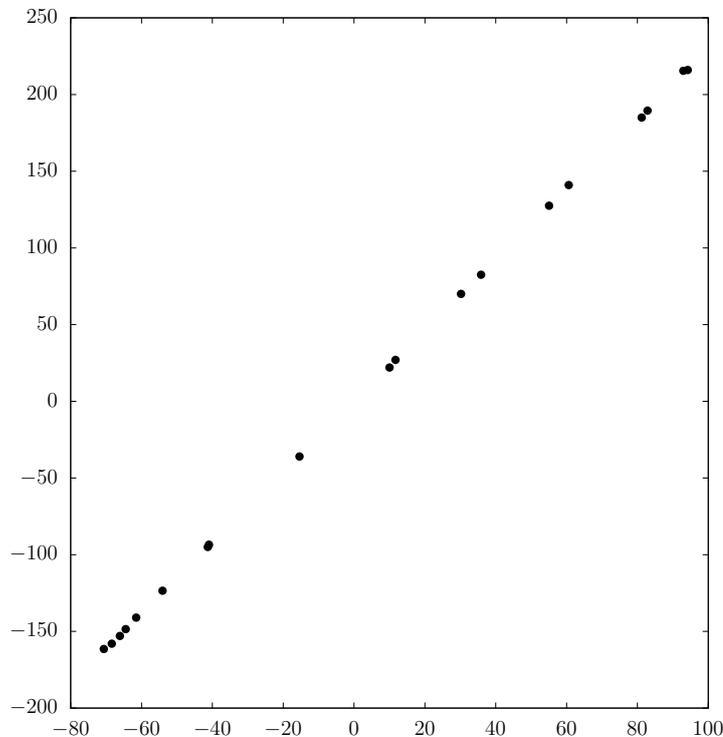
```

```

144 KKnum = zeros(n-1,float);
145 KKden = zeros(n-1,float);
146 fou = open('KKmusk.out','wt');
147 for j in range(n-1):
148     KKnum[j] = ( 0.5*deltat*((II[j+1]+II[j])-(QQ[j+1]+QQ[j])) );
149     KKden[j] = ( X*(II[j+1] - II[j]) + (1-X)*(QQ[j+1] - QQ[j]) );
150     fou.write("%10.5f %10.5f\n" % (KKden[j],KKnum[j]));
151 pass;
152 fou.close();
153 # -----
154 # calcula K por regressão linear!!!
155 # -----
156 (K,r,sy,sK) = reglina(KKden, KKnum);
157 print('K=□,K, □+□, sK);
158 print('1-r=□%12.10f' % (1-r));
159 # -----
160 # plota II, QQ e QS
161 # -----
162 den = 2*K*(1-X) + deltat;
163 C1 = (deltat - 2*K*X)/den;
164 C2 = (deltat+2*K*X)/den;
165 C3 = (2*K*(1-X) - deltat)/den;
166 QS = zeros(n,float);
167 QS[0] = QQ[0];
168 fou = open('QSmusk.out','wt')
169 fou.write("%4d %6.1f %6.1f %6.1f\n" % (0, II[0], QQ[0], QS[0]));
170 for j in range(1,n):
171     QS[j] = C1*II[j] + C2*II[j-1] + C3*QS[j-1];
172     fou.write("%4d %6.1f %6.1f %6.1f\n" % (j, II[j], QQ[j], QS[j]));
173 pass;
174 fou.close();

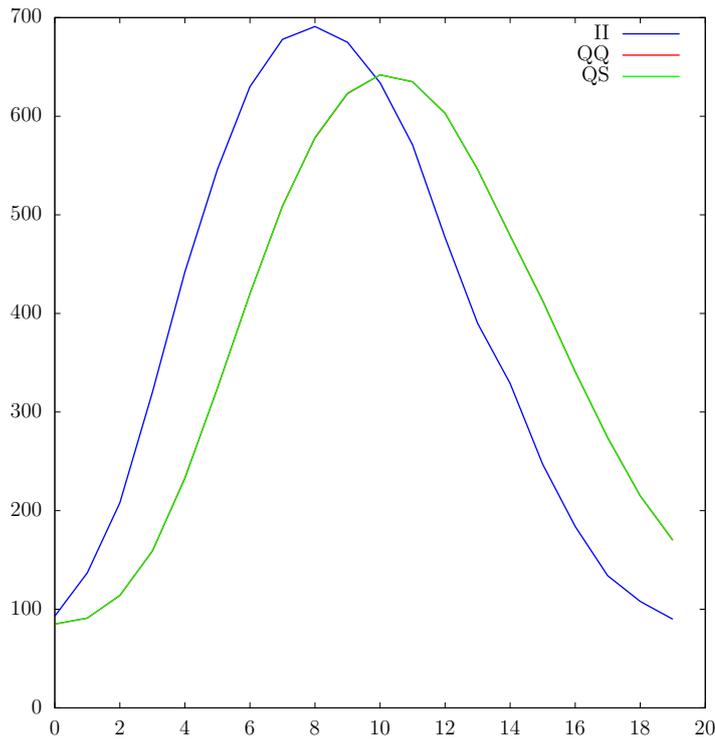
```

A calibração “ideal” que eu achei foi $X = 0.15$ e $K = 2.5$, e pode ser vista aqui:



Calibração de $X = 0.15$ e $K = 2.5$.

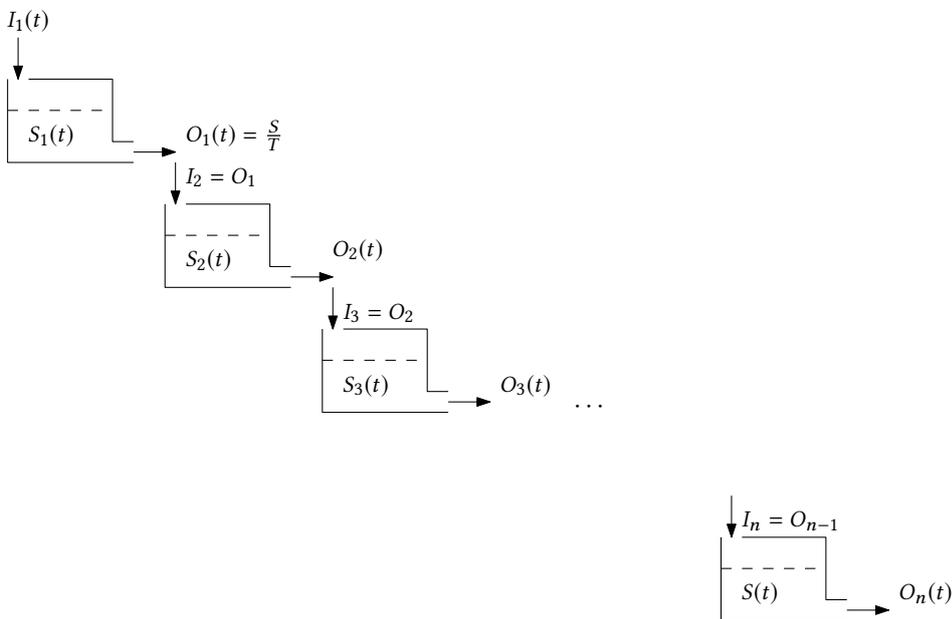
A simulação da propagação de cheia pode ser vista aqui:



Propagação de cheia.

8.3 Reservatórios lineares em série

Considere uma cascata de reservatórios lineares como na figura a seguir:



Cascata de reservatórios lineares

Modelos deste tipo, por serem muito simples analiticamente e fáceis de implementar, são amplamente usados em Hidrologia, *em diversas situações*. Vamos considerar o caso de uma hidrógrafa unitária com base neste modelo, conforme discutido na seção 8.5 de [Chow et al. \(1988\)](#).

Note que a HUI que estamos procurando é a *composição* de n reservatórios lineares, e *não* apenas um deles separadamente. As equações de

balanço agora são as seguintes:

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \delta(t), \\ O_1(t) &= u_1(t). \end{aligned}$$

Faça

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \delta(t), \\ O_1(t) &= u_1(t) = \frac{S_1(t)}{T}. \end{aligned}$$

A equação de balanço para o 1º reservatório será

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= \delta(t) - \frac{1}{T}S_1; \\ \frac{dS_1}{dt} + \frac{1}{T}S_1 &= \delta(t); \\ \frac{d(Tu_1)}{dt} + \frac{1}{T}(Tu_1) &= \delta(t); \\ T \frac{du_1}{dt} + u_1 &= \delta(t); \\ \frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{T} &= \frac{\delta(t)}{T}. \end{aligned}$$

Chamaremos $I_k(t)$ de $u_k(t)$, e chamaremos de $u_\delta(t)$ (como antes) a resposta conjunta dos n reservatórios. Vamos resolver a primeira equação (a seguir, note que estamos impondo $\llbracket u_1 \rrbracket = \llbracket \delta \rrbracket$)

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} + \frac{1}{T}u_1 &= \frac{1}{T}\delta(t) \\ u_1(t) &= U(t)V(t) \\ \left[U \frac{dV}{dt} + V \frac{dU}{dt} \right] + \frac{1}{T}UV &= \frac{1}{T}\delta(t) \\ U \underbrace{\left[\frac{dV}{dt} + \frac{1}{T}V \right]}_{=0} + V \frac{dU}{dt} &= \frac{1}{T}\delta(t). \end{aligned}$$

A solução para $V(t)$ é bem simples:

$$V(t) = V(0)e^{-t/T};$$

Substituindo de volta no que restou da EDO,

$$\begin{aligned}
 V(0)e^{-t/T} \frac{dU}{dt} &= \frac{1}{T} \delta(t) \\
 \frac{dU}{dt} &= \frac{1}{TV(0)} e^{t/T} \delta(t) \\
 \int_{\xi=0-}^t \frac{dU}{d\xi} d\xi &= \frac{1}{TV(0)} \int_{\xi=0-}^t e^{\xi/T} \delta(\xi) d\xi \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a) \delta(x) dx &= f(a); \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx &= f(0); \\
 U(t) - U(0) &= \frac{1}{V(0)T}, \\
 U(t) &= U(0) + \frac{1}{V(0)T}, \\
 u_1(t) &= U(t)V(t) \\
 &= V(0)e^{-t/T} \left[U(0) + \frac{1}{V(0)T} \right] \\
 &= \cancel{u_1(0)}^0 e^{-t/T} + \frac{e^{-t/T}}{T}
 \end{aligned}$$

Vamos prosseguir. A 2ª equação de balanço é

$$\frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{T} = \frac{u_1}{T}.$$

Agora, a solução por convolução é

$$\begin{aligned}
 u_2(t) &= \int_0^t \frac{e^{-\frac{(t-\tau)}{T}}}{T} u_1(\tau) d\tau \\
 &= \int_{\tau=0}^t \frac{e^{-\frac{(t-\tau)}{T}}}{T} \frac{e^{-\frac{\tau}{T}}}{T} d\tau \\
 &= \frac{e^{-t}}{T^2} \int_0^t d\tau \\
 &= \frac{te^{-t}}{T^2}.
 \end{aligned}$$

A 3ª equação de balanço é

$$\frac{du_3}{dt} + \frac{u_3}{T} = u_2(t).$$

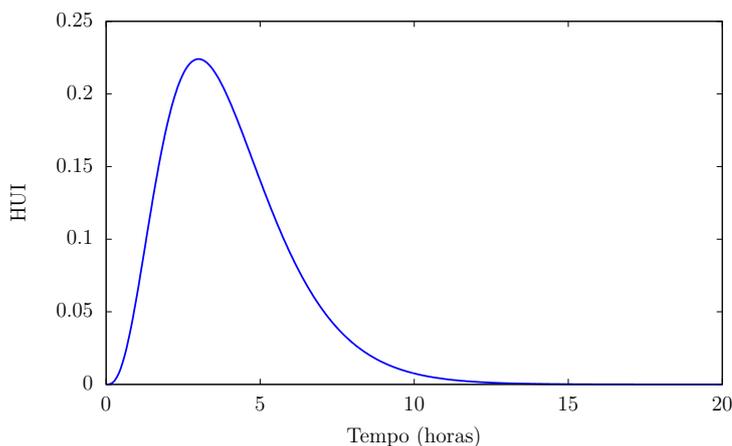
A solução por convolução é

$$\begin{aligned}
 u_3(t) &= \int_0^t \frac{e^{-\frac{(t-\tau)}{T}}}{T} u_2(\tau) d\tau \\
 &= \int_{\tau=0}^t \frac{e^{-\frac{(t-\tau)}{T}}}{T} \frac{\tau e^{-\frac{\tau}{T}}}{T^2} d\tau \\
 &= \frac{e^{-\frac{t}{T}}}{T^3} \int_0^t \tau d\tau \\
 &= \frac{t^2 e^{-\frac{t}{T}}}{2T^3}
 \end{aligned}$$

Ficou fácil descobrir a lei de formação:

$$u_\delta(t) = u_n(t) = \frac{t^{n-1} e^{-\frac{t}{T}}}{(n-1)! T^n} = \frac{t^{n-1} e^{-\frac{t}{T}}}{\Gamma(n) T^n}.$$

Graficamente,



A HUI resultado da convolução de n reservatórios lineares.

Note que está tudo certinho: $\int_0^\infty u_\delta(t) dt = 1$, e

$$\int_0^\infty u_\delta(t) dt = 1$$

(verifique!) Agora, os momentos de uma chuva real x e de uma vazão real y produzem estimativas de T e n . Os momentos 1 e 2 de uma função $f(t)$ são

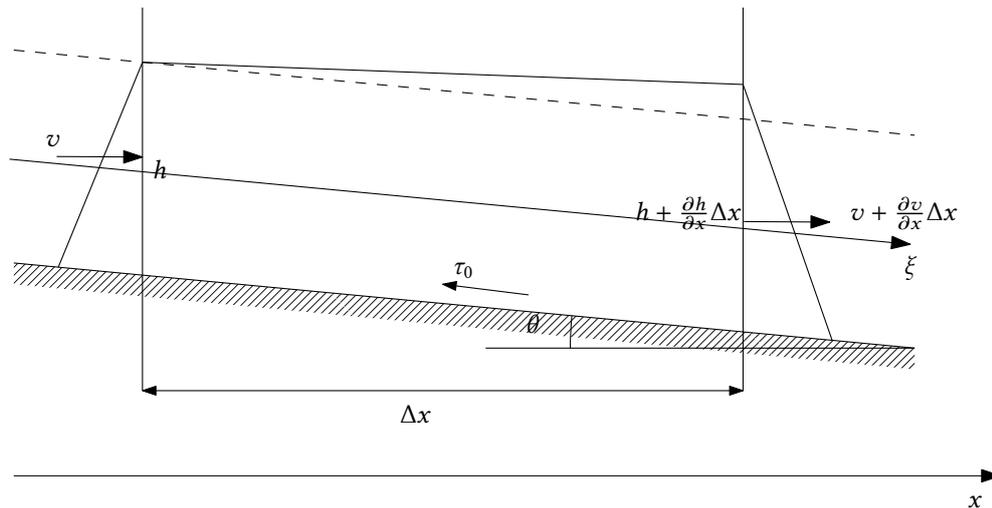
$$\begin{aligned}
 M^{(1)} &= \int_0^\infty t f(t) dt; \\
 M^{(2)} &= \int_0^\infty t^2 f(t) dt.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_y^{(1)} - M_x^{(1)} &= \frac{n}{T}, \\
 M_y^{(2)} - M_x^{(2)} &= \frac{n(n+1)}{T^2} + \frac{2n}{T} M_x^{(1)}.
 \end{aligned}$$

Capítulo 9

Propagação de cheias: modelos distribuídos

Considere um trecho de rio em escoamento variado em x e não permanente em t :



Trecho de rio em escoamento variado e não-permanente.

O balanço de massa é

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \, dV + \oint_{\mathcal{S}} \rho(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA,$$

$$0 \approx \frac{\partial}{\partial t} [\rho b h \Delta x + O(\Delta x^2)] - \rho v h b + \rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right) \left(h + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \right) b$$

$$0 = \left[\rho b \frac{\partial h}{\partial t} + \rho b v \frac{\partial h}{\partial x} + \rho b h \frac{\partial v}{\partial x} \right] \Delta x + O(\Delta x^2);$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(vh)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial hb}{\partial t} + \frac{\partial(vhb)}{\partial x} = 0,$$

$$hb = A,$$

$$vhb = vA = Q,$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Se houver contribuição lateral significativa (vazão por comprimento unitário ao longo do eixo do canal) q_l , a equação da continuidade torna-se

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_l.$$

Para o balanço de quantidade de movimento,

$$F_{c\xi} + F_{s\xi} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} v_\xi \rho dV + \oint_{\mathcal{S}} \rho v_\xi (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA.$$

Abrindo a expressão,

$$\begin{aligned} & \rho g b h \Delta x \operatorname{sen} \theta - \tau_0 \frac{\Delta x}{\cos \theta} b + \frac{1}{2 \cos \theta} \rho g b h^2 - \frac{1}{2 \cos \theta} \rho g b \left(h + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \right)^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \frac{v}{\cos \theta} h b \Delta x + O(\Delta x^2) \right] - \rho \frac{v}{\cos \theta} v b h + \rho \frac{1}{\cos \theta} \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right)^2 \left(h + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \right) b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho g b h \Delta x \operatorname{sen} \theta - \tau_0 \Delta x b + \frac{1}{2} \rho g b h^2 - \frac{1}{2} \rho g b \left(h + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \right)^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho v h b \Delta x + O(\Delta x^2) \right] - \rho v v b h + \rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right)^2 \left(h + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \right) b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho g b h \Delta x \operatorname{sen} \theta - \tau_0 \Delta x b - \rho g b h \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x = \\ & \rho b \Delta x \left[\frac{\partial v h}{\partial t} + v^2 \frac{\partial h}{\partial x} + 2 v h \frac{\partial v}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g h \operatorname{sen} \theta - \frac{\tau_0}{\rho} - g h \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial(vh)}{\partial t} + v^2 \frac{\partial h}{\partial x} + 2vh \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= v \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial v}{\partial t} + v v \frac{\partial h}{\partial x} + v h \frac{\partial v}{\partial x} + v h \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= v \underbrace{\left[\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (vh) \right]}_{\equiv 0} + h \left[\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{\tau_0}{\rho} &\equiv g h S_f \\ \operatorname{sen} \theta &\approx S_0 \\ g h S_0 - g h S_f - g h \frac{\partial h}{\partial x} &= h \left[\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= g(S_0 - S_f). \end{aligned}$$

9.1 A onda cinemática

Começamos com a equação de continuidade,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(vh)}{\partial x} = 0,$$

e *simplificamos bastante* a equação de Momentum:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f).$$

Quando $S_0 = S_f$, a linha de energia é paralela à linha d'água; o movimento é (localmente) uniforme; podemos voltar ao que estudamos no capítulo e integrar o perfil $v(z)/v_*$, etc., e obter (por exemplo) a equação de Manning. Em suma, se a equação de momentum admite essa simplificação, então $v = v(h)$ (existe uma “curva-chave”!) e

$$v = \frac{1}{n} R^{2/3} S_0^{1/2} \approx \frac{1}{n} h^{2/3} S_0^{1/2}.$$

Um ponto importante que é sempre bom lembrar: estamos simplificando a equação de momentum, mas mantendo a equação da continuidade em sua forma completa! Isso acontece frequentemente em Mecânica dos Fluidos, e pode ser rigorosamente justificado se analisarmos as ordens de magnitude *relativas* dos termos em cada equação.

Levando v na equação da continuidade,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{n} h^{5/3} S_0^{1/2} \right] &= 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \underbrace{\frac{5}{3} \frac{h^{2/3} S_0^{1/2}}{n}}_{c_h} \frac{\partial h}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Note que a celeridade da onda $h(t)$ é

$$\begin{aligned} c_h &= \frac{5}{3} \frac{h^{2/3} S_0^{1/2}}{n} \\ &= \frac{5}{3} v(h)! \end{aligned}$$

Portanto, a onda de cheia move-se *mais rapidamente* do que a água do rio.

Algumas vezes, é mais prático trabalhar com as variáveis Q e A do que com v e h . Multiplique a equação da continuidade por b :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hb)}{\partial t} + \frac{\partial(vhb)}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

A equação de Manning pode ser reescrita em termos de $Q = Q(A)$:

$$\begin{aligned}v &= \frac{1}{n} h^{2/3} S_0^{1/2}, \\v h b &= Q = \frac{1}{n} b h^{5/3} S_0^{1/2} \\Q &= \frac{1}{n} \frac{b^{2/3}}{b^{2/3}} b^{3/3} h^{5/3} S_0^{1/2} \\Q &= \frac{1}{n b^{2/3}} [b h]^{5/3} S_0^{1/2} \\Q &= \frac{1}{n b^{2/3}} A^{5/3} S_0^{1/2}\end{aligned}$$

Escrevemos agora a equação da onda cinemática como

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0, \\ \frac{dA}{dQ} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{dQ}{dA} \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

Esta última é uma equação de onda na variável que talvez seja de maior interesse prático, $Q = Q(x, t)$. A celeridade da onda cinemática de vazão é

$$\begin{aligned}c_Q &= \frac{dQ}{dA} = \frac{5}{3} \frac{1}{n b^{2/3}} A^{2/3} S_0^{1/2} \\ &= \frac{5}{3} \frac{1}{n} \left(\frac{A}{b}\right)^{2/3} S_0^{1/2} \\ &= \frac{5}{3} \frac{1}{n} \underbrace{h^{2/3} S_0^{1/2}}_{v(h)} \\ &= \frac{5}{3} v(h).\end{aligned}$$

Não surpreendentemente,

$$c_Q = c_h.$$

Concluimos que Q é uma onda que se propaga solidariamente com h , o que é, em retrospecto, óbvio. Nosso problema agora é resolver a onda cinemática para Q numericamente. Existem muitas possibilidades (em princípio, existem infinitas possibilidades).

Vou tentar encontrar uma solução *relativamente simples*. Em primeiro lugar, noto que para resolver a onda cinemática tendo uma única variável dependente $Q(x, t)$ eu ainda vou precisar de A ; logo, preciso inverter a

equação de Manning:

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{nb^{2/3}} A^{5/3} S_0^{1/2} \\
 Qnb^{2/3} &= A^{5/3} S_0^{1/2} \\
 Qnb^{2/3} S_0^{-1/2} &= A^{5/3} \\
 A &= \left[Qnb^{2/3} S_0^{-1/2} \right]^{3/5} \\
 c_Q &= \frac{5}{3} \frac{1}{nb^{2/3}} S_0^{1/2} \left\{ \left[Qnb^{2/3} S_0^{-1/2} \right]^{3/5} \right\}^{2/3} \\
 c_Q &= \frac{5}{3} \frac{1}{nb^{2/3}} S_0^{1/2} \left[Qnb^{2/3} S_0^{-1/2} \right]^{2/5} \\
 &= \frac{5}{3} n^{-3/5} b^{-2/5} S_0^{3/10} Q^{2/5}.
 \end{aligned}$$

Supondo que eu esteja certo, e nunca se sabe, o meu objetivo agora é utilizar o método (explícito, mas acurado) de Runge-Kutta, porque o “pacote” já está semi-pronto. Como sempre, a ideia é discretizar Q :

$$Q_i^k = Q(i\Delta x, k\Delta t), \quad i = 0, \dots, N_x, \quad k = 0, \dots, N_t.$$

Suponha que eu discretize *primeiro* em x ; então, deixo de ter uma incógnita contínua em x e passo a ter $n + 1$ incógnitas Q_i . Por enquanto, vamos supor que $Q_i = Q_i(t)$:

$$\begin{aligned}
 \Delta x &= L/N_x, \\
 Q_i &= Q(i\Delta x, t) = Q_i(t).
 \end{aligned}$$

Vamos representar a totalidade dos Q_i s por um vetor Q . A equação da onda se torna

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ_i}{dt} + c_{Q_i} \frac{Q_i - Q_{i-1}}{\Delta x} &= 0, \quad i = 1, \dots, N_x, \\
 c_{Q_i} &= \frac{5}{3} n^{-3/5} b^{-2/5} S_0^{3/10} Q_i^{2/5} \\
 \frac{dQ_i}{dt} &= - \underbrace{\frac{5}{3} n^{-3/5} b^{-2/5} S_0^{3/10} Q_i^{2/5}}_{K_F} \frac{Q_i - Q_{i-1}}{\Delta x}, \quad i = 1, \dots, N_x
 \end{aligned}$$

Vetorialmente, agora nós temos

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ}{dt} &= F(t, Q), \\
 F_i(Q, t) &= -K_F Q_i^{2/5} \frac{Q_i - Q_{i-1}}{\Delta x}, \quad i = 1, \dots, N_x.
 \end{aligned}$$

Note entretanto que as equações acima só podem ser calculadas para F_1, \dots, F_{N_x} ; entretanto, Q_i começa em $i = 0$! Para que o método de Runge-Kutta possa ser aplicado, nós precisamos de uma equação para

$$\frac{dQ_0}{dt} = F_0(t, Q).$$

Note que a onda cinemática pressupõe que nós conhecemos a condição de contorno de jusante, $Q_0(t)$. Portanto, essa derivada é conhecida. Discretizemos agora no tempo:

$$Q_i^k = Q(i\Delta x, k\Delta t),$$

$$F_0^k = F_0(k\Delta t).$$

Então

$$\frac{Q_0^k - Q_0^{k-1}}{\Delta t} = F_0^k.$$

Portanto, a cada passo de tempo k , F_0 é facilmente calculado, a partir de $k = 1$. Isso nos dá a equação para F_0 , que faltava, e efetivamente é a forma de impor a condição de contorno no método de Runge-Kutta. O método em si é simplesmente a sequência de operações vetoriais

$$\frac{dQ}{dt} = F(t, Q),$$

$$\mathbf{k}_1 = \Delta t F(t_k, \mathbf{Q}^k),$$

$$\mathbf{k}_2 = \Delta t F\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{Q}^k + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1\right),$$

$$\mathbf{k}_3 = \Delta t F\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{Q}^k + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2\right),$$

$$\mathbf{k}_4 = \Delta t F(t_k + \Delta t, \mathbf{Q}^k + \mathbf{k}_3),$$

$$\mathbf{Q}^{k+1} = \mathbf{Q}^k + \frac{1}{6}\mathbf{k}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{k}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{k}_3 + \frac{1}{6}\mathbf{k}_4.$$

Em princípio, nós agora temos tudo o que é necessário para a implementação computacional da onda cinemática.

Um ponto importante, e doloroso, é a estabilidade restrita dos métodos explícitos. Embora não seja proveitoso fazer uma análise de estabilidade detalhada do método numérico que vamos tentar aplicar, é sempre útil olhar para o número de Courant,

$$Co = \frac{c_Q \Delta t}{\Delta x}$$

e verificar se (em geral) $Co \leq 1$. Como c_Q depende de $Q^{2/5}$, parece suficiente calcular

$$Co_{\max} = \frac{5}{3} n^{-3/5} b^{-2/5} S_0^{3/10} Q_{\max}^{2/5} \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Todas essas ideias agora ficam implementadas no programa `oncin.py`:

Listing 9.1: `oncin.py` — Propagação de cheia com o método de Oncinigung.

