TEA014 - Mecânica dos Fluidos Ambiental II
Curso de Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 22 Novembro 2024
Prof. Michael Mannich

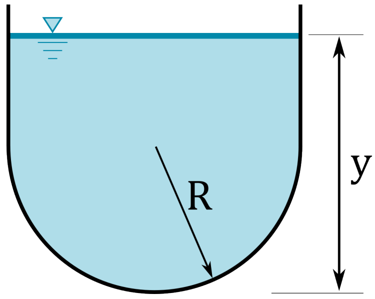
P03

NOME: GABARITO

Assinatura: ____________________

---

1 [30] Considere um canal de seção mista com uma seção semi circular (com raio R) no fundo e paredes verticais, coeficiente de Manning de n uniforme e declividade S_0.



a) [15] Determine as relações para $A(y)$, $P(y)$ e $B(y)$ para $y \geq R$.

b) [10] Se $n = 0.014\,\mathrm{sm^{-1/3}}$, $R = 0.6\,\mathrm{m}$, $y = 0.9\,\mathrm{m}$ e a declividade é de 1:500, determine a vazão.

c) [5] Para as mesmas condições de b) determine Fr.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Para $y > R$.

$$A = \frac{\pi R^2}{2} + (y - R)\,2R$$
$$P = \pi R + 2\,(y - R)$$
$$B = 2R$$
$$R_h = \frac{\frac{\pi R^2}{2} + (y - R)\,2R}{\pi R + 2\,(y - R)}$$

Calculando valores:

$$A = \frac{\pi R^2}{2} + (y - R)\,2R = 0.925487\,\mathrm{m^2}$$
$$P = \pi R + 2\,(y - R) = 2.48495559\,\mathrm{m}$$
$$B = 2R = 1.2\,\mathrm{m}$$
$$R_h = \frac{\frac{\pi R^2}{2} + (y - R)\,2R}{\pi R + 2\,(y - R)} = 0.372436\,\mathrm{m}$$

Aplicando a Equação de Manning com $S_0 = 0.002\,\mathrm{m/m}$ temos:

$$Q = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2} = 1.530353\,\mathrm{m^3/s}$$

Continue a solução no verso ⟹

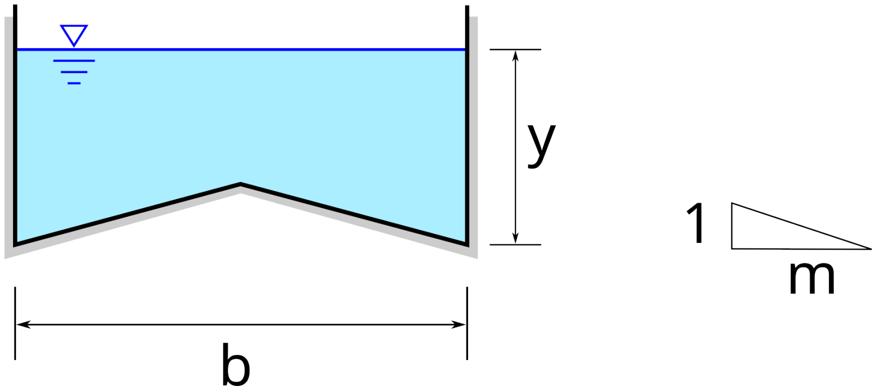
Poderíamos calcular o número de Froude e reconhecer que o escoamento é subcrítico/fluvial ($Fr < 1$).

$$Fr^2 = \frac{Q^2 B}{g A^3}$$

$$Fr = \sqrt{\frac{Q^2 B}{g A^3}} = 0.601163$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [35] Um escoamento de água ocorre em um canal com seção transversal apresentada na figura. Se a vazão é $Q = 13\,\mathrm{m^3/s}$, determine a profundidade normal do escoamento para o canal com coeficiente de Manning de $n = 0.015\,\mathrm{sm^{-1/3}}$, largura $b = 4\,\mathrm{m}$, inclinação do fundo com $m = 4$ e a declividade longitudinal do canal $S_0 = 0.0008\,\mathrm{m/m}$.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Apresentamos as equações para área e perímetro, substituímos na Equação de Manning e a reescrevemos de forma a construir um processo iterativo para determinar a solução por aproximações sucessivas.

