TEA014 - Mecânica dos Fluidos Ambiental II
Curso de Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 4 Outubro 2024
Prof. Michael Mannich

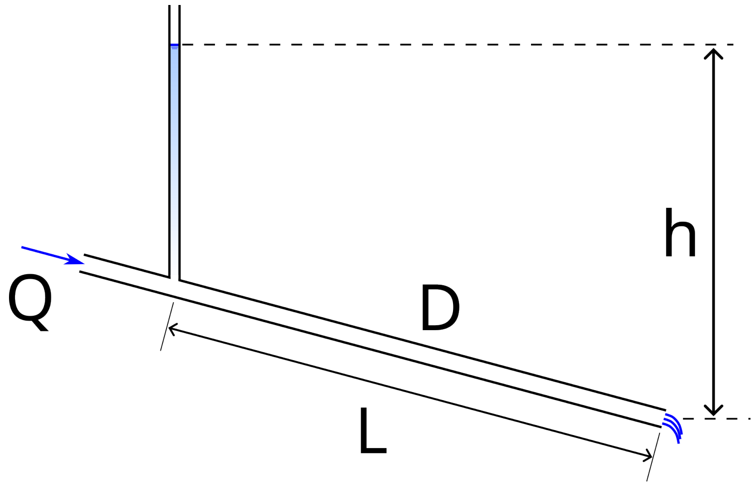
P01

NOME: GABARITO

Assinatura: ______________________

---

1 [20] Água escoa por um tubo liso com diâmetro de 50 mm. O piezômetro no tubo $L = 15$ m a montante da descarga livre para a atmosfera apresenta uma elevação $h = 3.65$ m acima do centro do tubo na saída. Determine a vazão do escoamento.



Você pode utilizar equações auxiliares para determinar a vazão se preferir.

$$\xi = \frac{ghD^3}{L\nu^2},$$

onde h é a perda de carga.

$$Re = -\sqrt{8\xi}\log\left(\frac{\epsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\sqrt{2\xi}}\right)$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Aplicamos a equação da energia entre os pontos 1 e 2, de montante e jusante.

$$\frac{P_1}{\gamma} + \cancelto{1=2}{\alpha_1\frac{V_1^2}{2g}} + z_1 + \cancelto{0}{H_{bomba}} = \frac{P_2}{\gamma} + \cancelto{1=2}{\alpha_2\frac{V_2^2}{2g}} + z_2 + \cancelto{0}{H_{turbina}} + h_{perdas}$$

$$\left(\frac{P_1}{\gamma} + z_1\right) - \left(\frac{P_2}{\gamma} + z_2\right) = h = f\frac{L}{D}\frac{V_2^2}{2g}$$

Para encontrar a vazão Q podemos definir a variável ξ:

$$\xi = \frac{fRe^2}{2}$$

Como $h = f\dfrac{L}{D}\dfrac{V^2}{2g}$, isolamos $f = \dfrac{2ghD}{LV^2}$ e substituímos em ξ obtendo:

$$\xi = \frac{ghD^3}{L\nu^2}$$

Agora nos voltamos à equação de Colebrook para determinar f:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0\log\left(\frac{\epsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re\sqrt{f}}\right)$$

Substituindo $f = \dfrac{2\xi}{Re^2}$ temos:

Continue a solução no verso ⟹

$$\frac{Re}{\sqrt{2\xi}} = -2{,}0\log\left(\frac{\epsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\sqrt{2\xi}}\right)$$

$$Re = -\sqrt{8\xi}\log\left(\frac{\epsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\sqrt{2\xi}}\right)$$

Agora podemos calcular para as informações do problema:

$$\xi = \frac{ghD^3}{L\nu^2} = \frac{9.81 \times 3.65 \times 0.05^3}{15(\frac{1.002\times10^{-3}}{998})^2} = 2.960099 \times 10^8$$

$$Re = -\sqrt{8\xi}\log\left(\frac{\epsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\sqrt{2\xi}}\right) = 1.939944 \times 10^5$$

$$V = \frac{\mu Re}{\rho D} = 3.895439 \text{ m/s}$$

$$Q = 7.648678 \text{ L/s}$$

Eventualmente você poderia não ter reconhecido que o problema teria uma solução analítica e instituiria um procedimento iterativo.

$$h = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

$$V = \left[\frac{2ghD}{fL}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Arbitramos um valor inicial para $f = 0.02$ e procedemos sempre atualizando o valor de f para cada V obtido iterativamente consultando o Diagrama de Moody para um valor de $\frac{\epsilon}{D} = 0$ tubo liso. Convergimos em poucas iterações.