```

1 #!/usr/bin/python3
2 # -*- coding: iso-8859-1 -*-
3 # -----
4 # oncin.py: resolve uma onda cinemática com o método de Runge-Kutta
5 #
6 # Nelson Luís Dias
7 # 2020-09-03T18:08:43
8 # 2020-09-04T11:22:28 (a new day is born)

```

```

9 # -----
10 from math import isnan;
11 def FF(t,Q,F0):
12     '''
13     o coração de RK4
14     '''
15     vv = zeros(Nx+1,float);
16     vv[0] = F0; # will this enforce the BC?
17     # for i in range(1,Nx+1):
18     #     Qbas = Q[i];
19     #     assert Qbas >= 0.0;
20     #     aux = -KF*Qbas**(0.4)*(Q[i] - Q[i-1])/dx;
21     #     vv[i] = aux;
22     # pass;
23 # -----
24 # a forma a seguir é *muito* mais eficiente do que um loop clássico
25 # -----
26     vv[1:Nx+1] = -KF*(Q[1:Nx+1])**0.4*(Q[1:Nx+1] - Q[0:Nx])/dx ;
27     return vv;
28 def rk4(t,Q,dt,FF,F0):
29     '''
30     rk4 implementa um passo do método de Runge-Kutta de ordem 4
31     '''
32     k1 = dt*FF(t,Q,F0);
33     k2 = dt*FF(t+dt/2,Q+k1/2,F0);
34     k3 = dt*FF(t+dt/2,Q+k2/2,F0);
35     k4 = dt*FF(t+dt,Q+k3,F0);
36     Qn = Q + k1/6.0 + k2/3.0 + k3/3.0 + k4/6.0;
37     return Qn;
38 def Qt(t):
39     '''
40     a vazão (cfs!!!--> m3/s) em função do tempo na seção zero
41     '''
42     assert ( t >= 0 );
43     Q0 = 2000.0;
44     QM = 6000.0;
45     delQ = 4000.0/(48.0*60) ;
46     if t <= (12.0*60) :
47         Qr = Q0
48     elif t <= (60.0*60):
49         Qr = Q0 + delQ*(t - 12*60);
50     elif t <= 108.0*60:
51         Qr = QM - delQ*(t - 60*60);
52     else:
53         Qr = Q0;
54     pass
55     return Qr*(0.3048)**3; # retorno tudo em m3/s
56 pass
57 # -----
58 # O programa propriamente dito começa aqui
59 # -----
60 print("Tabela de vazões (m3/s):")
61 for it in range(0,121*60,12*60):
62     print("%6d %7.2f" % (it//60,Qt(it)));
63 pass;
64 # -----
65 # rugosidade e geometria do canal
66 # -----
67 n = 0.035; # coeficiente de Manning
68 S0 = 0.01; # declividade
69 b = 200.0; # largura, ft
70 b *= 0.3048; # b em m
71 # -----
72 # KF pode ser uma variável global
73 # -----
74 KF = 5.0*n**(-0.6)*b**(-0.4)*S0**(0.3)/3.0;
75 # -----
76 # agora eu escolho os parâmetros de minha discretização
77 # -----
78 L = 15000.0; # comprimento do canal, ft
79 L *= 0.3048; # comprimento do canal, m
80 Nx = 1500; # discretização em x
81 dx = L/Nx; # deltax, metros

```

```

82 TT = 150*60.0;      # tempo de simulação: 150 min = 150 * 60 s
83 Nt = 15000;        # discretização em t
84 dt = TT/Nt;        # deltat, s
85 print('L, b, TT= ', L, b, TT);
86 print(dx, dt);     # verifica
87 # -----
88 # Importante! Verifica o número de Courant
89 # -----
90 from numpy import zeros;
91 Qtime = zeros(Nt+1, float);
92 for k in range(Nt+1):
93     t = k*dt ;
94     Qtime[k] = Qt(t);
95 pass
96 Qmax = max(Qtime);
97 cQmax = KF*Qmax**(0.4);
98 Cou = cQmax*dt/dx ;
99 print('Cou= ', Cou);
100 assert (Cou < 1.0);
101 # -----
102 # só quero guardar (acadak, acadai) dos dados Q calculados
103 # -----
104 print(Nx, Nt);
105 acadak = 100;
106 acadai = 100;
107 IL = Nx//acadai;
108 IT = Nt//acadak;
109 print("IT, IL= ", IT, IL);
110 Qs = zeros((IT+1, IL+1), float);
111 # -----
112 # aloco o vetor QQ
113 # -----
114 QQ = zeros((2, Nx+1), float);
115 QQ[0] = Qt(0.0);      # condição inicial
116 # -----
117 # guarda valores selecionados da condição inicial em Qs[0]
118 # -----
119 for isx in range(IL+1):
120     Qs[0, isx] = QQ[0, isx*acadai];
121 pass;
122 # -----
123 # prepara o início da simulação
124 # -----
125 old = 0;              # posição das alturas antigas
126 new = 1;              # posição das novas alturas
127 # from sys import stdout;
128 # -----
129 # finalmente, o loop para simulação
130 # -----
131 for k in range(1, Nt+1):
132     t = k*dt;          # tempo em segundos
133     print(k, Nt);      # imprime o tempo
134     QOk = Qt(t);       # a vazão agora na sec mont
135     FO = (QOk - QQ[old, 0])/dt # calcula a derivada
136     QQ[new] = rk4(t, QQ[old], dt, FF, FO); # avança o vetor Q
137 # -----
138 # a cada acadak:
139 # -----
140 if k % acadak == 0:
141     ks = k // acadak;
142     for isx in range(IL+1):
143         stdout.write("%6d %6d" % (ks, isx));
144         Qs[ks, isx] = QQ[new, isx*acadai];
145     pass;
146 #     stdout.write("\n");
147     pass
148     (new, old) = (old, new)
149 pass
150 # -----
151 # agora imprime, primeiramente, as vazões nas acadai seções
152 # -----
153 fout = open('oncin-t.out', 'wt');
154 for ks in range(IT):