$$A = yb - \frac{b^2}{4m} = yb\left(1 - \frac{b}{4my}\right)$$

$$P = 2y + b\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}$$

$$Q = \frac{1}{n} A Rh^{2/3} S_0^{1/2} = \frac{1}{n}\frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} S_0^{1/2} \rightarrow \frac{Qn}{S_0^{1/2}} P^{2/3} = A^{5/3} \rightarrow \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5} P^{2/5} = A$$

$$y = \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5} \frac{\left(2y + b\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}\right)^{2/5}}{b - \frac{b^2}{4my}}$$

$$y_{i+1} = \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5} \frac{\left(2y_i + b\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}\right)^{2/5}}{b - \frac{b^2}{4my_i}}$$

Outra forma seria construir a equação para solução pelo método de Newton-Raphson. Talvez a forma mais conveniente para a derivada seria conforme:

$$Q = \frac{1}{n} A Rh^{2/3} S_0^{1/2} = \frac{1}{n}\frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} S_0^{1/2} \rightarrow \frac{Qn}{S_0^{1/2}} P^{2/3} = A^{5/3} \rightarrow \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5} P^{2/5} = A$$

$$f(y) = A - \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5} P^{2/5}$$

$$f(y) = b\left(y - \frac{b}{4m}\right) - \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5} \left(2y + b\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}\right)^{2/5}$$

$$f'(y) = b - \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5} 2 \times \frac{2}{5} \left(2y + b\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}\right)^{-3/5}$$

$$y_{i+1} = y_i - \frac{f(y_i)}{f'(y_i)}$$

Continue a solução no verso ⟹

Basta arbitrar um valor inicial para y e seguir o processo iterativo para obter como solução final $y = 2.11$ m.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [35] Considere um escoamento de água com vazão de $Q = 10.0\,\mathrm{m^3/s}$ em um canal retangular com largura. A largura na seção de montante é $b_1 = 4.5\,\mathrm{m}$. Uma contração ocorre na seção de jusante de modo que a largura seja $b_2 = 3.0\,\mathrm{m}$. A profundidade na seção contraída é $y_2 = 2.0\,\mathrm{m}$.

a) [15] Qual é a profundidade do escoamento na seção de montante? Como você sabe qual das profundidades na solução $E(y)$ é a correta?

b) [10] Qual a mudança de largura do canal necessária para que a seção contraída exerça controle no escoamento?

c) [10] Apresente em um gráfico de E versus y para cada vazão específica q os valores das seções 1 e 2 do item a.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$
\begin{aligned}
q_2 &= \frac{Q}{b_2} = \frac{9}{3} = 3.0\,\mathrm{m^3/sm} \\
Fr_2 &= \frac{q}{\sqrt{g y_2^3}} = 0.3386443 \\
y_{c,2} &= \left(\frac{q_2^2}{g}\right)^{1/3} = 0.971683\,\mathrm{m} \\
E_2 = y_2 + \frac{q_2^2}{2 g y_2^2} &= 2.0 + \frac{3.0^2}{2 \times 9.81 \times 2.0^2} = 2.114679\,\mathrm{m} \\
E_1 &= E_2 = 2.114679\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

$E_2 > E_C = 1.457524\,\mathrm{m}$, portanto, ainda não há controle.

Agora precisamos determinar y_1 a partir de E_1 sabendo que o escoamento de jusante é fluvial e que a profundidade y_1 vai aumentar com $q_1 < q_2$. Determinamos y_1 a partir da equação da energia específica:

$$
E_1 = y_1 + \frac{q_1^2}{2 g y_1^2} \rightarrow y_1^3 - E_1 y_1^2 + \frac{q_1^2}{2g} = 0
$$

Considerando uma solução iterativa pelo método de Newton-Raphson, por exemplo, tomando uma aproximação inicial (por exemplo $y_i = 2.0$) com valor superior ao da profundidade crítica na seção 1 $y_{C,1} = \left(\frac{q_1^2}{g}\right)^{1/3} = 0.741533\,\mathrm{m}$, uma vez que sabemos que o escoamento ainda será fluvial.

$$
\begin{aligned}
f &= y_1^3 - E_1 y_1^2 + \frac{q_1^2}{2g} \\
f\prime &= 3y_1^2 - 2E_1 y_1 \\
y_{i+1} = y_i + \frac{f}{f\prime} &= y_i + \frac{y_i^3 - E_1 y_i^2 + q_1^2/2g}{3y_i^2 - 2E_1 y_i}
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