Tabela 1: **Iterações para determinação da vazão**

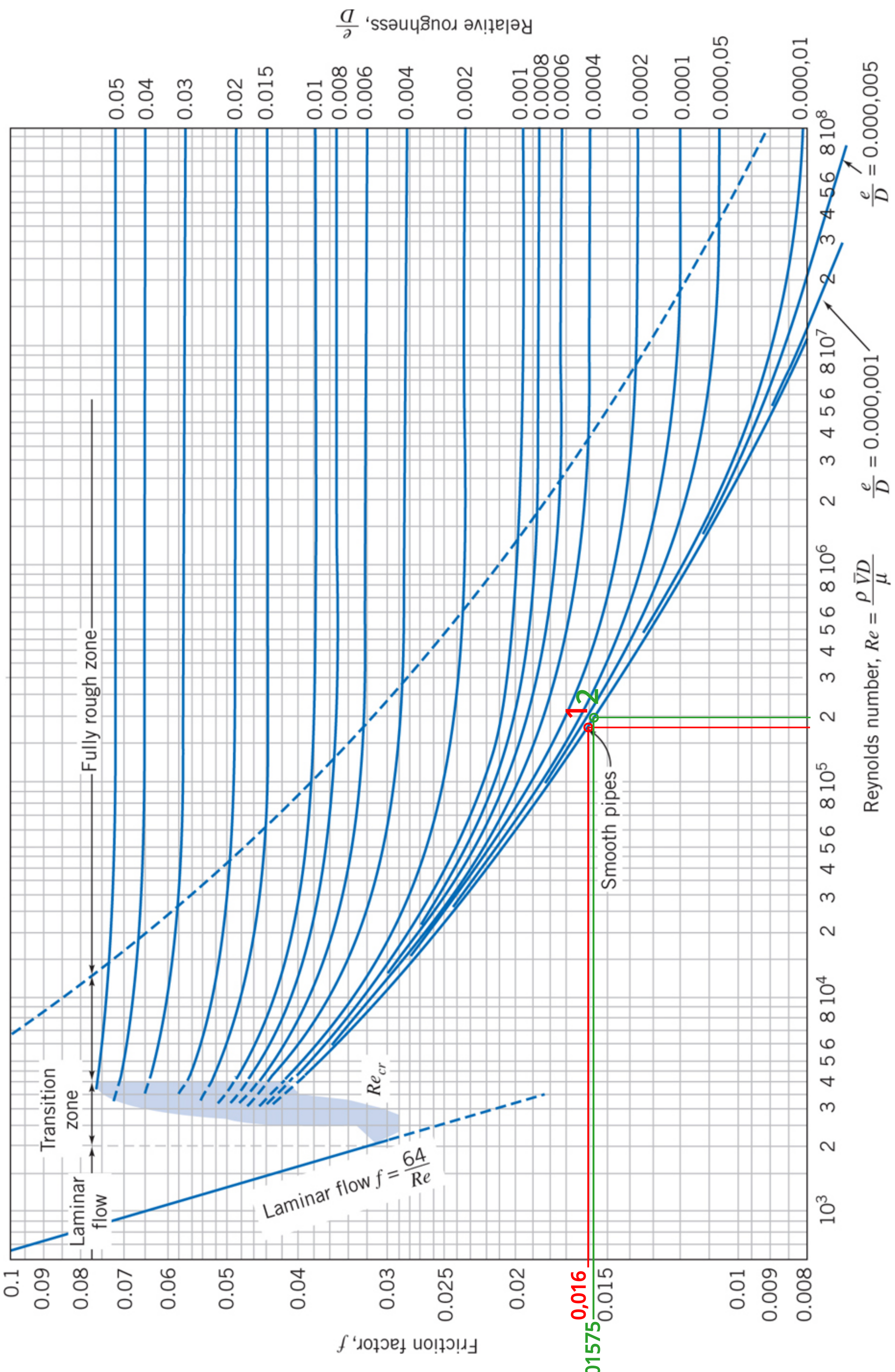
i	f	V	Re	f_{novo}
1	0.0200	3.454779	1.720×10^5	0.0160
2	0.0160	3.862561	1.924×10^5	0.01575
3	0.01575	3.893095	1.939×10^5	0.01575