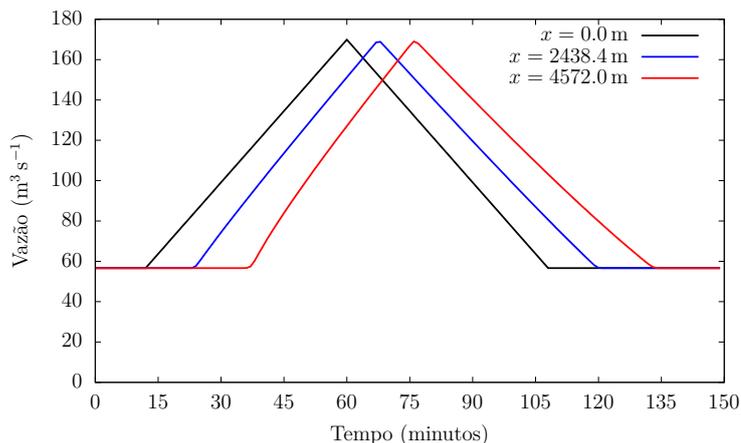
```

```

155     t = ks*acadak*dt;
156     fout.write('%8.2f' % t);
157     for isx in range(IL+1):
158         fout.write('%8.2f' % Qs[ks,isx]);
159     pass;
160     fout.write('\n');
161 pass;
162 fout.close()

```

A saída pode ser vista aqui, graficamente:



Propagação de uma onda cinemática, método de Runge-Kutta (Exemplo 9.6.1 de [Chow et al. \(1988\)](#)).

9.2 Muskingum-Cunge

$$K = \frac{\Delta x}{c_{Q_i^k}}$$

$$X = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{Q_i^k}{bc_{Q_i^k} S_0 \Delta x} \right)$$

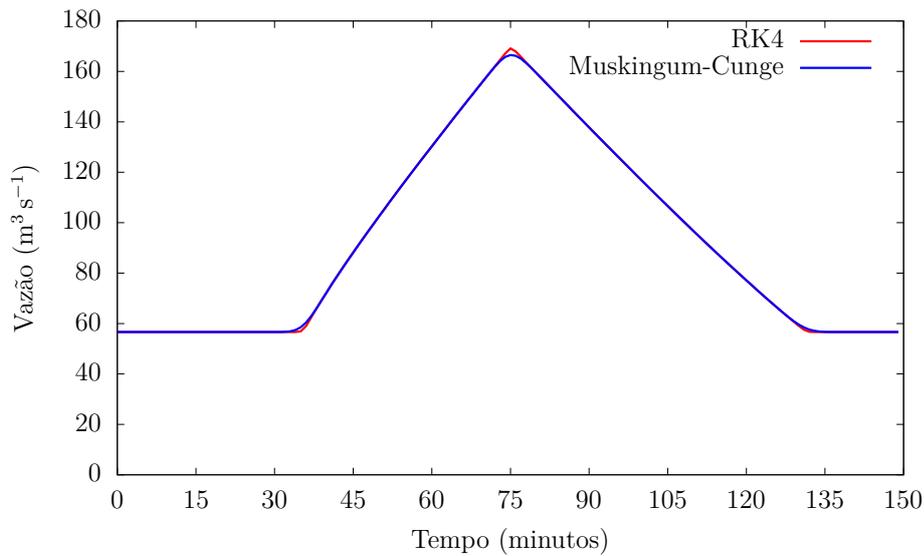
$$C_1 = \frac{\Delta t - 2KX}{2K(1 - X) + \Delta t}$$

$$C_2 = \frac{\Delta t + 2KX}{2K(1 - X) + \Delta t}$$

$$C_3 = \frac{2K(1 - X) - \Delta t}{2K(1 - X) + \Delta t}$$

$$Q_i^{k+1} = C_1 Q_{i-1}^{k+1} + C_2 Q_{i-1}^k + C_3 Q_i^k$$

Eis aqui uma comparação do método de Runge-Kutta com o método de Muskingum-Cunge:



9.3 A aproximação da difusão

Re-começamos com a equação de continuidade,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(vh)}{\partial x} = 0,$$

e simplificamos um pouco menos a equação de momentum:

$$\cancel{\frac{\partial \psi}{\partial t}} + v \cancel{\frac{\partial \psi}{\partial x}} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f).$$

Isso nos dá um par de equações,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= -\frac{\partial(vh)}{\partial x}, \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= S_0 - S_f. \end{aligned}$$

Derive “cruzado”:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] &= \frac{\partial^2(vh)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right] &= \frac{\partial S_f}{\partial t}. \end{aligned}$$

Ou:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_f}{\partial t} &= \frac{\partial^2(vh)}{\partial x^2}, \\
v &= \frac{1}{n} h^{2/3} S_f^{1/2}, \\
vnh^{-2/3} &= S_f^{1/2}, \\
S_f &= v^2 n^2 h^{-4/3} = n^2 (vh)^2 h^{-2-4/3} = n^2 (vh)^2 h^{-10/3}, \\
\frac{\partial [n^2 (vh)^2 h^{-10/3}]}{\partial t} &= - \frac{\partial^2(vh)}{\partial x^2} \\
q &\equiv (vh); \\
\frac{\partial [n^2 q^2 h^{-10/3}]}{\partial t} &= \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \\
\frac{\partial [q^2 h^{-10/3}]}{\partial t} &= \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \\
h^{-10/3} \times 2q \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{10}{3} q^2 h^{-13/3} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \\
h^{-10/3} \times 2q \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{10}{3} q^2 h^{-13/3} \frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \\
2q \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{10}{3} q^2 h^{-3/3} \frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{h^{10/3}}{n^2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \\
\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{5}{3} q h^{-3/3} \frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{h^{10/3}}{2qn^2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \\
\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{5}{3} v h h^{-1} \frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{h^{10/3}}{2qn^2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \\
\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{5}{3} v \frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{h^{10/3}}{2qn^2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}.
\end{aligned}$$

Note que isso é a mesma aproximação da onda cinemática do lado esquerdo, com uma correção “difusiva” do lado direito! O coeficiente de difusão que aparece é dimensionalmente consistente:

$$D = \frac{h^{10/3}}{2qn^2} = \frac{h^{7/3}}{2n^2 v} = \frac{vh}{2S_f}.$$

Observe agora que $[[S_f]] = 1$, e $[[D]] = L^2 T^{-1}$! No formato em que estamos, a solução do problema hidrodinâmico, estritamente, falando, envolve resolver o par de equações diferenciais parciais

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t} &= - \frac{\partial q}{\partial x}, \\
\frac{\partial q}{\partial t} &= - \frac{5}{3} (q/h) \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{h^{10/3}}{2qn^2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}.
\end{aligned}$$

Se nós discretizarmos no espaço, ficaremos com dois sistemas de EDOs:

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= F_h(t, \mathbf{q}), \\
\frac{dq}{dt} &= F_q(t, \mathbf{h}, \mathbf{q}).
\end{aligned}$$

Novamente, isso pode ser resolvido (por exemplo) por Runge-Kutta.

Capítulo 10

Probabilidade e estatística aplicadas à Hidrologia

Em primeiro lugar, uma questão filosoficamente importante: modelar um fenômeno como “aleatório” não significa que o fenômeno não possa ser intrinsecamente governado por leis determinísticas. Significa, simplesmente, que conhecer as condições iniciais, as condições de contorno, ou *resolver* as equações dinâmicas é na prática impossível. Neste caso, é *melhor* “apostar” ou “projetar” com base em probabilidades. Exemplos:

- O resultado de uma rodada de roleta.
- Um escoamento turbulento.
- A vazão do rio Iguaçu em 2021.

A melhor abordagem, que todos adotamos modernamente, para a teoria de probabilidade é devida a A. N. Kolmogorov, sendo chamada de “abordagem axiomática”. Ela é consideravelmente mais elegante do que a alternativa anterior, histórica, de definir probabilidade como um limite da frequência empírica com que um resultado (um “evento”) é observado. Uma abordagem elementar mas muito clara pode ser encontrada em [Papoulis \(1991, capítulo 2\)](#); em ordem crescente de rigor (mas inevitavelmente, também de dificuldade), outras abordagens podem ser encontradas em [James \(1981\)](#), [Rosenthal \(2008\)](#) e [Billingsley \(1986\)](#).

A essência da abordagem axiomática de Kolmogorov é postular a existência de uma *tripla de probabilidade* (Ω, \mathcal{F}, P) ([Rosenthal, 2008](#), capítulo 2):

- Ω é um conjunto, denominado *espaço amostral*.
- \mathcal{F} é um campo, um conjunto formado por sub-conjuntos de Ω . Mas não *todos* os subconjuntos! (Mais sobre isso em um instante). Em linguagem matemática muito técnica, \mathcal{F} é uma álgebra σ , ou um campo σ .
- P é a medida de probabilidade, que dá, para cada $A \in \mathcal{F}$, a probabilidade do ocorrência do conjunto — ou melhor, do *evento* — A . Mais especificamente, P é uma função do tipo

$$P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$
$$A \in \mathcal{F} \mapsto P(A) \in [0, 1].$$

O segredo (e o enorme problema) da coisa é que \mathcal{F} não é, em geral, igual ao conjunto de todos os sub-conjuntos de Ω . Ele é formado apenas pelos conjuntos $A \subseteq \Omega$ para os quais é possível definir $P(A)$ (para mais detalhes, veja a excelente exposição de [Rosenthal \(2008, capítulo 1\)](#)).

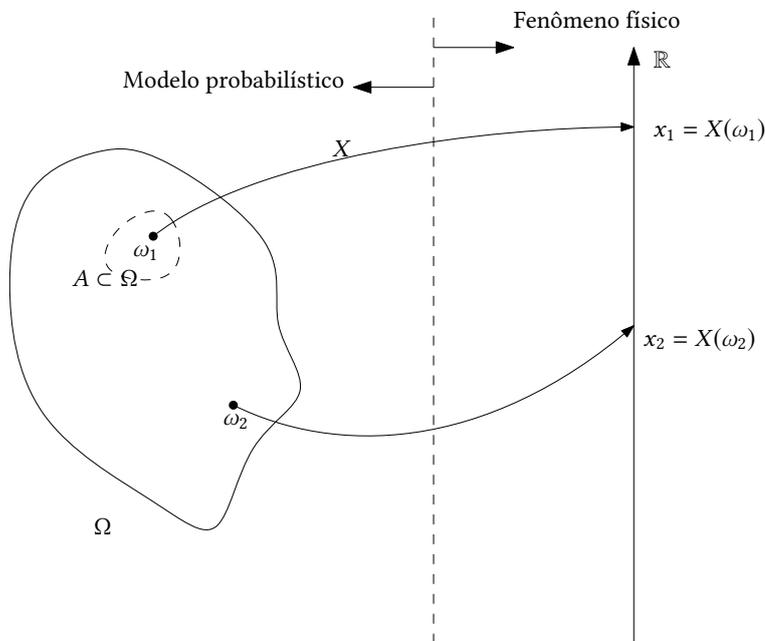
Dentro dessa abordagem, uma *variável aleatória* VA é agora, a função mensurável $X(\omega)$:

$$\begin{aligned} X &: \omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \in \Omega &\mapsto x = X(\omega). \end{aligned}$$

Por definição, uma função $X(\omega)$ é mensurável se

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \quad x \in \mathbb{R}$$

([Rosenthal, 2008, capítulo 3](#)).



A pergunta mais importante do ponto de vista prático é: qual é a probabilidade de ocorrência de um certo intervalo de *valores* de $X(\omega)$? A resposta é dada com a definição da *função de distribuição acumulada* (FDA) de x , $F(x)$:

$$F(x) \equiv P(\{\omega \mid X(\omega) \leq x\}). \quad (10.1)$$

Em particular, fica então evidente que é necessário que $X(\omega)$ seja mensurável para que $F(x)$ possa ser definida em termos da medida de probabilidade P .

Talvez o descriptor mais comum de uma VA seja a sua média probabilística, ou valor esperado. Ela é dada por uma integral de $X(\omega)$ sobre Ω , a saber

$$\mu \equiv \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega). \quad (10.2)$$

A definição das integrais do tipo (10.2) é tecnicamente muito elaborada, e passa por um assunto denominado *teoria da medida*; talvez um tratado

definitivo sobre o tema, em conexão com a teoria de probabilidade, seja [Billingsley \(1986\)](#). Em Engenharia, nós estamos normalmente acostumados com o cálculo de integrais sobre intervalos de números reais, e não em conjuntos mais genéricos e abstratos tais como Ω (cuja natureza sequer foi definida acima!). Felizmente, vem em nosso auxílio o seguinte teorema, que nós citamos sem prova ([Rosenthal, 2008](#), Teorema 6.1.1):

Teorema de mudança de variáveis: Dada uma tripla de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , seja X uma variável aleatória com medida de probabilidade P e distribuição F . Então, para qualquer função mensurável $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_{\Omega} g(X(\omega))dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(t) dF(t). \quad (10.3)$$

Observações:

1. O teorema (10.3) é também a definição do valor esperado de uma função $g(X)$:

$$E\{g(X)\} \equiv \int_{\Omega} g(X(\omega))dP(\omega). \quad (10.4)$$

2. Em particular, quando $g(t) = t$ (a identidade), nós obtemos a expressão para o valor esperado, ou média probabilística, de U :

$$\mu = E\{X\} = \int_{\mathbb{R}} x dF(x). \quad (10.5)$$

e

$$E\{g(X)\} = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x). \quad (10.6)$$

3. Analogamente, a variância de X e os momentos centrais são

$$M_{c2} = \sigma^2 = \text{Var}\{X\} \equiv E\{(X - \mu)^2\} = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 dF(x),$$

$$M_{c3} \equiv E\{(X - \mu)^3\} = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^3 dF(x),$$

$$M_{c4} \equiv E\{(X - \mu)^4\} = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^4 dF(x),$$

4. Finalmente, se $F(x)$ for diferenciável, e se existir a *função densidade de probabilidade* (fdp)

$$f(x) \equiv \frac{dF}{dx}, \quad (10.7)$$

segue-se que

$$\mu = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx. \quad (10.8)$$

Esta última definição de μ talvez seja a mais comum em cursos introdutórios de probabilidade.

Algumas regras mais ou menos óbvias em Teoria de Probabilidades são:

1. Se

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

são eventos *disjuntos* que cobrem totalmente o espaço amostral,

$$A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n = \Omega,$$

então

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = P(\Omega) = 1.$$

2. Se \bar{A} é o *complemento* de A ,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

A probabilidade condicional do evento B em relação ao evento A é

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Dois eventos A e B são *independentes* se $P(B | A) = P(B)$; então,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

10.1 Um pouco de estatística descritiva

Ordene x de tal forma que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ e calcule

$$\hat{F}_i = \frac{i}{n} = P\{X \leq x_i\}.$$

Vamos digitar a Tabela 11.1.1 de [Chow et al. \(1988\)](#)

Listing 10.1: `apcoll.py` – Estatística descritiva para dados de chuva em College Station.

```
1 #!/usr/bin/python3
2 # -*- coding: iso-8859-1 -*-
3 # -----
4 # apcoll.py: precipitação anual em College Station, Texas, 1911--1979
5 #
6 # Nelson Luís Dias
7 # 2020-09-07T15:45:33
8 # -----
9 def _pinterp(xc, x, y):
10 # -----
11 # must have at least 2 points for interpolation
12 # -----
13     nx = len(x)
14     ny = len(y)
15     assert nx == ny
16     if nx < 2:
17         exit("ssr_f4_interp: n must be >= 2\n")
18 # -----
19 # error conditions: xc must be within (x[0],x[n-1])
20 # -----
21     if (xc < x[0]) or (xc > x[nx-1]):
22         exit("xc = %lf out of range: %f\n" % (xc, x[0], x[nx-1]))
23 # -----
24 # simple binary search algol
25 # -----
26     iu = nx - 1
```

```

27     il = 0
28     while (iu - il > 1):
29         im = (iu + il)//2
30         if ( xc <= x[im] ):
31             iu = im
32         else:
33             il = im
34 # -----
35 # linear interpolation and return
36 # -----
37     dx = (x[iu] - x[il])
38     dy = (y[iu] - y[il])
39     m = dy/dx
40     return (y[il] + m * (xc - x[il]))
41
42
43 def interp(xc, x, y):
44     if x[0] > x[-1]:
45         return(_pinterp(-xc,-x,y))
46     else:
47         return(_pinterp(xc,x,y))
48     pass
49 pass
50 # -----
51 # início do programa principal
52 # -----
53 pa = [39.9, 31.0, 42.3, 42.1, 41.1, 28.7, 16.8, 34.1, 56.4,
54       48.7, 44.1, 42.8, 48.4, 34.2, 32.4, 46.4, 38.9, 37.3, 50.6,
55       44.8, 34.0, 45.6, 37.3, 43.7, 41.8, 41.1, 31.2, 35.2, 35.1,
56       49.3, 44.2, 41.7, 30.8, 53.6, 34.5, 50.3, 43.8, 21.6, 47.1,
57       31.2, 27.0, 37.0, 46.8, 26.9, 25.4, 23.0, 56.5, 43.4, 41.3,
58       46.0, 44.3, 37.8, 29.6, 35.1, 49.7, 36.6, 32.5, 61.7, 47.4,
59       33.9, 31.7, 31.5, 59.6, 50.5, 38.6, 43.4, 28.7, 32.0, 51.8];
60 n = len(pa);           # tamanho da lista
61 print(len(pa));       # imprime
62 print(1979-1911+1);   # verifica
63 pa.sort();            # ordena as precipitações
64 print(pa);           # imprime
65 # -----
66 # Função distribuição empírica
67 # -----
68 Fp = [(i+1)/n for i in range(n)];
69 print([float("%7.4f" % Fi) for Fi in Fp]);
70 print('P[X<=35.0]in_', interp(35.0,pa,Fp));
71 print('P[X>45.0]in_', 1.0 - interp(45.0,pa,Fp));
72 print('P[35.0<=X<=45.0]in_',
73       interp(45.0,pa,Fp) - interp(35.0,pa,Fp));
74
75
76 def stat4(x):
77     '''
78     -----
79     (xm,xc2,xc3,xc4) = stat4(x) 4 primeiros momentos, *sem* correção
80
81     Nelson Luís Dias
82     2020-09-07T18:20:59
83     -----
84     '''
85     fnan = float('nan');
86 # -----
87 # be careful with empty arrays
88 # -----
89     n = len(x);
90     if n == 0:
91         return (fnan,fnan,fnan,fnan);
92     fn = float(n); # just in case
93 # -----
94 # first the mean
95 # -----
96     xm = 0.0;
97     for xi in x:
98         xm += xi;
99     xm /= fn;

```

```

100 # -----
101 # now the moments
102 # -----
103     xc2 = 0.0;
104     xc3 = 0.0;
105     xc4 = 0.0;
106     for xi in x:
107         dx = (xi - xm);
108         dx2 = dx**2;
109         dx3 = dx2*dx;
110         dx4 = dx2*dx2;
111         xc2 += dx2;
112         xc3 += dx3;
113         xc4 += dx4;
114     pass
115     xc2 /= fn;
116     xc3 /= fn;
117     xc4 /= fn;
118     return (xm,xc2,xc3,xc4);
119 from math import sqrt;
120 fn = float(n);
121 (pm,pm2,pm3,pm4) = stat4(pa);
122 pm2 *= (fn/(fn-1));
123 pm3 *= fn**2/((fn-1)*(fn-2));
124 pm4 *= ((fn+1)*fn**2)/((fn-1)*(fn-2)*(fn-3));
125 print('pm_=%7.4f' % pm);
126 sp = sqrt(pm2);
127 print('sp_=%7.4f' % sp);
128 cs = pm3/sp**3;
129 print('cs_=%7.4f' % cs);
130 ku = pm4/sp**4;
131 print('ku_=%7.4f' %ku);

```

Coisas bem conhecidas de Teoria de Probabilidades são:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx},$$

$$P\{a \leq X(x) \leq b\} = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

$f(x)$ é a *densidade de probabilidade*; $F(x)$ é a função distribuição acumulada de probabilidade.

A f mais famosa do mundo é a normal:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Para fazermos o exemplo (bem simples!) 11.2.1, utilizamos

Listing 10.2: `ndist.py` — Exemplo com uma distribuição normal em Python.