Tabela 1: **Iterações para determinação da profundidade** y_1

i	y_i
1	2.000000
2	2.071963
3	2.066984
4	2.066959
5	2.066959
6	2.066959
7	2.066959
8	2.066959
9	2.066959
10	2.066959

A solução é $y_1 = 2.067\,\text{m}$.
Alternativamente poderíamos resolver a equação cúbica de forma analítica:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Calculamos

$$\begin{aligned} p &= b - \frac{a^2}{3} = -1.490622 \\ q &= \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = -0.496613 \\ \Delta &= \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -0.061014 \end{aligned}$$

Se $\Delta < 0$ temos as soluções:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-p}\sin\left[\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}q}{2(-p)^{3/2}}\right)\right] - \frac{a}{3} \\ x_2 &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-p}\sin\left[\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}q}{2(-p)^{3/2}}\right) + \frac{\pi}{3}\right] - \frac{a}{3} \\ x_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-p}\cos\left[\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}q}{2(-p)^{3/2}}\right) + \frac{\pi}{6}\right] - \frac{a}{3} \end{aligned}$$

As raízes são então:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.338826 \longrightarrow \text{torrencial} \\ x_2 &= -0.291107 \longrightarrow \text{fisicamente inviável} \\ x_3 &= 2.066959 \longrightarrow \text{fluvial} \end{aligned}$$

b) Desejamos que o escoamento na seção 2 seja crítico, e portanto, a energia será crítica (mínima) e para qual largura b_2 isso ocorrerá. Portanto, $E_2 = E_C$.

$$E_2 = E_C = 2.114679\,\text{m}$$

Continue a solução no verso ⟹

Agora resolvemos para q_2:

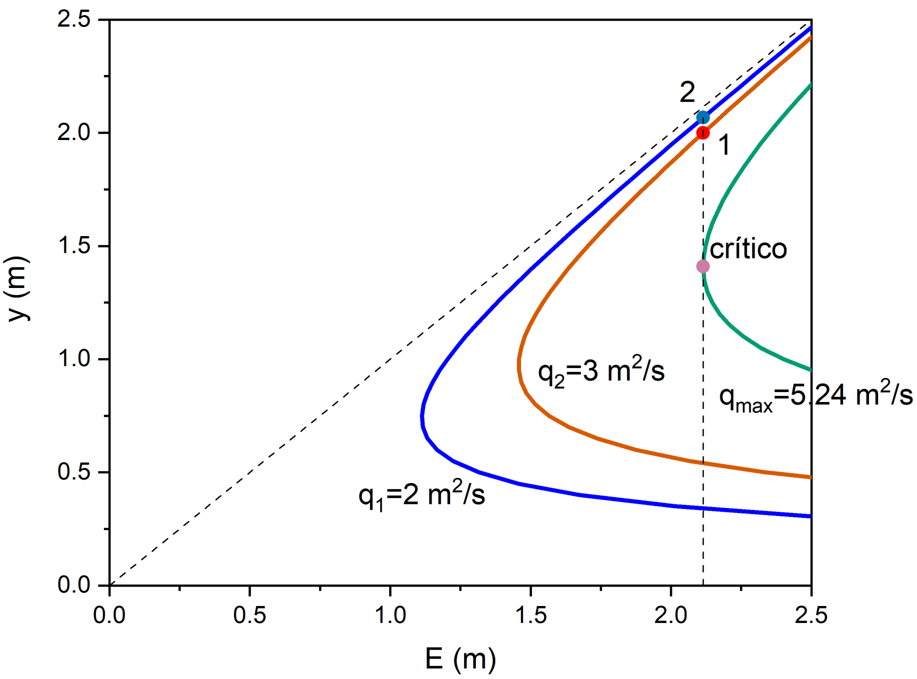
$$E_2 = E_C = \frac{3}{2} y_C \longrightarrow y_2 = y_C = 1.409786\,\mathrm{m}$$

$$\frac{q_2^2}{g y_C^3} = 1 \longrightarrow q_2 = \sqrt{g y_C^3} = 5.242812\,\mathrm{m}^3/\mathrm{sm}$$

$$b_2 = \frac{Q}{q_2} = \frac{9}{5.242812} = 1.716636\,\mathrm{m}$$

Desta forma, uma largura inferior a 1.717 m acarretaria em controle do escoamento.

c)



Continue a solução no verso ⟹