E chegamos ao mesmo resultado praticamente com um pouco menos de precisão.
Caso você tivesse feito iterações para determinar V e utilizando iterações com a equação de Colebrook em cada nova estimativa de V, partindo de uma aproximação inicial e $f = 0.02$ também, você obteria a tabela:

Tabela 2: **Iterações para determinação da vazão**

i	f	V	Re	f_{novo}
1	0.020000	3.454779	1.720×10^5	0.016109
2	0.016109	3.849526	1.917×10^5	0.015768
3	0.015768	3.890902	1.938×10^5	0.015735
4	0.015735	3.894994	1.940×10^5	0.015731
5	0.015731	3.895396	1.940×10^5	0.015731

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$



Continue a solução no verso ⟹

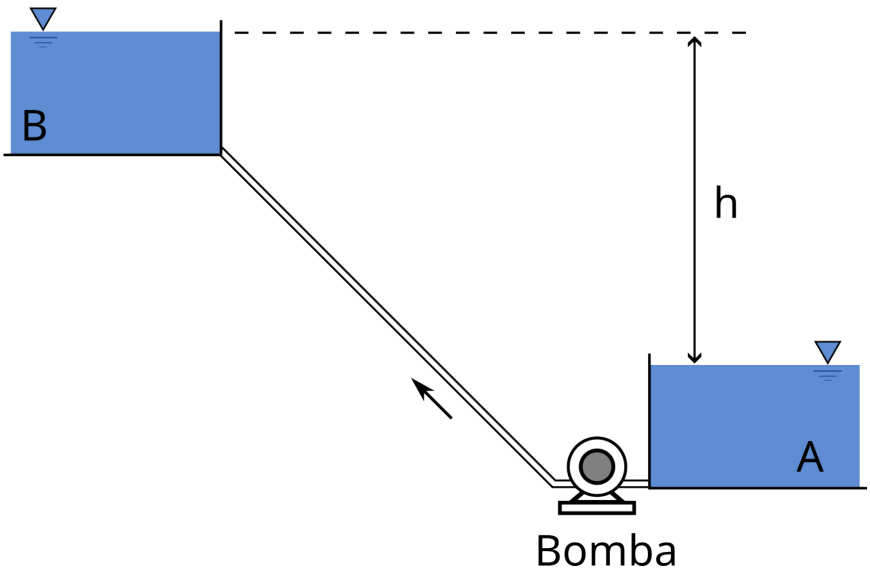
2 [30] Água deve ser transportada do reservatório inferior para o reservatório superior por meio de uma bomba. A bomba fornece energia de modo que a curva da bomba é dada por $H(m) = 7.5 - 1000Q^2$. Considere $D = 300\,\text{mm}$, $L = 600\,\text{m}$ e $h = 4\,\text{m}$.

a) [10] Determine o ponto de operação do sistema (a vazão de operação). Despreze as perdas localizadas e considere $f = 0.01954$.