```

1 #!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
2 # -*- coding: iso-8859-1 -*-
3 # -----
4 # ndist.py: em busca da distribuição normal
5 #
6 # Nelson Luis Dias
7 # 2020-09-07T17:46:20
8 # -----
9 from statistics import NormalDist;          # Preciso de Python 3.8!!!
10 x = NormalDist(0.0,1.0);
11 p = x.cdf(1.0) - x.cdf(-2.0);
12 print('P[-2_<_Z_<_1]_=_', p);

```

10.2 Descritores estatísticos

| | | |
|--------------------------|--|--|
| Média | $\mu = E\{X\} = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$ | $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ |
| Mediana | $F(\tilde{x}) = 1/2$ | $\widehat{F}(\tilde{x}) = 1/2$ |
| Média geométrica | $g = \exp [E\{\ln x\}]$ | $\hat{g} = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}$ |
| Variância | $\sigma^2 = E\{(X - \mu)^2\}$ | $s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ |
| Desvio-padrão | $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ | $s_x = \sqrt{s_x^2}$ |
| Coefficiente de variação | $CV = \frac{\sigma}{\mu}$ | $\widehat{CV} = \frac{s_x}{\bar{x}}$ |
| Assimetria | $\gamma = \frac{E\{(x - \mu)^3\}}{\sigma^3}$ | $C_3 = \frac{n}{(n-1)(n-2)s_x^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3$ |
| Curtose | $\kappa = \frac{E\{(x - \mu)^4\}}{\sigma^4}$ | $C_4 = \frac{(n+1)n}{(n-1)(n-2)(n-3)s_x^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4$ |

A “segunda parte” do programa `apcoll.py` calcula as estatísticas para os 69 anos de dados de chuva que nós já encontramos antes. Quando rodamos o programa, concluímos que os dados de chuva anual são muito próximos de uma distribuição normal!

10.3 O ajuste de distribuições de probabilidade

Uma distribuição de probabilidade $f(x)$ é um modelo analítico do tipo

$$f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n).$$

Sempre é possível relacionar os parâmetros com os momentos teóricos, na forma (por exemplo, para 3 parâmetros!)

$$\theta_1 = \theta_1(\mu, \sigma, \gamma)$$

$$\theta_2 = \theta_2(\mu, \sigma, \gamma)$$

$$\theta_3 = \theta_3(\mu, \sigma, \gamma)$$

Cada parâmetro *pode*, mas *não precisa ser* igual a um dos momentos.

O método dos momentos

Exemplo: suponha que você queira ajustar a distribuição exponencial de 2 parâmetros,

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \exp \left[-\frac{x - x_0}{\lambda} \right], \quad x \geq x_0.$$

A média e a variância são

$$\mu = \int_{x_0}^{\infty} f(x) dx = x_0 + \lambda;$$

$$\sigma^2 = \int_{x_0}^{\infty} (x - [x_0 + \lambda])^2 f(x) dx = \lambda^2.$$

Agora, se os dois primeiros momentos são \bar{x} e s_x , resolvemos

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x_0 + \lambda, \\ s_x &= \lambda; \Rightarrow \\ \lambda &= s_x, \\ x_0 &= \bar{x} - s_x.\end{aligned}$$

O método da máxima verossimilhança

é um pouco diferente! Defina

$$\begin{aligned}L &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \\ \ln L &= \sum_{i=1}^n \ln(f(x_i; \theta))\end{aligned}$$

e agora queremos $\max \ln L$:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n_p.$$

No caso da exponencial de 2 parâmetros, como é que nós ficamos?

$$\begin{aligned}\ln f(x_i) &= \ln \left\{ \frac{1}{\lambda} \exp \left[-\frac{x_i - x_0}{\lambda} \right] \right\} \\ &= \ln(1/\lambda) - \frac{x_i - x_0}{\lambda} \\ &= -\ln(\lambda) - \frac{x_i - x_0}{\lambda} \\ &= - \left[\ln(\lambda) + \frac{x_i - x_0}{\lambda} \right].\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}\ln L &= - \sum_{i=1}^n \left[\ln(\lambda) + \frac{x_i - x_0}{\lambda} \right], \\ \frac{\partial \ln L}{\partial x_0} &= + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda} = \frac{n}{\lambda}, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{(x_i - x_0)}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} \right].\end{aligned}$$

Igualando as duas últimas equações acima a zero, nós encontramos um par de equações *incoerente!*

$$\begin{aligned}\frac{n}{\lambda} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n \frac{x_i - x_0}{\lambda^2} &= \frac{n}{\lambda}.\end{aligned}$$

Não é possível resolver o sistema: a distribuição exponencial de 2 parâmetros não possui estimadores de máxima verossimilhança.

Veja o caso entretanto da distribuição Gumbel (EV I),

$$F(x) = \exp \left[- \exp \left(- \frac{x - u}{\alpha} \right) \right],$$

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} \exp \left[- \frac{x - u}{\alpha} - \exp \left(- \frac{x - u}{\alpha} \right) \right].$$

Acima,

$$\mu = u + \alpha \gamma_E,$$

onde $\gamma_E = 0.5772 \dots$ é a constante de Euler (e não o coeficiente de assimetria!). Vamos agora obter a função de verossimilhança:

$$\begin{aligned} L &= \prod_{i=1}^n f(x_i; u, \alpha) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\alpha} \exp \left[- \frac{x_i - u}{\alpha} - \exp \left(- \frac{x_i - u}{\alpha} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\alpha^n} \prod_{i=1}^n \exp \left[- \frac{x_i - u}{\alpha} - \exp \left(- \frac{x_i - u}{\alpha} \right) \right] \\ \ln L &= \ln \left(\frac{1}{\alpha^n} \right) + \sum_{i=1}^n \left[- \frac{x_i - u}{\alpha} - \exp \left(- \frac{x_i - u}{\alpha} \right) \right] \\ &= -n \ln(\alpha) + \sum_{i=1}^n \left[- \frac{x_i - u}{\alpha} - \exp \left(- \frac{x_i - u}{\alpha} \right) \right] \\ &= -n \ln(\alpha) - \sum_{i=1}^n \frac{x_i - u}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \exp \left(- \frac{x_i - u}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

As derivadas de $\ln L$ em relação a u e a α são

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial u} &= \frac{n}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \exp \left(- \frac{x_i - u}{\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \left\{ n - \sum_{i=1}^n \exp \left(- \frac{x_i - u}{\alpha} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha} \left\{ n - \sum_{i=1}^n \exp \left(- \frac{x_i}{\alpha} \right) \exp \left(\frac{u}{\alpha} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha} \left\{ n - \exp \left(\frac{u}{\alpha} \right) \sum_{i=1}^n \exp \left(- \frac{x_i}{\alpha} \right) \right\} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} &= -\frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i - u}{\alpha^2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - u}{\alpha^2} \right) \exp \left(- \frac{x_i - u}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

Igualando as duas derivadas a zero, encontramos agora, para a primeira,

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{u}{\alpha}\right) \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i}{\alpha}\right) &= n, \\ \exp\left(\frac{u}{\alpha}\right) &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i}{\alpha}\right)}, \\ \frac{u}{\alpha} &= \ln n - \ln \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i}{\alpha}\right), \\ u &= \alpha \left[\ln n - \ln \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i}{\alpha}\right) \right].\end{aligned}$$

Para a segunda,

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i - u}{\alpha^2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - u}{\alpha^2}\right) \exp\left(-\frac{x_i - u}{\alpha}\right), \\ 0 &= -\frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\alpha^2} - \sum_{i=1}^n \frac{u}{\alpha^2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha^2}\right) \exp\left(-\frac{x_i - u}{\alpha}\right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{u}{\alpha^2}\right) \exp\left(-\frac{x_i - u}{\alpha}\right), \\ 0 &= -\frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\alpha^2} - \sum_{i=1}^n \frac{u}{\alpha^2} - \exp\left(\frac{u}{\alpha}\right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha^2}\right) \exp\left(-\frac{x_i}{\alpha}\right) + \underbrace{\left(\frac{u}{\alpha^2}\right) \exp\left(\frac{u}{\alpha}\right) \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i}{\alpha}\right)}_{=n}, \\ 0 &= -\frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\alpha^2} - \frac{nu}{\alpha^2} - \exp\left(\frac{u}{\alpha}\right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha^2}\right) \exp\left(-\frac{x_i}{\alpha}\right) + \left(\frac{nu}{\alpha^2}\right), \\ 0 &= -\frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\alpha^2} - \exp\left(\frac{u}{\alpha}\right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha^2}\right) \exp\left(-\frac{x_i}{\alpha}\right) \\ 0 &= -n + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{\alpha} \exp\left(\frac{u}{\alpha}\right) \sum_{i=1}^n x_i \exp\left(-\frac{x_i}{\alpha}\right).\end{aligned}$$

A última equação pode ser rearranjada, levando em conta que

$$\sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x};$$

encontra-se então

$$0 = -n + \frac{n\bar{x}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \frac{\sum_{i=1}^n x_i \exp\left(-\frac{x_i}{\alpha}\right)}{\exp\left(-\frac{u}{\alpha}\right)}.$$

Porém,

$$\begin{aligned}\exp\left(-\frac{u}{\alpha}\right) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i}{\alpha}\right); \Rightarrow \\ \frac{n\bar{x}}{\alpha} &= n + \frac{n}{\alpha} \frac{\sum_{i=1}^n x_i \exp\left(-\frac{x_i}{\alpha}\right)}{\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i}{\alpha}\right)}, \\ \bar{x} &= \alpha + \frac{\sum_{i=1}^n x_i \exp\left(-\frac{x_i}{\alpha}\right)}{\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i}{\alpha}\right)}.\end{aligned}$$

Esta última equação pode ser resolvida numericamente para α ; então, com α estimado, calcula-se

$$u = \alpha \left[\ln n - \ln \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i}{\alpha}\right) \right].$$

10.4 Bondade de ajuste

(*Goodness of fit*)

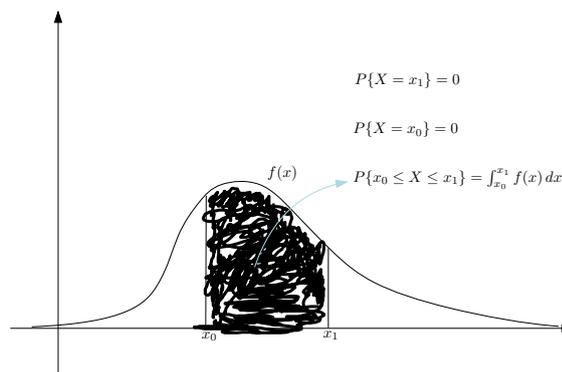
Você pode usar o chi-quadrado, mas ele é um teste paramétrico, que vale se a distribuição subjacente for a distribuição normal. Um teste não paramétrico que é até um pouco mais fácil de aplicar é o teste de Kolmogorov-Smirnov. A estatística do teste é

$$d = \max_i \left| \frac{i}{n} - F(x_i) \right|.$$

É *muito difícil* calcular a função distribuição acumulada de d (Drew et al., 2000), mas existem tabelas, etc., em diversas fontes. Minha tabelinha humilde porém útil pode ser encontrada em Benjamin e Cornell (1970). O mais abrangente que eu encontrei até agora foi o trabalho (muito recente!) de Simard et al. (2011), que liga para rotinas em C que fazem isso.

Também é importante lembrar que a distribuição que melhor ajusta uma FDA empírica *não é*, necessariamente, a melhor distribuição para a modelagem estatística do fenômeno em questão. Um critério melhor, mas bem mais difícil de identificar, é o *erro* do modelo escolhido na estimativa do *quantil* x_T no qual estamos interessados (mais sobre isso depois?) (T é o *tempo de recorrência*).

10.5 Algumas distribuições de probabilidade



Normal

Em muitos casos, a soma de n variáveis aleatórias tende a uma normal quando $n \rightarrow \infty$. Este é o famoso *Teorema Central do Limite*. Por este motivo, a Normal é muitas vezes considerada uma distribuição “natural”,

sempre que o fenômeno modelado resulta de uma soma grande de fatores.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty \leq x \leq +\infty,$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right]$$

$$\mu = \bar{x},$$

$$\sigma = s_x$$

Log-Normal

É simplesmente uma distribuição em que

$$Y = \ln(X^\beta)$$

tem distribuição normal.

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right], \quad -\infty \leq x \leq +\infty,$$

$$\mu_y = \overline{\ln x^\beta},$$

$$\sigma_y = s_{\ln x^\beta}.$$

Cuidado com os erros na Tabela 11.5.1 de [Chow et al. \(1988\)](#)! Note que em geral reporta-se o caso mais simples $\beta = 1$, mas é possível tornar a log-normal mais “flexível” admitindo $\beta \neq 1$.

Exponencial

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\frac{x-x_0}{\lambda}\right],$$

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \exp\left[-\frac{x-x_0}{\lambda}\right], \quad x \geq x_0,$$

$$x_0 = \bar{x} - s_x,$$

$$\lambda = s_x,$$

$$x_T = x_0 + \lambda \ln T$$

Gama

$$f(x) = \frac{x^{\beta-1}}{\lambda^\beta \Gamma(\beta)} \exp\left[-\frac{x}{\lambda}\right], \quad x \geq 0,$$

$$\lambda = \frac{s_x^2}{x},$$

$$\beta = \left(\frac{\bar{x}}{s_x}\right)^2 = \frac{1}{CV^2}$$

Mas nós já vimos exatamente esta mesma fórmula quando estudamos a saída de n reservatórios em série! Vamos lembrar:

Ficou fácil descobrir a lei de formação:

$$u_\delta(t) = u_n(t) = \frac{t^{n-1}e^{-\frac{t}{T}}}{(n-1)!T^n} = \frac{t^{n-1}e^{-\frac{t}{T}}}{\Gamma(n)T^n}.$$

De fato, usando Teoria de Probabilidades, não é difícil provar que, quando $\beta = n \in \mathbb{N}$, a soma de n VAs identicamente distribuídas, $x_0 = 0$, com distribuição exponencial produz uma VA Gama:

$$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n,$$

$Y_i \sim \text{EXP}(\lambda)$, produz $X \sim \text{GAMA}(n, \lambda)$.

GAMA 3 parâmetros

Da mesma forma que com a exponencial, é relativamente fácil estender a GAMA com um parâmetro a mais. A GAMA 3 parâmetros também é chamada de distribuição de Pearson, tipo III.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)\lambda} \left(\frac{x-x_0}{\lambda}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\frac{x-x_0}{\lambda}\right], \quad x \geq x_0,$$

$$\bar{x} = x_0 + \lambda(\beta - 1),$$

$$s_x = \lambda\sqrt{\beta},$$

$$C_3 = \frac{2}{\sqrt{\beta}}.$$

Log-Pearson III

$$f(x) = \frac{1}{\lambda x \Gamma(\beta)} \left(\frac{\ln x - \epsilon}{\lambda}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\frac{\ln x - \epsilon}{\lambda}\right], \quad \ln x \geq \epsilon,$$

$$\overline{\ln x} = \epsilon + \lambda(\beta - 1),$$

$$s_{\ln x} = \lambda\sqrt{\beta},$$

$$C_{3,\ln x} = \frac{2}{\sqrt{\beta}}.$$

Gumbel (EV I)

Veja o caso entretanto da distribuição Gumbel (EV I),

$$F(x) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-u}{\alpha}\right)\right],$$

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} \exp\left[-\frac{x-u}{\alpha} - \exp\left(-\frac{x-u}{\alpha}\right)\right],$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{6}s_x}{\pi},$$

$$u = \bar{x} - \gamma_E \alpha.$$

$$x_T = u - \alpha \ln\left[\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right]$$

Exemplo: inverter uma exponencial:

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{1}{T} &= 1 - \exp\left[-\frac{x_T - x_0}{\lambda}\right] \\
 \frac{1}{T} &= \exp\left[-\frac{x_T - x_0}{\lambda}\right] \\
 \ln\left(\frac{1}{T}\right) &= \left[-\frac{x_T - x_0}{\lambda}\right] \\
 -\ln T &= \left[-\frac{x_T - x_0}{\lambda}\right] \\
 \ln T &= \frac{x_T - x_0}{\lambda} \\
 x_T &= x_0 + \lambda \ln T.
 \end{aligned}$$

10.6 Simulação

Toda linguagem de programação que se preze gera números aleatórios uniformemente distribuídos entre 0 e 1. Se U é uma VA uniformemente distribuída entre 0 e 1,

$$\begin{aligned}
 F(u) &= u, \\
 f(u) &= 1, \quad 0 \leq u \leq 1.
 \end{aligned}$$

Por exemplo, em Python,

Listing 10.3: ranpy.py – Geração de um número aleatório entre 0 e 1.

```

1 #!/usr/bin/python3
2 # -*- coding: iso-8859-1 -*-
3 # -----
4 # exemplo de geração de número aleatório
5 #
6 # Nelson Luís Dias
7 # 2020-09-10T13:00:46
8 # -----
9 from random import random;
10 u = random();
11 print('u□=□',u);

```

Muitas vezes, entretanto, queremos sortear um valor X de uma distribuição específica (por exemplo, de uma gama com 3 parâmetros). Como fazer isso?

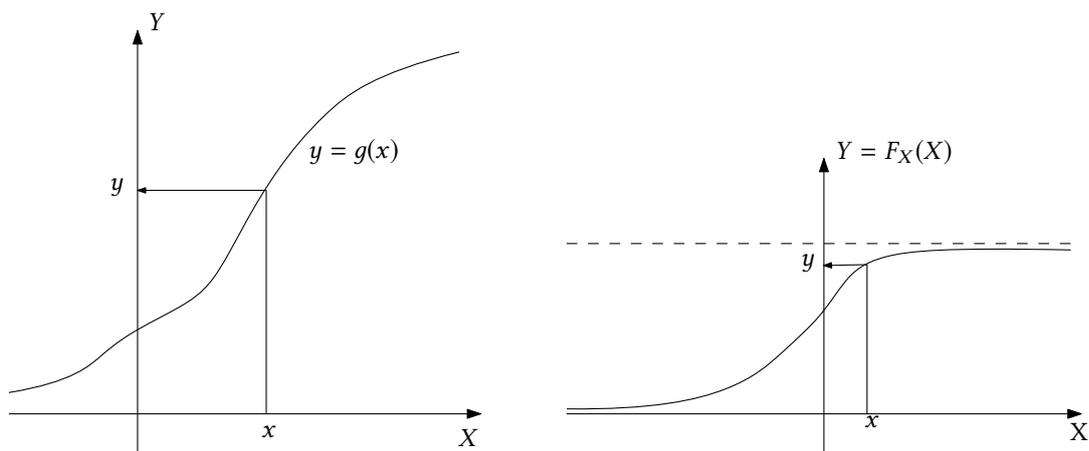
Primeiramente, considere o caso de uma relação *monótona* entre 2 variáveis aleatórias:

$$Y = g(X).$$

As variáveis são aleatórias; porém, uma vez sorteado um $x = X(\omega)$, o $Y(\omega)$ correspondente fica determinado pela relação acima, ou seja: $y = Y(\omega) = g(X(\omega)) = g(x)$. A FDA de Y é facilmente determinada a partir da FDA de X e de $g(x)$:

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X \leq x\} = F_X(x) = F_X(g^{-1}(y)).$$

Isso está representado na figura a seguir:



FDAs de 2 variáveis relacionadas via uma função $g(x)$ monótona.

Considere agora o caso particular em que

$$g(x) = F_X(x),$$

ou seja: em que $g(x)$ é a própria $F_X(x)$; neste caso,

$$F_Y(y) = F_X(F_X^{-1}(y)) \equiv y,$$

e

$$f_Y(y) = 1.$$

Isso significa que se construirmos a variável aleatória

$$Y = F_X(X)$$

via a própria FDA de X , Y sempre terá uma distribuição uniforme (entre 0 e 1) de probabilidade; conseqüentemente, a forma mais simples (embora não necessariamente a forma mais eficiente numericamente) de gerar uma VA X com distribuição prescrita $F_X(x)$ é sortear uma VA u uniforme entre 0 e 1 e então fazer

$$x = F_X^{-1}(u).$$

Capítulo 11

Análise de frequência

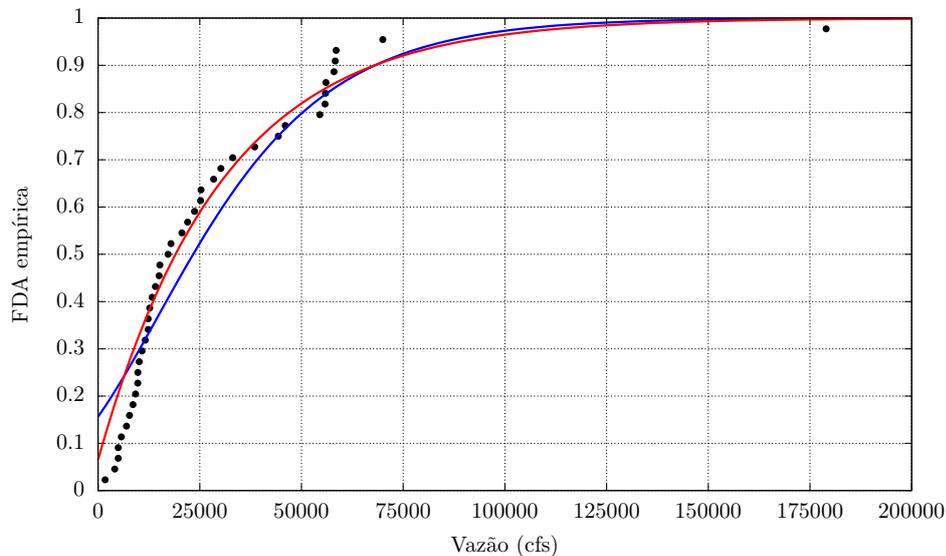
O tempo de retorno de um valor x_T duma VA X é definido via

$$P\{X > x_T\} = \frac{1}{T}$$

Para o registro do rio Guadalupe, quem é

$$P\{X > 50000\}?$$

Para responder, primeiramente olhamos para FDA empírica dos máximos anuais de vazão:



FDA de máximos anuais, rio Guadalupe. Em azul: Gumbel; em vermelho: Exponencial.

A vazão com tempo de retorno T em um modelo probabilístico com FDA F é calculada via

$$1 - F(x_T) = \frac{1}{T}$$

O fator de frequência K_T de Chow é uma coisa meio estranha e meio inútil, em que a vazão/precipitação com tempo de recorrência T é expressa na forma

$$x_T = \bar{x} + K_T s_x.$$

É mais ou menos óbvio que K_T sempre pode ser obtido, implícita ou explicitamente, a partir de uma determinada distribuição de probabilidade. Por exemplo, para a Exponencial,

$$\begin{aligned}x_T &= x_0 + \lambda \ln(T) \\ &= \bar{x} - s_x + s_x \ln(T) \\ &= \bar{x} + (\ln(T) - 1) s_x; \\ K_T &= (\ln(T) - 1).\end{aligned}$$

Vamos analisar os dados com `anfreq.py`:

Listing 11.1: `anfreq.py` – Análise de frequência de máximos anuais de vazão.

```

1  #!/usr/bin/python3
2  # -*- coding: iso-8859-1 -*-
3  # -----
4  # análise de frequência
5  #
6  # Nelson Luís Dias
7  # 2020-09-10T14:31:46
8  # -----
9  from numpy import array;
10 qmx = array([
11     38500.0,
12     179000.0,
13     17200.0,
14     4940.0,
15     55900.0,
16     58000.0,
17     56000.0,
18     7710.0,
19     12300.0,
20     22000.0,
21     17900.0,
22     46000.0,
23     6970.0,
24     20600.0,
25     13300.0,
26     12300.0,
27     28400.0,
28     11600.0,
29     8560.0,
30     4950.0,
31     1730.0,
32     25300.0,
33     58300.0,
34     10100.0,
35     23700.0,
36     55800.0,
37     10800.0,
38     4100.0,
39     5720.0,
40     15000.0,
41     9790.0,
42     70000.0,
43     44300.0,
44     15200.0,
45     9190.0,
46     9740.0,
47     58500.0,
48     33100.0,
49     25200.0,
50     30200.0,
51     14100.0,
52     54500.0,
53     12700.0 ]);
54 print(qmx);

```

```

55 # -----
56 # ordeno as vazões
57 # -----
58 qmx.sort();
59 # -----
60 # Função distribuição empírica
61 # -----
62 from issr import interp;
63 n = len(qmx);
64 Fp = [(i+1)/(n+1) for i in range(n)];
65 #print([float(" %.4f" % Fi) for Fi in Fp]);
66 print('P[X<=50000]cfs = ', 1.0 - interp(50000.0,qmx,Fp));
67 # -----
68 # É sempre bom olhar a distribuição empírica, e ver o que estamos
69 # fazendo
70 # -----
71 gua = open('guadalupe.emp','wt');
72 for i in range(n):
73     gua.write('%.2f %10.4f\n' % (qmx[i],Fp[i]));
74 pass;
75 gua.close();
76 # -----
77 # fazemos agora um pouco de estatística descritiva
78 # -----
79 from issr import stat4;
80 from math import sqrt;
81 fn = float(n);
82 (qm,qm2,qm3,qm4) = stat4(qmx);
83 qm2 *= (fn/(fn-1));
84 qm3 *= fn**2/((fn-1)*(fn-2));
85 qm4 *= ((fn+1)*fn**2)/((fn-1)*(fn-2)*(fn-3));
86 print('qm = %.4f' % qm);
87 sq = sqrt(qm2);
88 print('sq = %.4f' % sq);
89 cs = qm3/sq**3;
90 print('sk = %.4f' % cs);
91 ku = qm4/sq**4;
92 print('ku = %.4f' % ku);
93 # -----
94 # ajuste de distribuições de extremos: a) Gumbel
95 # -----
96 from math import pi;
97 alfa = sqrt(6.0)*sq/pi;
98 uu = qm - 0.5772*alfa;
99 print('Parâmetros da Gumbel:');
100 print('alfa = ', alfa);
101 print('uu = ', uu);
102 # -----
103 # ajuste de distribuições de extremos: b) Exponencial
104 # -----
105 lamb = sq;
106 x0 = qm - sq;
107 print('Parâmetros da Exponencial:');
108 print('lambda = ', lamb);
109 print('x0 = ', x0);
110 # -----
111 # tempos de recorrência da Gumbel e da Exponencial
112 # -----
113 from math import exp;
114 def Gu(y):
115     return exp(-exp(-y));
116 def Ex(y):
117     return 1.0 - exp(-y);
118 xx = 179000.0;
119 print('O comprimento do registro hidrológico é ', n);
120 pg = 1 - Gu((xx-uu)/alfa);
121 pe = 1 - Ex((xx-x0)/lamb);
122 print(pg,pe);
123 print('O tempo de recorrência da Gumbel é ',1/pg);
124 print('O tempo de recorrência da Exponencial é ',1/pe);
125 # -----
126 # vazão decamilenar: a) Gumbel
127 # -----

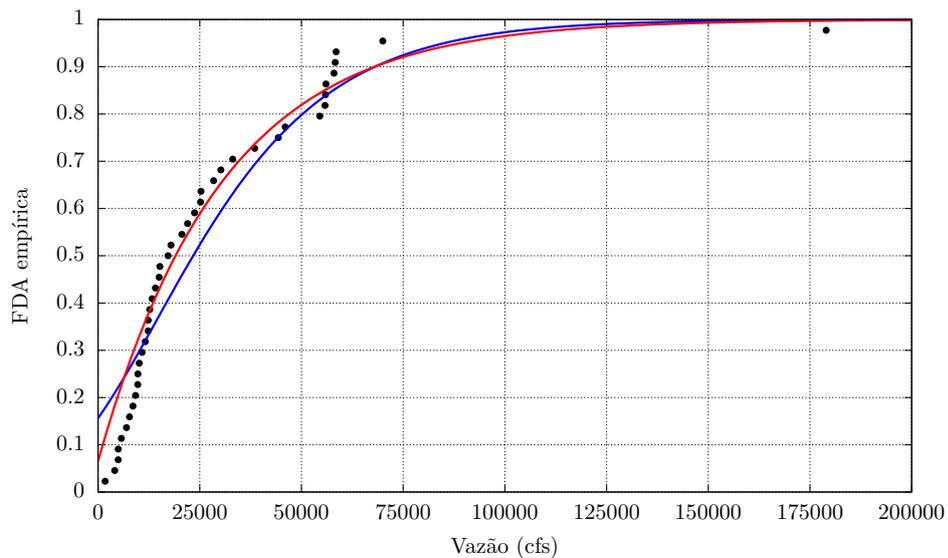
```

```

128 from math import log
129 T = 10000.0
130 yTgu = -log(log(T/(T-1)));
131 xTgu = uu + alfa*yTgu;
132 print('Q(10000) _--_ Gumbel _ _ _ _ _ %10.0f' % xTgu);
133 # -----
134 # vazão decamilenar: b) Exponencial
135 # -----
136 xTex = x0 + lamb*log(T);
137 print('Q(10000) _--_ Exponencial _ _ _ %10.0f' % xTex);

```

A distribuição empírica acumulada agora pode ser vista a seguir:



Capítulo 12

Critérios para projeto hidrológico

A probabilidade de que o máximo evento registrado em N anos passado seja igualado ou superado nos próximos n anos é

$$P(N, n) = \frac{n}{N + n}.$$

Para uma seca durando m anos, a probabilidade $P(N, m, n)$ de que uma seca *pior* acontecerá nos próximos n anos é

$$\begin{aligned} P(N, m, n) &= \frac{(n - m + 1)}{(N - m + 1) + (n - m + 1)} \\ &= \frac{n - m + 1}{N + n - 2m + 2} \end{aligned}$$

O exemplo 13.2.1 é excelente! Se a pior seca em 40 anos durou 5 anos, qual é a probabilidade de que uma seca ainda pior ocorrerá nos próximos 20 anos?

$$P(40, 5, 20) = \frac{20 - 5 + 1}{40 + 20 - 10 + 2} = 0.308.$$

Moral da história: projetar *apenas* para o pior do histórico não protege muito para o futuro (mesmo que as probabilidades estimadas a partir do histórico estejam corretas).

Agora, seja um projeto x_T com período de retorno (novamente, calculado com precisão) T . A probabilidade de pelo menos uma falha em n anos é

$$\begin{aligned} R &= 1 - [P\{X \leq x_T\}]^n \\ &= 1 - \left[1 - \frac{1}{T}\right]^n \\ &= 1 - \left[\frac{T - 1}{T}\right]^n. \end{aligned}$$

Estamos supondo independência dos eventos anuais, é claro.

Considere um sistema de drenagem com tempo de retorno $T = 25$ anos. Qual é a probabilidade de que o sistema falhe pelo menos uma vez em 25 anos?

$$R = 1 - \left[\frac{24}{25}\right]^{25} = 0.63!$$

Se o valor de projeto é L , podemos projetar para uma capacidade *maior* C , para aumentar a segurança. O *fator de segurança* é

$$FS = \frac{C}{L}.$$

A *margem de segurança* é

$$MS = C - L.$$

Talvez seja melhor incluir a discussão de *Análise composta* de risco logo aqui. Considere tanto a capacidade C quanto a carga L sejam variáveis aleatórias. Para um valor fixo de capacidade c , se L tem fdp $f(L)$, o risco associado de fracasso do projeto é

$$P\{L > c\} = \int_c^{\infty} f(l) dl.$$

Se por outro lado a carga C também é uma variável aleatória, com fdp $g(c)$, o risco geral de falha é

$$\begin{aligned} P\{L > C\} &= \int_{c=-\infty}^{+\infty} P\{L > c\} g(c) dc \\ &= \int_{c=-\infty}^{+\infty} \left[\int_c^{\infty} f(l) dl \right] g(c) dc, \end{aligned}$$

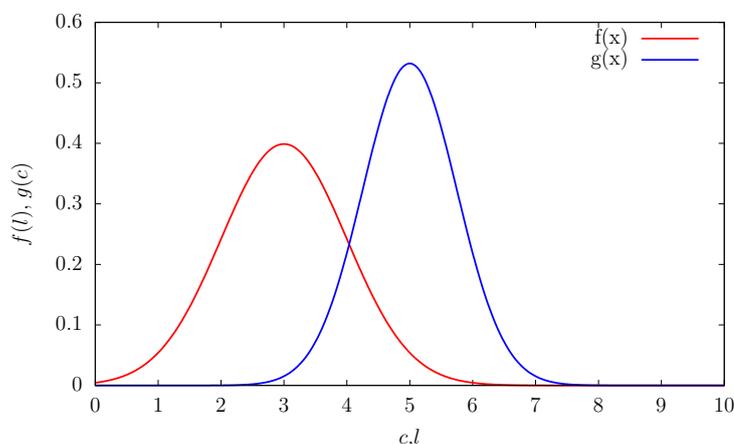
desde que C e L seja VAs independentes.

(TACOMA BRIDGE)

O exemplo 13.4.1, um pouco arbitrário, usa duas distribuições normais,

$$\begin{aligned} f(l) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(l-3)^2}{2} \right], \\ g(c) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(3/4)} \exp \left[-\frac{(c-5)^2}{2 \times (3/4)^2} \right] \end{aligned}$$

Vale a pena plotá-las



Precisamos agora calcular

$$P\{L > c\} = \int_c^{\infty} f(l) dl$$

e em seguida

$$\int_{c=-\infty}^{+\infty} P\{L > c\}g(c) dc.$$

Melhor fazer isso com Maxima