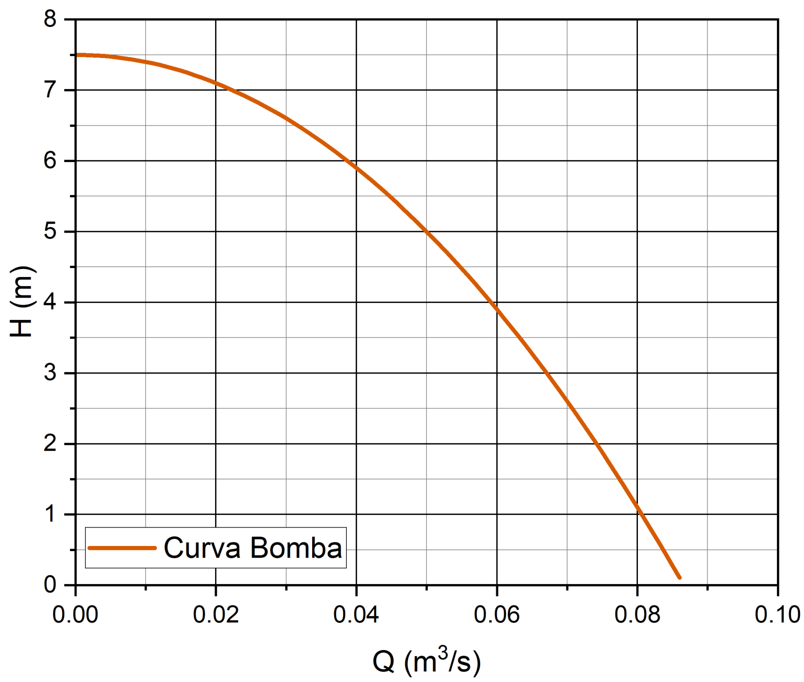
b) [5] Você poderia usar o mesmo valor do fator de atrito f para construir a curva do sistema? Explique.

c) [5] Esboce a curva da bomba e a curva do sistema no gráfico e indique o ponto de operação.

d) [10] Esboce a linha de energia e a linha piezométrica incluindo as perdas localizadas.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:



Continue a solução no verso ⟹

a) [5] Determine o ponto de operação do sistema (a vazão de operação). Despreze as perdas localizadas e considere $f = 0.01954$.

$$\underbrace{\frac{P_1}{\gamma}}_{\text{Patm}} + \alpha_1 \cancelto{0}{\frac{V_1^2}{2g}} + z_1 + H_{bomba} = \underbrace{\frac{P_2}{\gamma}}_{\text{Patm}} + \alpha_2 \cancelto{0}{\frac{V_2^2}{2g}} + z_2 + \cancelto{0}{H_{turbina}} + h_{perdas}$$

$$H_{bomba} = z_2 - z_1 + f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

$$a - bQ^2 = h + f\frac{8L}{g\pi^2 D^5}Q^2$$

$$Q^2\left[f\frac{8L}{g\pi^2 D^5} + b\right] = a - h$$

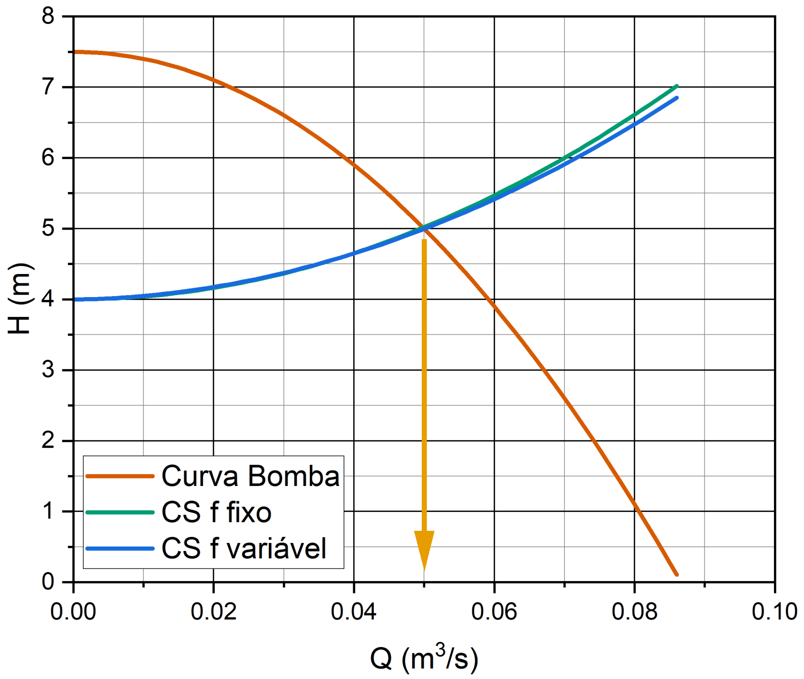
$$Q = \sqrt{\frac{a-h}{f\frac{8L}{g\pi^2 D^5} + b}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{7.5-4}{0.01954\frac{8\cdot 300}{g\pi^2 0.3^5} + 1000}}$$