```
(%i1) f : 1/(sqrt(2*%pi)) * exp(-(1-3)**2/2);
                                     2
                                     (1 - 3)
                                     - ----
                                     2
                                     %e
(%o1) -----
          sqrt(2) sqrt(%pi)
(%i2) g : 1/((3/4)*sqrt(2*%pi)) * exp(-(c-5)**2/((3/4)**2*2));
                                     2
                                     8 (c - 5)
                                     - ----
                                     9
                                     3/2
                                     2 %e
(%o2) -----
          3 sqrt(%pi)
(%i3) integrate(f,l,c,inf);
                                     sqrt(2) c - 3 sqrt(2)
          sqrt(%pi) erf(-----)
          sqrt(2) -----
          sqrt(2)          sqrt(2)
(%o3) -----
          sqrt(2) sqrt(%pi)
(%i4) factor(%);
                                     c - 3
          erf(-----) - 1
          sqrt(2)
(%o4) -----
          2
(%i5) h : % ;
                                     c - 3
          erf(-----) - 1
          sqrt(2)
(%o5) -----
          2
(%i6) romberg(h*g,c,-20,20);
(%o6) 0.05479929129236739
(
```

12.1 Análise de custo-benefício

O prejuízo causado pela ocorrência de um evento $x > x_T$ é calculado por

$$P(T) = \int_{x_T}^{\infty} P(x)f(x) dx = \int_{x_T}^{\infty} P(x) dF(x).$$

Os cálculos em (Chow et al., 1988, p. 425) são um exemplo de um cálculo numérico da integral de Stieljes.

Obviamente, a função $P(T)$ é decrescente. Por outro lado, o custo do projeto, $C(T)$, é *crescente* com T . Logo, o custo total esperado, $P(T) + C(T)$, possui um mínimo, e este pode ser um critério para a seleção do tempo de retorno T do projeto.

Observe que esse critério não leva em conta questões relacionadas à Ecologia, nem à perda de vidas humanas, etc.

12.2 Análise de incerteza 1ª ordem

É basicamente usar cálculo para calcular erros quando relações determinísticas são conhecidas *entre* variáveis aleatórias. Seja $Y = f(X)$, e expanda em série de Taylor:

$$dY = f'(X) dX;$$

$$s_Y = \frac{dy}{dx} s_X;$$

$$Y(X) = f(\mu_X) + f'(\mu_X)(X - \mu_X) + \frac{f''(\mu_X)}{2!}(X - \mu_X)^2 + \dots$$

$$Y - f(\mu_X) \approx f'(\mu_X)(X - \mu_X).$$

Atenção! Em geral, *quando f é não-linear*,

$$\begin{aligned} E\{Y\} &= \mu_Y \neq f(\mu_X), \\ E\{f(X)\} &\neq f(E\{X\}). \end{aligned}$$

Esse é um erro muito comum!

Suponha entretanto que você esteja projetando Y . Então você projeta para a média, ou seja: seu valor de projeto é

$$y_p = f(\mu_X).$$

Existe, entretanto, incerteza quanto ao real valor de X . Em outras palavras, ao admitir esta incerteza, y virou Y , e x virou X (entendeu?). O *erro médio quadrático de estimativa* de Y será

$$E\{(Y - y_p)^2\}.$$

Podemos aproximá-lo agora fazendo

$$Y - f(\mu_X) \approx f'(\mu_X)(X - \mu_X);$$

$$E\{(Y - f(\mu_X))^2\} \approx [f'(\mu_X)]^2 E\{(X - \mu_X)^2\} = [f'(\mu_X)]^2 \text{Var}\{X\};$$

$$\text{REM}\{Y\} = f'(\mu_X)\sigma_X.$$

No exemplo do livro-texto, suponha então que você estimou a profundidade do escoamento y a partir de uma vazão medida q (note que eu preciso de minúsculas, porque as maiúsculas são as variáveis aleatórias), usando a fórmula de Manning,

$$\begin{aligned} Q &= q(Y), \\ Y &= y(Q). \end{aligned}$$

Então devemos ter

$$s_Y = \frac{dy}{dq} s_Q,$$

$$s_Y = \frac{s_Q}{\frac{dq}{dy}}$$

Calculamos a derivada em separado:

$$q(y) = \frac{s_f^{1/2}}{n} \left[ar^{2/3} \right] (y);$$

$$\frac{dq}{dy} = \frac{s_f^{1/2}}{n} \left[a \frac{2}{3} r^{-1/3} \frac{dr}{dy} + r^{2/3} \frac{da}{dy} \right]$$

$$= \frac{s_f^{1/2}}{n} \left[ar^{2/3} \frac{2}{3r} \frac{dr}{dy} + ar^{2/3} \frac{1}{a} \frac{da}{dy} \right]$$

$$= \frac{s_f^{1/2}}{n} ar^{2/3} \left[\frac{2}{3r} \frac{dr}{dy} + \frac{1}{a} \frac{da}{dy} \right]$$

$$= q(y) \left[\frac{2}{3r} \frac{dr}{dy} + \frac{1}{a} \frac{da}{dy} \right]$$

Agora, se eu tenho um certo q_p (uma vazão de projeto) com incerteza s_Q , o nível estimado será $y_p = q^{-1}(q_p)$ tal que $q_p = q(y_p)$ pela fórmula de Manning, e

$$s_Y dq = s_Q dy;$$

$$s_Y = \frac{dy}{dq} s_Q;$$

$$s_Y = \frac{s_Q}{\frac{dq}{dy}};$$

$$q_p = \frac{s_f^{1/2}}{n} a(y_p) [r(y_p)]^{2/3};$$

$$q_p = \frac{s_f^{1/2}}{n} [ar^{2/3}](y_p);$$

$$s_Y = \frac{s_Q}{q_p \left[\frac{2}{3r(y_p)} \frac{dr(y_p)}{dy} + \frac{1}{a(y_p)} \frac{da(y_p)}{dy} \right]}.$$

No caso da fórmula de Manning, vamos ver um exemplo concreto:

$$r \approx y;$$

$$q = \frac{s_f^{1/2}}{n} byy^{2/3};$$

$$q = \frac{s_f^{1/2}}{n} by^{5/3}$$

Para encontrar $y(q)$ preciso resolver

$$g(y) = 0;$$

$$g(y) = \frac{s_f^{1/2}}{n} by^{5/3} - q = 0$$

$$\frac{s_f^{1/2}}{n} by^{5/3} = q$$

$$by^{5/3} = \frac{nq}{s_f^{1/2}}$$

$$y^{5/3} = \frac{nq}{bs_f^{1/2}}$$

$$y = \left[\frac{nq}{bs_f^{1/2}} \right]^{3/5} .$$

Capítulo 13

Chuva de projeto

13.1 Curvas intensidade-duração

Modernamente, gráficos e mapas como os apresentados em [Chow et al. \(1988\)](#) estão ficando um pouco ultrapassados. Para cada tipo de projeto hidrológico, costuma haver uma duração *crítica*, que produz a vazão crítica para o projeto. Portanto, uma questão importante é definir a intensidade i para uma determinada duração t_d .

Isso só é possível, naturalmente, se houver medições de altura acumulada de chuva sobre intervalos menores ou iguais que t_d . Se Δt é o intervalo de medição, e $\Delta t < t_d$, então basta gerar séries i_k , $k = \Delta t, 2\Delta t, \dots$

A partir de tal série, é possível gerar uma chuva de projeto, calculando a intensidade com tempo de retorno T , i_T , com os métodos de análise de frequência que nós já estudamos.

A partir daí, é possível ajustar *curvas intensidade-duração* para tempos de retorno selecionados (ou outro critério de projeto qualquer), que muitas vezes tomam a forma

$$i = \frac{a}{bt_d^n + c}$$

Essas curvas são empíricas, e normalmente ajustadas a partir de registros existentes nas imediações, etc., e seu objetivo original era facilitar o cálculo de chuvas de projeto. Com os recursos computacionais de que dispomos hoje em dia, e com o nosso amplo acesso a dados, talvez seja preferível ir direto à “fonte” dos dados!

The alternating block method!

Quando uma sequência temporal de intensidades é necessária, o problema é um pouco mais complicado. Suponha que você tenha feito o projeto para a intensidade com $T = 100$ anos para as durações 1, 2, 3, ..., 25 horas. Esses são os valores $i^1, i^1, i^2, \dots, i^{25}$. Note que esses valores *ainda* não estão organizados no tempo. Uma maneira simples (é só uma ideia!) de “montar” uma chuva de projeto é colocar o pico da chuva bem no meio do tempo, e depois ir distribuindo as chuvas de projeto subsequentes à direita e a à esquerda do centro: Seja portanto a sequência temporal i_t^p para a chuva de projeto, onde t é um índice inteiro. De acordo com essa

ideia,

$$\begin{aligned}
 i_{13}^p &= i^1; \\
 \frac{i_{13}^p + i_{14}^p}{2} &= i^2; \\
 \frac{i_{12}^p + i_{13}^p + i_{14}^p}{3} &= i^3; \\
 \frac{i_{12}^p + i_{13}^p + i_{14}^p + i_{15}^p}{4} &= i^4; \\
 &\vdots \\
 \frac{\sum_{t=1}^{25} i_t^p}{25} &= i^{25}.
 \end{aligned}$$

13.2 A precipitação máxima provável

A ideia da PMP é uma boa ideia; ela possibilita estimativas menos dependentes do modelo estatístico subjacente (como você já deve estar notando, modelos probabilísticos diferentes de extremos produzem estimativas muito díspares de x_{10000}), e sugere que é possível obter um “máximo físico” de precipitação sobre uma bacia hidrográfica.

Esse é um grande “se”! De todo modo, a ideia está muito viva, e existem manuais muito recentes (e completos!) sobre o tema. Veja [WMO \(2009\)](#).

Existem muitas possibilidades para “fazer” a PMP (*Probable Maximum Precipitation* = Precipitação Máxima Provável), e eu só vou discutir uma, baseada no modelo de tempestade que estudamos no começo do curso. Lá, nós vimos que as umidades de saída de uma célula convectiva são muito baixas: essencialmente, toda a umidade que converge para a célula convectiva se transforma em chuva. Podemos então simplificar nosso cálculo para a intensidade de chuva \dot{P} para

$$\begin{aligned}
 \frac{\dot{P}\pi D^2}{4} &\approx \left[\int_0^{\Delta z_1} \rho q v_r dz \right] \pi D \\
 \frac{\dot{P}D}{4} &\approx \int_0^{\Delta z_1} \rho q v_r dz \\
 &\equiv \bar{v}_r \int_0^{\Delta z_1} \rho q dz.
 \end{aligned}$$

A ideia agora é olhar para uma chuva histórica grande (digamos, a maior de todas), que tenha produzido grande cheia ou algo do tipo. Vamos chamar a intensidade da chuva em um momento qualquer de \dot{P}_s . Essa chuva ocorreu com condições de umidade específica na superfície q_{s0} . Em geral nós olhamos para uma umidade (muitas vezes usa-se o ponto de orvalho) *persistente* por 12, 24 horas ou a duração que for do nosso interesse (a duração crítica da chuva). No entanto, em geral olhando para o mesmo histórico nós encontramos umidades *maiores* com a mesma duração. Procuremos a máxima no histórico, que vamos chamar q_{m0} . Se essa mesma umidade estivesse presente na chuva histórica, ela teria sido majorada

pelo fator

$$\begin{aligned}
 f_m &= \frac{\dot{P}_m}{\dot{P}_s} = \frac{\overline{v_{rm}} \int_0^{\Delta z_1} \rho q_m dz}{\overline{v_{rs}} \int_0^{\Delta z_1} \rho q_s dz} \\
 &\approx \frac{\int_0^{\Delta z_1} \rho q_m dz}{\int_0^{\Delta z_1} \rho q_s dz} \\
 &\approx \frac{\int_0^{\infty} \rho q_m dz}{\int_0^{\infty} \rho q_s dz} \\
 &\equiv \frac{m_{P_m}}{m_{P_s}}.
 \end{aligned}$$

Note que aproximou-se, no fim, a integral correspondente ao fluxo de massa de vapor d'água entrando na célula pela base da nuvem pela integral que é, por definição, a água precipitável. Portanto, em geral encontra-se nas descrições da PMP cálculos de água precipitável nas condições de umidade prevalentes durante a tempestade histórica (m_{P_s}) e durante a PMP (m_{P_m}). f_m pode agora ser utilizado para maximizar a chuva histórica.

Uma vantagem evidente do método é que os detalhes temporais e espaciais da chuva histórica são todos conhecidos, e a PMP pode agora ser obtida com muita simplicidade por meio de uma multiplicação simples.

Capítulo 14

Vazão de projeto

Ou: projeto hidrológico envolvendo vazões!

Embora fosse possível, vou fazer muito poucos exemplos numéricos, quantitativos, etc.. Vou me concentrar apenas em discutir a filosofia de projeto em cada caso.

14.1 Sistemas de drenagem

Os problemas do projetista em geral são:

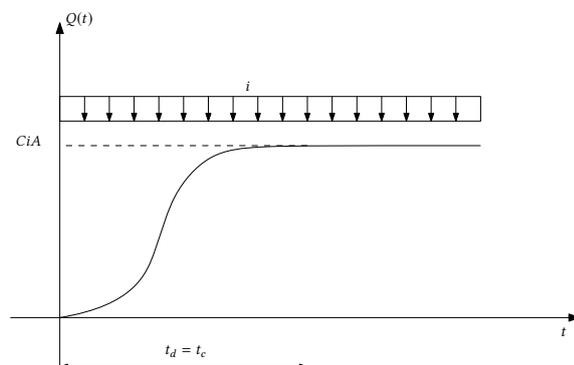
1. Transformar chuva em vazão em um ou mais pontos.
2. Dimensionar hidráulicamente o sistema de canais de drenagem.

Para resolver 1), o método mais simples é o “método racional”:

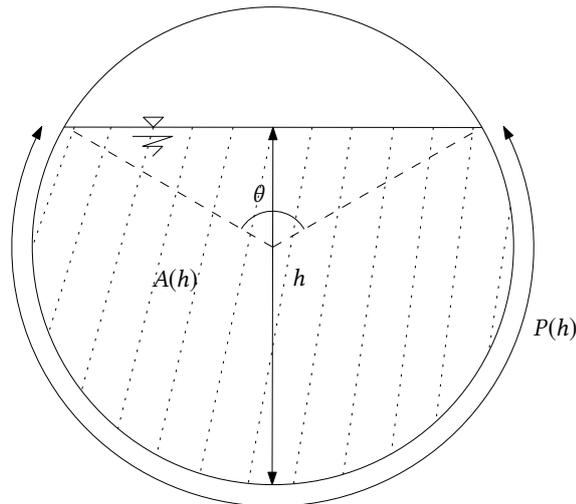
$$Q = CiA, \quad (14.1)$$

onde C é o coeficiente de escoamento (que é um problema gigantesco, pois envolve considerações sobre: grau de impermeabilização, condições antecedentes de umidade, infiltração e chuva efetiva, etc..), i é a intensidade de chuva para a duração crítica, e A é a área de drenagem.

Quando unidades consistentes são utilizadas, $0 \leq C \leq 1$. Além disso, a duração crítica é o tempo de concentração, ou seja: o tempo que leva para toda a bacia estar contribuindo. A partir daí, se i permanece constante, Q se torna constante:



No Brasil, em geral os “canais” das redes de drenagem subterrâneas são geralmente dutos circulares, e é possível projetá-los para funcionarem com superfície livre, usando a fórmula de Manning, etc.. Para tal, é preciso analisar a geometria da sessão e escrever a área molhada $A(h)$, o perímetro molhado $P(h)$ e o raio hidráulico $R(h)$ em função da profundidade do escoamento:



Note que

$$\begin{aligned}\theta &= \theta(h), \\ A &= A(\theta(h)), \\ P &= P(\theta(h)), \\ R &= \frac{A}{P} = R(\theta(h)).\end{aligned}$$

Uma solução mais sofisticada é produzir uma hietógrafa de projeto, e transformá-la em uma hidrógrafa de projeto, a qual, por sua vez, precisa “passar” pelos canais da rede de drenagem. Os canais então precisam ser projetados para as vazões máximas dessas ondas de cheia.

A hidrógrafa de projeto pode ser gerada por métodos simples (por exemplo, a hidrógrafa unitária) ou por *modelos chuva-vazão* capazes de simular cheias urbanas.

Em princípio dá bastante trabalho, de qualquer maneira, estudar/especificar as características geométricas da rede, as características fisiográficas (topografia, cobertura de solo), incluir tudo no “modelo” e finalmente gerar as vazões de projeto. *Have fun.*

14.2 Planície de inundação e reservatórios de controle de cheia

1. A planície não é inundada todos os anos \Rightarrow uso e ocupação da PI é uma questão economicamente e socialmente sensível.
2. Grandes reservatórios a montante *aumentam* o tempo de retorno das inundações da planície, *estimulam* sua ocupação e cheias maiores acabam produzindo efeitos mais graves.
3. O mapeamento da PI em geral é feito com modelos hidrodinâmicos razoavelmente completos.

Reservatório de controle de cheia podem servir para reter o volume da cheia durante algum tempo e/ou amortecer o seu pico (veja o meu trabalho-exemplo no início do curso!)

O reservatório pode ser de uso múltiplo, quando então a sua operação tende a se tornar mais complexa, já que muitas vezes os objetivos são conflitantes.

14.3 Previsão de vazões!

!

14.4 Dimensionamento de reservatório de estiagem

Determine, calcule, etc., a vazão a ser atendida: D . Agora faça o balanço hídrico do reservatório:

$$\begin{aligned} S_0 &= 0, \\ S_{n+1} &= S_n + Q_n + (P_n - E_n)A - D, \quad 1 \leq n \leq N, \end{aligned}$$

onde N é o comprimento da série de vazões Q_1, Q_2, \dots, Q_N . O “reservatório” acima tem um volume infinito. Não podemos atender D maior do que a vazão média! (Menos as perdas). Portanto, se $D < Q_{\text{med}}$, S_n cresce a longo prazo.

Por simplicidade, vamos a partir de agora desconsiderar o termo envolvendo chuva e evaporação do reservatório. Então,

$$\begin{aligned} S_0 &= 0, \\ S_1 &= S_0 + Q_1 - D, \\ S_2 &= S_1 + Q_2 - D, \\ &\vdots \\ S_n &= S_{n-1} + Q_n - D, \end{aligned}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n Q_k - nD.$$

No entanto, *podem existir períodos* durante os quais S_n decresce. Esses são períodos de déficit hídrico em relação à demanda D : durante um tal período, um reservatório real vai se esvaziar continuamente. Desejamos portanto determinar o tamanho R de um reservatório que seja capaz de, sob um conjunto de afluições Q_n , atender continuamente à demanda D .

Para isso, fixamos um instante m e procuramos os pares m, n para os quais

$$\sum_{k=m+1}^n Q_k - (n - m)D < 0.$$

Mas

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^n Q_k - (n - m)D &= \left[\left(\sum_{k=1}^n Q_k - nD \right) - \left(\sum_{k=1}^m Q_k - mD \right) \right] \\ &= S_n - S_m. \end{aligned}$$

O tamanho R do reservatório necessário para regularizar D , portanto, é o negativo desse número: Portanto,

$$R = \max_{m, n > m} S_m - S_n.$$

Vamos ilustrar o procedimento com um programa que gera 50 anos de vazão, e calcula R :

Listing 14.1: `sdim.py` – Dimensionamento de um reservatório de estiagem.

```

1  #!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
2  # -*- coding: iso-8859-1 -*-
3  # -----
4  # Dimensionamento de reservatório de estiagem
5  #
6  # Nelson Luís Dias
7  # 2020-09-24T11:33:55
8  # -----
9  from numpy import zeros;
10 # -----
11 # dadas as vazões q e a demanda d, calcula sn
12 # -----
13 def stn(q,d):
14     n = len(q);
15     s = zeros(n+1,float);
16     for k in range(1,n+1):
17         s[k] = s[k-1] + q[k-1] - d;
18     pass;
19     return s;
20 # -----
21 # z vem de s; z é estacionário: será?
22 # -----
23 def rs(s):
24     ns = len(s);
25     rr = zeros((ns,ns),float);
26     lmax = -ns;
27     rmax = float('-inf');
28     for m in range(ns):
29         for n in range(m+1,ns):
30             rmn = s[m] - s[n];
31             if rmn > rmax :
32                 rmax = rmn;
33                 lmax = n - m;
34     pass
35     pass
36     if (rmax <= 0.0) :
37         rmax = 0.0 ;
38         lmax = 0;
39     pass;
40     return (rmax,lmax)
41
42
43 from fbm import FBM
44 H = 0.7
45 NN = 50
46 #print(H,NN)
47 # -----
48 # inicializa FBM, o que quer que isso signifique!
49 # -----
50 f = FBM(n=NN, hurst=H, length=NN, method='daviesharte')
51 # -----
52 # Gera uma amostra
53 # -----
54 fgn_sample = f.fgn()
55 qa = 1.0 + 0.3333*fgn_sample;
56 qa[qa < 0.0] = 0.0;
57 from numpy import mean;
58 # print(qa);
59 qm = mean(qa);
60 print('qm□=□',qm);
61 # -----
62 # dimensiona
63 # -----
64 s = stn(qa,0.5*qm);
65 (rmax,lmax) = rs(s);
66 print('NN□=□',NN);