$$Q = 0.05\ \text{m}^3/\text{s}$$

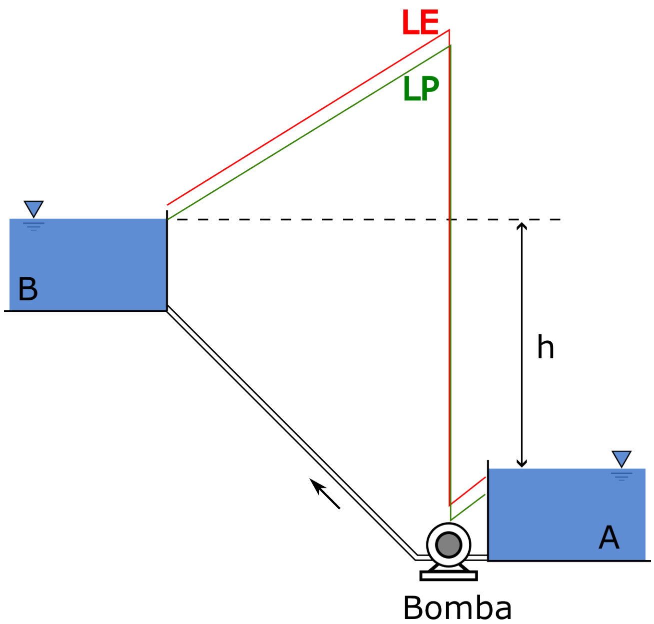
b) [5] Você poderia usar o mesmo valor do fator de atrito f para construir a curva do sistema? Explique. Não, pois a curva do sistema é determinada pela relação de $H(Q)$ de modo que para cada vazão há um fator de atrito distinto.

c) [5] Esboce a curva da bomba e a curva do sistema no gráfico e indique o ponto de operação.



d) [5] Esboce a linha de energia e a linha piezométrica incluindo as perdas localizadas.

Continue a solução no verso ⟹



Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Considere o escoamento laminar em um tubo. o gradiente de pressão longitudinal $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$ cresce:

a) Diretamente proporcional à área da seção transversal.

b) Diretamente proporcional ao quadrado da área da seção transversal.

c) Inversamente proporcional ao diâmetro da tubulação.

d) Inversamente proporcional à área da seção transversal.

e) Inversamente proporcional ao quadrado da área da seção transversal.

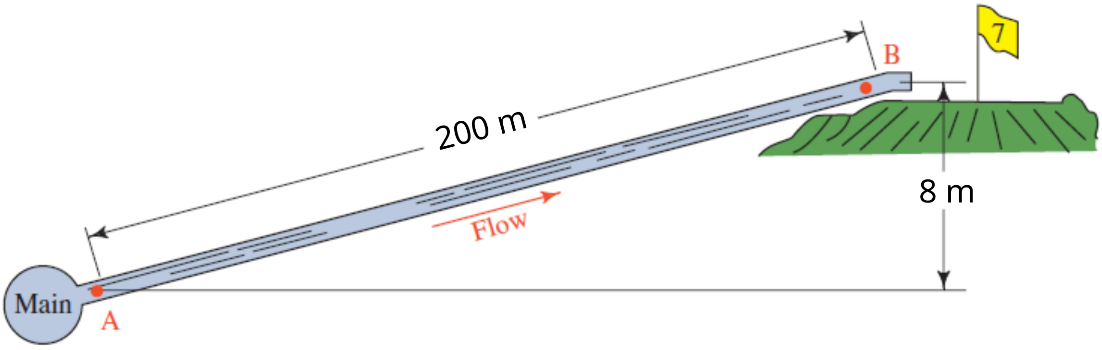
Justifique.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\Delta p}{L} &= \frac{128\mu Q}{\pi D^4} \\ &\propto \frac{1}{D^4} \\ &\propto \frac{1}{A^2}\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [30] Água deve ser transportada para irrigação de um campo de golf. A pressão no sistema principal é de 80 psig e a pressão mínima necessária para operar o sistema de *sprinkler* é de 60 psig no ponto B. Determine o diâmetro da tubulação de aço ($\epsilon = 0.045$ mm) necessária para atender uma vazão de 15 L/s. *Dica: arbitre um valor inicial para* $D = 0.1$ m. Lembre que psig significa pressão manométrica em unidade psi. 1 [psig] = 6894.76 [Pa]



TUBO PRETO E GALVANIZADO - NBR 5590 - SCHEDULE 10				
Diâmetro Nominal (DN)	Diâmetro Externo	Diâmetro Interno	Parede	Kg/m
1/2"	21,30	17,08	2,11	0,998
3/4"	26,70	22,48	2,11	1,279
1"	33,40	27,86	2,77	2,092
1 1/4"	42,20	36,66	2,77	2,693
1 1/2"	48,30	42,76	2,77	3,110
2"	60,30	54,76	2,77	3,93
2 1/2"	73,00	66,90	3,05	5,261
3"	88,90	82,80	3,05	6,457
3 1/2"	101,60	95,50	3,05	7,412
4"	114,30	108,20	3,05	8,368
5"	141,30	134,50	3,40	11,562
6"	168,30	161,50	3,40	13,826
8"	219,10	211,58	3,76	19,967

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

Aplicamos a equação da energia entre um ponto a montante (1) e no ponto B elevado da tubulação (2).

$$\underbrace{\frac{P_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g}}_{=80\text{ psig}} + + z_1 + \cancelto{0}{H_{bomba}} = \frac{P_2}{\gamma} + \cancel{\alpha_2 \frac{V_2^2}{2g}} + z_2 + \cancelto{0}{H_{turbina}} + h_{perdas}$$

$$z_1 - z_2 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{P_2}{\gamma} = h = \frac{V^2}{2g}\left[f\frac{L}{D} + 1\right]$$

$$h = \frac{8Q^2}{\pi^2 g D^4}\left[f\frac{L}{D} + 1\right]$$

Reorganizando para isolar o diâmetro D.

$$D^4 = \frac{8Q^2}{\pi^2 g h}\left[f\frac{L}{D} + 1\right]$$

$$D = \left(\frac{8Q^2}{\pi^2 g h}\left[f\frac{L}{D} + 1\right]\right)^{\frac{1}{4}}$$

Reescrevendo agora a equação para estabelecer um potencial procedimento iterativo.

$$D_{i+1} = \left(\frac{8Q^2}{\pi^2 g h}\left[f\frac{L}{D_i} + 1\right]\right)^{\frac{1}{4}}$$

Vamos calcular h que definimos como:

$$h = z_1 - z_2 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{P_2}{\gamma} = -8 + (80 - 60)\,[\text{psig}] \times \frac{6894.76[\text{Pa}]}{1[\text{psig}]}\frac{1}{9810} = 5.249256\,\text{m}$$