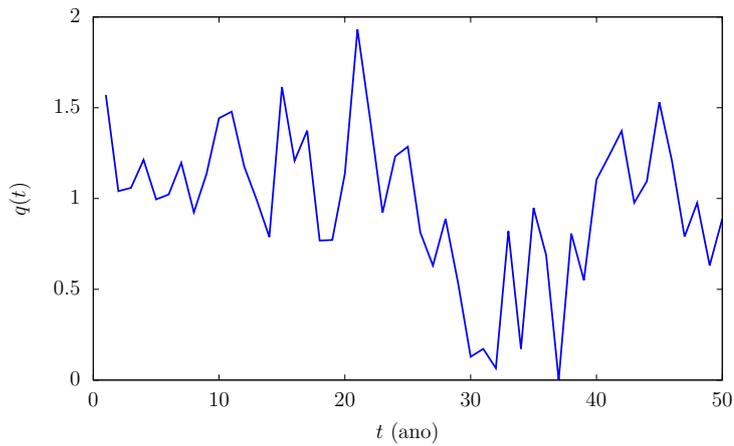
```

```

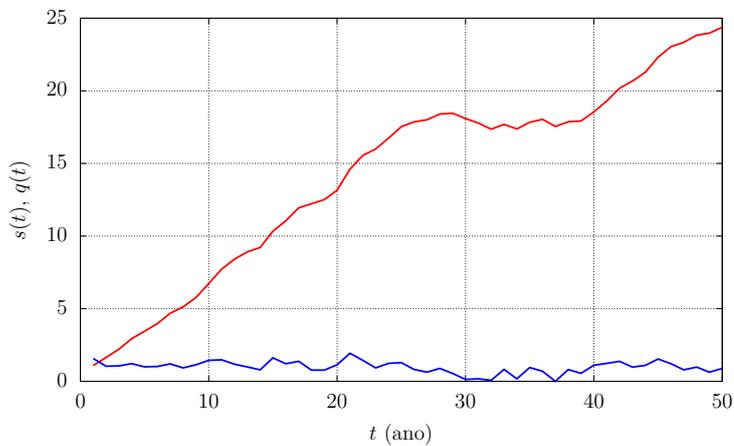
67 print('rmax, lmax=', rmax, lmax);
68 # -----
69 # output file, etc.
70 # -----
71 fou = open('sdim.out', 'wt', encoding='iso-8859-1');
72 fou.write('#_NN=_%04d\n' % NN);
73 fou.write('#_R=_%8.4f\n' % rmax);
74 fou.write('#_L=_%04d\n' % lmax);
75 for k in range(NN):
76     fou.write('%04d%8.4f%8.4f\n' % (k+1, qa[k], s[k+1]));
77 pass;
78 fou.close();

```

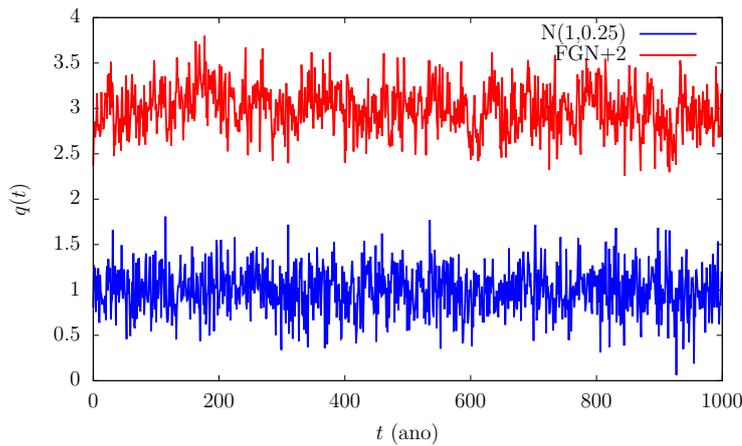
Uma série de vazões geradas pelo programa é a seguinte:



E o gráfico de S_n é:



A próxima figura mostra 1000 anos de “vazão”, com distribuição marginal normal, $\mu = 2$ e $\sigma = 0.3333$.



Embora as duas séries tenham a mesma distribuição marginal, o modelo estocástico subjacente é muito diferente. A série azul foi gerada com sorteios independentes de uma normal; já a série vermelha foi gerada com *Gaussian fractional noise* Mandelbrot e van Ness (1968), com $H = 0.7$.

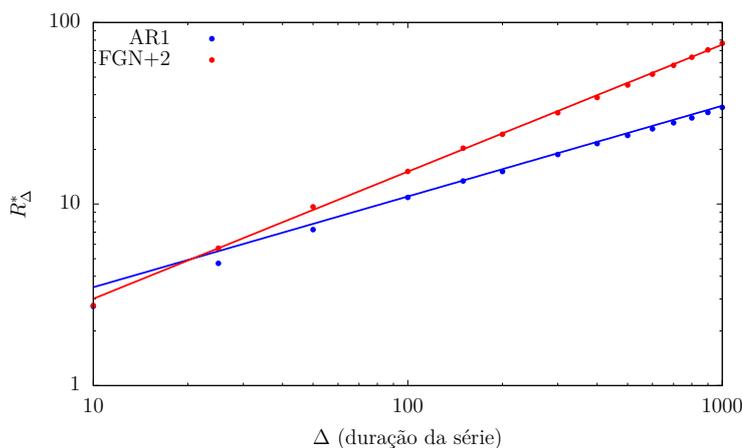
A variável H é conhecida em Hidrologia como o expoente de Hurst. Sob condições bem gerais, o tamanho do reservatório cresce com uma lei de potência:

$$R_{\Delta}^* = \frac{R_{\Delta}}{s_{\Delta}} \sim c\Delta^H,$$

onde Δ é o comprimento da série. Note entretanto que isso só vale quando $D = \bar{q}_{\Delta}$! Quando a vazão regularizada é menor que a vazão média, o expoente “ H ” parece mudar ...

Para um grande número de processos estocásticos mais comuns, baseados em processos difusivos e inspirados pelo movimento Browniano, $H = 0.5$. No entanto, Hurst (1951) observou $H \sim 0.7$ em séries longas de dados geofísicos.

Nós podemos constatar isso, “experimentalmente”, na figura a seguir:



As consequências são sérias! O fenômeno de Hurst significa que nós precisamos de reservatórios *maiores* do que pensamos.

Mandelbrot publicou uma série excepcional de artigos sobre o fenômeno de Hurst, que vale a pena ler; veja Mandelbrot e Wallis (1969d); Alexander (1969); Mandelbrot e Wallis (1969f,a,b,c,e, 1968). E, modestamente, Dias et al. (2018).

Famous last words.

Referências Bibliográficas

- Adkins, C. J. (1983). *Equilibrium thermodynamics*. Cambridge University Press, New York.
- Alduchov, O. A. e Eskridge, R. E. (1996). Improved Magnus form approximation of saturation vapor pressure. *J Appl Meteorol*, 35:601–609.
- Alexander, G. N. (1969). Comments on ‘Noah, Joseph, and Operational Hydrology’ by Benoit B. Mandelbrot and James R. Wallis. *Water Resources Research*, 5(4):915–916.
- Armani, F. A. S., Dias, N. L., e Damázio, J. M. (2020). Eddy-covariance CO₂ fluxes over Itaipu Lake, Southern Brazil. *Rev Bras Rec Hídr.* aceito para publicação.
- Benjamin, J. R. e Cornell, C. A. (1970). *Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers*. McGraw-Hill, New York.
- Billingsley, P. (1986). *Probability and Measure*. John Wiley and Sons, New York, 2nd^a edição.
- Blanken, P. D., Rouse, W. R., Culf, A. D., Spence, C., Boudreau, L. D., Jasper, J. N., Kochtubajda, B., Schertzer, W. M., Marsh, P., e Versegny, D. (2000). Eddy covariance measurements of evaporation from Great Slave Lake, Northwest Territories, Canada. *Water Resour Res*, 36(4):1069–1077.
- Bouchet, R. (1963). Evapotranspiration réelle et potentielle, signification climatique. *Int. Assoc. Sci. Hydrol. Pub.*, 62,:134–142.
- Boussinesq, J. (1903). Sur le débit, en temps de sécheresse, d’une source alimentée par une nappe d’eaux d’infiltration. *C. R. Hebd. Seances Acad. Sci*, 136:1511–1517.
- Bowen, I. S. (1926). The ratio of heat losses by conduction and by evaporation from any water surface. *Phys Rev*, 27:779–787.
- Brooks, R. H. e Corey, A. T. (1964). Hydraulic properties of porous media. *Hydrology papers (Colorado State University); no. 3*.
- Brubaker, K. L. e Entekhabi, D. (1995). An Analytic Approach to Modeling Land-Atmosphere Interaction 1. Construct and Equilibrium Behavior. *Water Resour Res*, 31(3):619–632.
- Brubaker, K. L. e Entekhabi, D. (1996). Asymmetric recovery from wet-vs.-dry soil moisture anomalies. *J Appl Meteorol*, 35:94–109.

- Brunt, D. (1932). Notes on radiation in the atmosphere, 1. *Q J Roy Meteorol Soc*, 58:389–420.
- Brutsaert, W. (1975a). On a derivable formula for long-wave radiation from clear skies. *Water Resour Res*, 11:742–744.
- Brutsaert, W. (1975b). A Theory for Local Evaporation (or Heat Transfer) From Rough and Smooth Surfaces at Ground Level. *Water Resour Res*, 11:543–550.
- Brutsaert, W. (1975c). The roughness length for water vapor, sensible heat and other scalars. *J Atmos Sci*, 32:2028–2031.
- Brutsaert, W. (1982). *Evaporation into the atmosphere*. D. Reidel, Dordrecht. 309 pp.
- Brutsaert, W. (1986). Catchment-scale evaporation and the atmospheric boundary layer. *Water Resour Res*, 22(9):39S–45S.
- Brutsaert, W. (1992). Stability correction functions for the mean wind speed and temperature in the unstable surface layer. *Geophys Res Lett*, 19(5):469–472.
- Brutsaert, W. (1998). Land-surface water vapor and sensible heat flux: Spatial variability, homogeneity, and measurement scales. *Water Resour Res*, 34(10):2433–2442.
- Brutsaert, W. (2005). *Hydrology. An introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Brutsaert, W. (2008). Long-term groundwater storage trends estimated from streamflow records: Climatic perspective. *WATER RESOURCES RESEARCH*, doi:10.1029/2007WR006518, 2008, 44:W02409.
- Brutsaert, W. (2010). Annual drought flow and groundwater storage trends in the eastern half of the United States during the past two-third century Wilfried Brutsaert. *Theor Appl Climatol*, 100:93–103.
- Brutsaert, W. e Lopez, J. P. (1998). Basin-Scale Geohydrologic Drought Flow Features of Riparian Aquifers in the Southern Great Plains. *Water Resour Res*, 34(2):233–240.
- Brutsaert, W. e Nieber, J. L. (1977). Regionalized drought flow hydrographs from a mature glaciated plateau. *Water Resour Res*, 13:637–643.
- Brutsaert, W. e Stricker, H. (1979). An Advection-Aridity Approach to Estimate Actual Regional Evapotranspiration. *Water Resour Res*, 15(2):443–450.
- Buckingham, E. (1914). On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations. *Physical review*, 4(4):345.
- Butenhoff, C. L. e Khalil, M. A. K. (2002). Correction for water vapor in the measurement of atmospheric trace gases. *Chemosphere*, 47(8):823–836.

- Chen, C.-I. (1991). Unified Theory on Power Laws for Flow Resistance. *J. Hydraul. Eng.*, 117(3):371–389.
- Cheng, Y. e Brutsaert, W. (2005). Flux-profile relationships for wind speed and temperature in the stable atmospheric boundary layer. *Boundary-Layer Meteorol*, 114:519–538.
- Chor, T., Dias, N. L., e de Zarate, A. R. (2015). New analytical solutions to the nonlinear Boussinesq equation for groundwater flow. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics*, 3(1):010526–1 – 010526–6.
- Chor, T., Ruiz de Zárate, A., e Dias, N. L. (2019). A generalized series solution for the Boussinesq equation with constant boundary conditions. *Water Resour Res*, 55:3567–3575. <https://doi.org/10.1029/2018WR024154>.
- Chor, T. L. e Dias, N. L. (2015). Technical Note: A simple generalization of the Brutsaert and Nieber analysis. *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 19(6):2755–2761.
- Chow, V. T. (1959). *Open-Channel Hydraulics*. McGraw-Hill, New York.
- Chow, V. T., Maidment, D. R., e Mays, L. W. (1988). *Applied Hydrology*. McGraw-Hill, New York.
- COESA (1976). U.S. Standard Atmosphere, 1976. Relatório técnico, U.S. Government Printing Office.
- Colebrook, C. F. (1939). Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws.(includes plates). *Journal of the Institution of Civil engineers*, 12(8):393–422.
- Consultative Committee for Thermometry (2015). Guide to the Realization of the ITS-90. Relatório técnico, Bureau International des Poids et Mesures.
- da Silva, F. M., Assad, E. D., Gomes, A. C., e Evangelista, B. A. (1997). Estudo da radiação solar na região do Distrito Federal. Em *X Congresso Brasileiro de Agrometeorologia*, páginas 425–427. Sociedade Brasileira de Agrometeorologia.
- Dake, J. M. (1972). Evaporative cooling of a body of water. *Water Resources Research*, 8(4):1087–1091.
- Darrigol, O. (2005). *Worlds of Flow*. Oxford University Press, Oxford, U.K.
- Dias, N. (1988). Uma justificativa analítica para uma equação empírica de evaporação. Em *V Congresso Brasileiro de Meteorologia, Rio de Janeiro*, volume 1, páginas X.6–X.11, Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Meteorologia.

- Dias, N. L. (1986). Estimativas climatológicas de evaporação em lagos. Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ.
- Dias, N. L. (1992). Unificação formal de metodologias para cálculo de evaporação em lagos. *Revista Brasileira de Engenharia*, 10(2):61–84.
- Dias, N. L. (1994). *The structure of temperature and humidity turbulent fluctuations in the stable surface layer*. Tese de Doutorado, Cornell University, Ithaca, NY.
- Dias, N. L. (1996). Perfis médios e teoria de similaridade de Monin-Obukhov na camada-limite atmosférica. Relatório Técnico 003/96, SIMEPAR, Curitiba, PR.
- Dias, N. L. (2020a). O efeito do aumento de CO₂ atmosférico sobre a constante de gás do ar seco. *Revista Brasileira de Meteorologia (submitted)*.
- Dias, N. L. (2020b). *Uma Introdução aos Métodos Matemáticos para Engenharia*. Edição do Autor, Curitiba, 2ª edição. Disponível em <https://nldias.github.io/pdf/matappa-2ed.pdf>.
- Dias, N. L. e Brutsaert, W. (1996). Similarity of scalars under stable conditions. *Boundary-Layer Meteorol*, 80:355–373.
- Dias, N. L., Chor, T. L., e de Zárate, A. R. (2014). A semianalytical solution for the Boussinesq equation with nonhomogeneous constant boundary conditions. *Water Resour. Res.*, 50(8):6549–6556.
- Dias, N. L., Crivellaro, B. L., e Chamecki, M. (2018). The Hurst Phenomenon in Error Estimates Related to Atmospheric Turbulence. *Boundary-Layer Meteorol*, 168(3):387–416.
- Dias, N. L. e Kan, A. (1998). Um modelo hidrológico-meteorológico para a estimativa de evapotranspiração em bacias hidrográficas. Relatório Técnico 004/98, SIMEPAR.
- Dias, N. L. e Kan, A. (1999). A hydrometeorological model for basin-wide seasonal evapotranspiration. *Water Resour Res*, 35(11):3409–3418.
- Dias, N. L. e Kan, A. (2008). Evaporação líquida no reservatório de Foz do Areia, PR: Estimativas dos modelos de relação complementar versus balanço hídrico sazonal e balanço de energia. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 13:31–43.
- Dias, N. L. e Malheiros, A. L. (2003). Resultados de 2 anos de medição de evaporação no lago de Itaipu com o método de covariâncias turbulentas atenuadas: comparação com o balanço de energia, sazonalidade e episódios de evaporação intensa. Em *CD-ROM, XV Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, Curitiba. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Dias, N. L. e Reis, R. J. (1996). Os fundamentos físicos do balanço de entalpia em lagos. Relatório Técnico 004/96, SIMEPAR, Curitiba, Brasil.

- Dilley, A. C. (1968). On the computer calculation of vapor pressure and specific humidity gradients from psychrometric data. *J Appl Meteorol*, 7:717–719.
- Drew, J. H., Glen, A. G., e Leemis, L. M. (2000). Computing the cumulative distribution function of the Kolmogorov–Smirnov statistic. *Computational statistics & data analysis*, 34(1):1–15.
- Duarte, H. F., Dias, N. L., e Maggiotto, S. R. (2006). Assessing daytime downward longwave radiation estimates for clear and cloudy skies in Southern Brazil. *Agric For Meteorol*, 139:171–181.
- Dunne, T. e Black, R. D. (1970a). An Experimental Investigation of Runoff Production in Permeable Soils. *Water Resources Research*, 6(2):478–490.
- Dunne, T. e Black, R. D. (1970b). Partial Area Contributions to Storm Runoff in a Small New England Watershed. *Water Resources Research*, 6(5):1296–1311.
- Filho, J. L., Lunardi, D. M. C., e de Jesus, W. R. (1997). Modelos para estimativa da radiação solar global diária e horária por estação do ano em Botucatu – SP. Em *X Congresso Brasileiro de Agrometeorologia*, páginas 194–195. Sociedade Brasileira de Agrometeorologia.
- Finnigan, J. J. (2009). Response to comment by Dr. A.S. Kowalski on “The storage term in eddy flux calculations”. *Agric For Meteorol*, 149:725 – 729.
- Fleagle, R. G. e Businger, J. A. (1980). *An introduction to atmospheric physics*. Academic Press, Orlando.
- Fox, R. W. e McDonald, A. T. (1981). *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. Guanabara Dois, Rio de Janeiro.
- Freeze, R. A. (1972a). Role of subsurface flow in generating surface runoff: 1. Base flow contributions to channel flow. *Water Resources Research*, 8(3):609–623.
- Freeze, R. A. (1972b). Role of subsurface flow in generating surface runoff: 2. Upstream source areas. *Water Resources Research*, 8(5):1272–1283.
- Garratt, J. (1994). *The Atmospheric Boundary Layer*. Cambridge University Press, U.K. 316 pp.
- Gauckler, P. (1867). Etudes Théoriques et Pratiques sur l’Ecoulement et le Mouvement des Eaux. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, 64:818–822. This is the first occurrence of Manning’s Formula.
- Gioia, G. e Bombardelli, F. A. (2002). Scaling and similarity in rough channel flows. *Physical Review Letters*, 88:DOI:10.1103/PhysRevLett.88.014501.

- Henderson-Sellers, B. (1984). A new formula for latent heat of vaporization of water as a function of temperature. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 110(466):1186–1190.
- Hill, R. J. (1989). Implications of Monin-Obukhov similarity theory for scalar quantities. *J Atmos Sci*, 46:2236–2244.
- Hino, M. e Hasebe, M. (1986). Separation of a storm hydrograph into runoff components by both filter-separation AR method and environmental isotope tracers. *Journal of Hydrology*, 85(3-4):251–264.
- Hostetler, S. W. e Bartlein, P. J. (1990). Simulation of lake evaporation with application to modeling lake level variations of Harney-Malheur Lake, Oregon. *Water Resour Res*, 26(10):2603–2612.
- Hurst, H. E. (1951). Long term storage capacity of reservoirs. *Trans. ASCE*, 116:776–808.
- Högström, U. (1988). Non-dimensional wind and temperature profiles in the atmospheric surface layer: a re-evaluation. *Boundary-Layer Meteorol*, 42:55–78.
- Iribarne, J. V. e Godson, W. L. (1981). *Atmospheric Thermodynamics*. D. Reidel, Dordrecht, 2^a edição.
- James, B. R. (1981). *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
- Jarvis, P. G. (1976). The interpretation of the variations in leaf water potential and stomatal conductances found in canopies in the field. *Phil. Trans. Roy Soc, London, Ser. B*, 273:593–610.
- Kader, B. A. e Yaglom, A. M. (1990). Mean Fields and Fluctuation Moments in Unstably Stratified Turbulent Boundary Layers. *J Fluid Mech*, 212:637–662.
- Keulegan, G. H. (1938). Laws of turbulent flow in open channels. *J Res NBS*, 21:707–741.
- Kohler, M. e Parmele, L. (1967). Generalized estimates of free-water evaporation. *Water Resour Res*, 3:997–1005.
- Lee, X. e Massman, W. J. (2011). A perspective on thirty years of the Webb, Pearman and Leuning density corrections. *Boundary-Layer Meteorol*, 139:37 – 59.
- Linsley, R. K., Kohler, M. A., e Paulhus, J. L. H. (1975). *Hydrology for Engineers*. McGraw-Hill, New York.
- Lohman, S. W. (1972). Definitions of Selected Ground-Water Terms – Revisions and Conceptual Refinements. Geological Survey Water-Supply Paper 1988, U.S. Geological Survey.

- Maggiotto, S. R., Dias, N. L., Grodzki, L., Vissotto, S., Prevedello, C. L., Nascimento, E. L., e Souza, M. F. (2007). Diretrizes para redes automáticas e telemétricas de superfície. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 12(4):225–240.
- Mandelbrot, B. B. e van Ness, J. W. (1968). Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications. *SIAM Review*, 10(4):422–437.
- Mandelbrot, B. B. e Wallis, J. R. (1968). Noah, Joseph, and Operational Hydrology. *Water Resources Research*, 4(5):909–918.
- Mandelbrot, B. B. e Wallis, J. R. (1969a). Computer Experiments With Fractional Gaussian Noises: Part 1, Averages and Variances. *Water Resources Research*, 5(1):228–241.
- Mandelbrot, B. B. e Wallis, J. R. (1969b). Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises: Part 2, Rescaled Ranges and Spectra. *Water Resources Research*, 5(1):242–259.
- Mandelbrot, B. B. e Wallis, J. R. (1969c). Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises: Part 3, Mathematical Appendix. *Water Resources Research*, 5(1):260–267.
- Mandelbrot, B. B. e Wallis, J. R. (1969d). Reply [to “Comments on ‘Noah, Joseph, and Operational Hydrology’ by Benoit B. Mandelbrot and James R. Wallis”]. *Water Resources Research*, 5(4):917–920.
- Mandelbrot, B. B. e Wallis, J. R. (1969e). Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long run statistical dependence. *Water Resources Research*, 5(5):967–988.
- Mandelbrot, B. B. e Wallis, J. R. (1969f). Some long-run properties of geophysical records. *Water Resour. Res.*, 5(2):321–340.
- Manning, R. (1891). On the flow of water in open channels and pipes. *Transactions of the Institution of Civil Engineers of Ireland*, 20,:161–207.
- Michel, C. (1999). Comment on “Basin-scale geohydrologic drought flow features of riparian aquifers in the southern Great Plains” by Wilfried Brutsaert and James P. Lopez. *Water Resour Res*, 35(3):909–910.
- Monteith, J. L. (1973). *Principles of environmental physics*. Edward Arnold, London.
- Moody, L. F. (1944). Friction factors for pipe flow. *Trans. Asme*, 66:671–684.
- Morton, F. I. (1983a). Operational estimates of areal evapotranspiration and their significance to the science and practice of hydrology. *J of Hydrol*, 66:1–76.
- Morton, F. I. (1983b). Operational Estimates of Lake Evaporation. *J of Hydrol*, 66:77–100.

- Morton, F. I. (1986). Practical Estimates of Lake Evaporation. *J Appl Meteorol*, 25:371–387.
- Morton, F. I., Ricard, F., e Fogarasi, S. (1985). Operational estimates of areal evapotranspiration and lake evaporation – program WREVAP. NHRI paper 24, National Hydrology Research Institute, Ottawa, Canada.
- Murray, F. W. (1966). On the computation of saturation vapor pressure. *J Appl Meteorol*, 6:203–204.
- NIST (2020). NIST Chemistry Web Book, SRD69. Disponível em <https://webbook.nist.gov/chemistry/mw-ser/>. Retrieved in 2020-04-10T09:05:36.
- Noilhan, J. e Planton, S. (1989). A simple parameterization of land surface processes for meteorological models. *Monthly Weather Review*, 117:536–549.
- Oke, T. R. (1987). *Boundary Layer Climates*. Methuen, London.
- Orlanski, I. (1975). A rational subdivision of scales for atmospheric processes. *Bull Amer Meteorol Soc*, 56.
- Papoulis, A. (1991). *Probability, random variables and stochastic processes*. McGraw-Hill, New York, 3rd^a edição.
- Parlange, M. B. e Katul, G. G. (1992). An advection-aridity evaporation model. *Water Resour Res*, 28(1):127–132.
- Penman, H. (1948). Natural evaporation from open water, bare soil and grass. *Proceedings of the Royal Society, London*, A(193):120–146.
- Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Priestley, C. H. B. e Taylor, R. J. (1972). On the Assessment of Surface Heat Flux and Evaporation Using Large Scale Parameters. *Monthly Weather Review*, 100(2):80–92.
- Reis, R. J. (1996). Estudo comparativo de modelos climatológicos de estimativa de evaporação no lago Serra Azul, MG. Tese de mestrado, UFMG, Belo Horizonte, MG.
- Reis, R. J. e Dias, N. L. (1998). Multi-season lake evaporation: energy-budget estimates and CRLE model assessment. *J of Hydrol*, 208:135–147.
- Reynolds, O. (1895). On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, 186:123–164.
- Rodríguez-Iturbe, I. e Valdés, J. B. (1979). The geomorphologic structure of hydrologic response. *Water Resources Research*, 15(6):1409–1420.

- Rosenthal, J. S. (2008). *A first look at rigorous probability theory*. World Scientific.
- Rouse, W. R., Oswald, C. M., Binyamin, J., Blanken, P. D., Schertzer, W. M., e Spence, C. (2003). Interannual and seasonal variability of the surface energy balance and temperature of Central Great Slave Lake. *Journal of Hydrometeorology*, 4:720–730.
- Schlyter, P. (2019). How to compute planetary positions. Internet: <http://www.stjarnhimlen.se/comp/ppcomp.html>. Retrieved in 2019-04-22T16:45:34.
- Seinfeld, J. H. e Pandis, S. N. (1998). *Atmospheric chemistry and physics*. John Wiley & Sons, New York.
- Sellers, W. D. (1965). *Physical climatology*. The University of Chicago Press, Chicago.
- Simard, R., L'Ecuyer, P., et al. (2011). Computing the two-sided Kolmogorov-Smirnov distribution. *Journal of Statistical Software*, 39(11):1–18.
- Sklash, M. G. e Farvolden, R. N. (1979). The role of groundwater in storm runoff. *Journal of Hydrology*, 43(1-4):45–65.
- Stull, R. (1988). *An Introduction to Boundary-Layer Meteorology*. Kluwer, Dordrecht.
- Stull, R. B. (1995). *Meteorology today for scientists and engineers*. West Publishing Company, Minneapolis / St. Paul.
- Tallaksen, L. M. (1995). A review of baseflow recession analysis. *J of Hydrology*, 165:349–370.
- Tennekes, H. e Lumley, J. L. (1972). *A first course in turbulence*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Thorntwaite, C. W. (1948). An approach toward a rational classification of climate. *The Geographical Review*, 38:55–94.
- Troch, P. A., Berne, A., Bogaart, P., Harman, C., Hilberts, A. G. J., Lyon, S. W., Paniconi, C., Pauwels, V. R. N., Rupp, D. E., Selker, J. S., e et al. (2013). The importance of hydraulic groundwater theory in catchment hydrology: The legacy of Wilfried Brutsaert and Jean-Yves Parlange. *Water Resources Research*, 49(9):5099–5116.
- Tubelis, A. e do Nascimento, F. J. L. (1984). *Meteorologia descritiva — fundamentos e aplica??es brasileiras*. Livraria Nobel.
- United States Naval Observatory (2019). Earth's Seasons and Apsides: Equinoxes, Solstices, Perihelion, and Aphelion. <https://aa.usno.navy.mil/data/docs/EarthSeasons.php>. Retrieved 2019-04-24T09:58:08.

- van Flandern, T. C. e Pulkkinen, K. F. (1979). Low-precision formulae for planetary positions. *Astrophys J SupplS*, 41:391–411.
- Vianello, R. L. e Alves, A. R. (1991). *Meteorologia b?sica e aplica??es*. Universidade Federal de Vi?osa, Imprensa Universit?ria, Vi?osa, MG.
- Wallace, J. M. e Hobbs, P. V. (2006). *Atmospheric Science: an introductory survey*. Elsevier, Amsterdam, 2^a ^a edi??o.
- Webb, E. K., Pearman, G. I., e Leuning, R. (1980). Correction of flux measurements for density effects due to heat and water vapor transfer. *Q J Roy Meteorol Soc*, 106:85–100.
- Wikipedia (2019). Okta. <https://en.wikipedia.org/wiki/Okta>. Retrived in 2019-05-22T10:40:15.
- Wikipedia (2020a). Atmosphere of Earth. Dispon?vel em https://en.wikipedia.org/wiki/Atmosphere_of_Earth. Retrieved in 2020-04-08T11:25:15.
- Wikipedia (2020b). International Temperature Scale of 1990. Dispon?vel em https://en.wikipedia.org/wiki/International_Temperature_Scale_of_1990. Retrieved in 2020-07-27T10:47:48.
- Wikipedia (2020c). Planimeter. <https://https://en.wikipedia.org/wiki/Planimeter>. Retrived in 2020-08-06T16:56:55.
- Wikipedia (2020d). Solar constant. https://en.wikipedia.org/wiki/Solar_constant. Retrieved in 2020-08-12T14:29:27.
- Wikipedia (2020e). Vienna Standard Mean Ocean Water. Dispon?vel em https://en.wikipedia.org/wiki/Vienna_Standard_Mean_Ocean_Water. Retrieved in 2020-07-27T10:52:34.
- Withers, B. e Vipond, S. (1983). *Irriga??o Projeto e Pr?tica*. Nobel, S?o Paulo.
- WMO (2009). Manual on Estimation of Probable Maximum Precipitation (PMP). Relat?rio T?cnico WMO–No. 1045, WMO.
- Wright, I. R., Gash, J. H. C., da Rocha, H. R., e Roberts, J. M. (1996). Modeling surface conductance for Amazonian pasture and forest. Em Gash, J. H. C., Nobre, C. A., Roberts, J. M., e Victoria, R. L., editores, *Amazonian deforestation and climate*. Wiley, Chichester.
- Wyngaard, J. C., Cot?e, O. R., e Izumi, Y. (1971). Local Free Convection, Similarity, and the Budgets of Shear Stress and Heat Flux. *J Atmos Sci*, 28:1171–1182.
- Xue, M., Droegemeier, K. K., Wong, V., Shapiro, A., e Brewster, K. (1995). Advanced Regional Prediction System ARPS version 4.0 user’s guide. Relat?rio t?cnico, Center for Analysis and Prediction of Storms (CAPS).

Zecharias, Y. B. e Brutsaert, W. (1988). Recession characteristics of groundwater outflow and base flow from mountainous watersheds. *Water Resour Res*, 24:1651–1658.