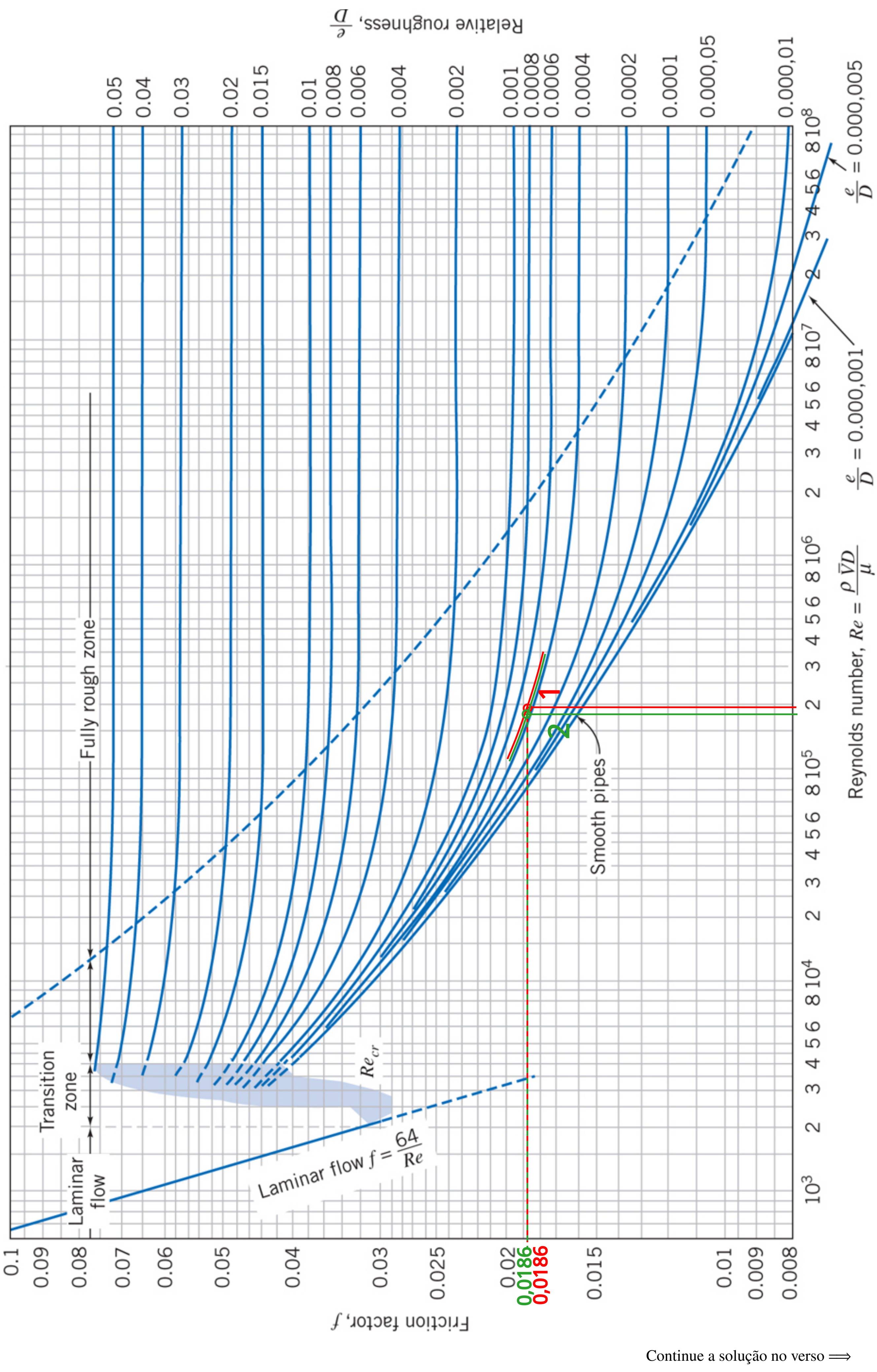
Agora devemos resolver o problema e determinar D. Não sabemos qual o diâmetro D e f também é função de D. Resolvemos o problema arbitrando um primeiro valor para o diâmetro e calculando os demais parâmetros iterativamente. Na falta de um bom palpite para o diâmetro recomendo começar com $D_1 = 0.1$ m e obter os valores de f graficamente por meio do diagrama de Moody. Substituindo valores a equação fica:

$$D_{i+1} = 0{,}043381194\left(f\frac{L}{D_i} + 1\right)^{\frac{1}{4}}$$

Tabela 3: **Iterações para determinação do diâmetro com o diagrama de Moody**

i	D	V	Re	ϵ/D	f	h
1	0.100000	1.909859	1.910×10^5	0.000450	0.0186	7.101778
2	0.107849	1.641976	1.771×10^5	0.000417	0.0186	4.877215
3	0.105885	1.703451	1.804×10^5	0.000425	0.0186	5.343875
4	0.106359	1.688303	1.796×10^5	0.000423	0.0186	5.226511
5	0.106244	1.691972	1.798×10^5	0.000424	0.0186	5.254799

Continue a solução no verso ⟹



Continue a solução no verso ⟹

Alternativamente, tendo um computador ou mais tempo disponível poderíamos procurar a solução com mais refinamento. Na falta de um bom palpite para o diâmetro podemos tomar como uma aproximação um valor intermediário de $f = 0{,}020$ que sempre é um *palpite intermediário*. Podemos então fazer algumas iterações para esta equação. Precisamos então de um valor inicial de D. Vamos arbitrar $D_1 \rightarrow \infty$.

$$D_{i+1} = 0{,}043381194 \left(0.02 \frac{L}{D_i} + 1\right)^{\frac{1}{4}}$$

Tabela 4: **Iterações para determinação do diâmetro**

i	D_i
1	∞
2	0,043381
3	0,134791
4	0,1020943
$\vdots$	$\vdots$
10	0,107785

Mas esta não seria ainda a solução final, uma vez que fixamos e arbitramos f. Então agora devemos iterar para determinar D. Um procedimento possível é aproximar D, calcular todos os parâmetros e determinar Δz depois comparar com o valor estabelecido. Deve-se aumentar ou diminuir D de acordo e realizar os novos cálculos. Uma forma de obter uma nova estimativa do diâmetro $(i + 1)$ é utilizar a mesma equação para a iteração com os dados passados (i).

$$D_{i+1} = \left(\frac{8Q^2}{\pi^2 gh}\left[f\frac{L}{D_i} + 1\right]\right)^{\frac{1}{4}} = D_{i+1} = 0{,}04989369 \left(f\frac{L}{D_i} + 1\right)^{\frac{1}{4}}$$

A tabela resume os resultados de cada iteração. Os valores do fator de atrito foram determinados resolvendo a equação de Colebrook. A primeira aproximação para o diâmetro $D_1 = 0{,}100$m obtivemos da aproximação anterior. Nada impede, é claro, você ter omitido a primeira etapa e arbitrado um diâmetro qualquer como primeira aproximação. O que fizemos apenas nos poupou algumas iterações e agilizou a convergência.

Tabela 5: **Iterações para determinação do diâmetro com Colebrook.**

i	D	V	Re	ϵ/D	f	h
1	0.100000	1.909859	1.909859×10^5	0.000450	0.018644	7.118321
2	0.107912	1.640066	1.769829×10^5	0.000417	0.018619	4.868069
3	0.105897	1.703068	1.803502×10^5	0.000425	0.018623	5.347413
4	0.106389	1.687365	1.795168×10^5	0.000423	0.018622	5.225369
5	0.106268	1.691217	1.797216×10^5	0.000423	0.018623	5.255151
6	0.106297	1.690268	1.796712×10^5	0.000423	0.018622	5.247806
7	0.106290	1.690502	1.796836×10^5	0.000423	0.018622	5.249613
8	0.106292	1.690444	1.796806×10^5	0.000423	0.018622	5.249168
9	0.106291	1.690459	1.796813×10^5	0.000423	0.018622	5.249277
10	0.106292	1.690455	1.796811×10^5	0.000423	0.018622	5.249251

Não fizemos muitas iterações pois alcançamos um erro pequeno no valor de h. Desta forma temos um diâmetro aproximado de 106.3 mm e devemos adotar um diâmetro comercial de 4” ou seja 108.20 mm de diâmetro interno.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$