TEA014 - Mecânica dos Fluidos Ambiental II
Curso de Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 13 Dezembro 2024
Prof. Michael Mannich

**P04**

NOME: GABARITO    Assinatura: ____________________

---

ATENÇÃO: A interpretação das questões faz parte da prova. A prova é sem consulta e individual. A prova pode ser resolvida a lápis. É de responsabilidade do aluno que a resolução esteja organizada, clara e legível para a correção do professor. Durante a resolução apresente todas as hipóteses que julgar necessárias. Cada questão possui um valor, portanto, não dedique um tempo desproporcional na resolução de cada questão.

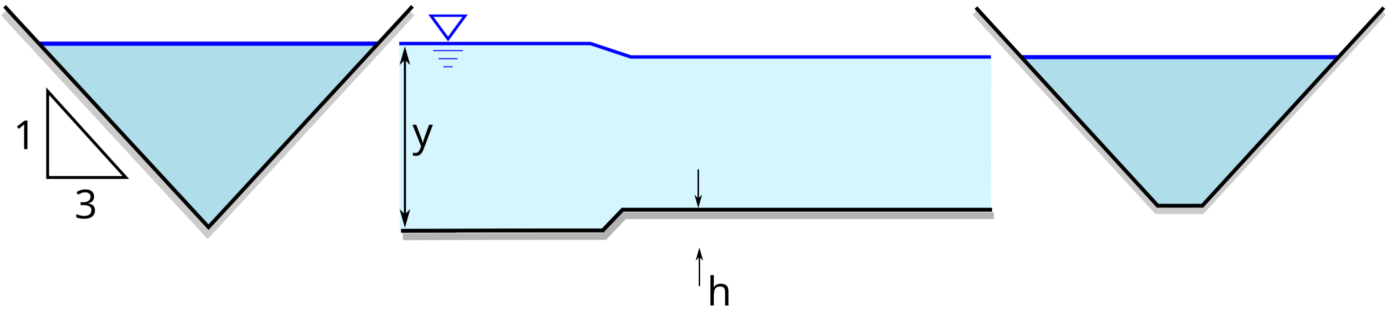
---

**1** [50] Um canal retangular triangular escoa $Q = 23.771\ \mathrm{m^3/s}$, e possui profundidade normal igual a 2 m. Em uma região do canal há uma mudança local de fundo por obstrução de sedimentos de modo que o canal passa a ser trapezoidal com os mesmos taludes e elevado em $h = 0.2$ m em relação à seção de montante, conforme a ilustração. Supondo que o trecho de transição é horizontal e desprezando os efeitos de resistência, determine:

a) [30] A profundidade do escoamento na seção de jusante. Sabendo que $y_{c,2} = 1.4794$ m e $E_c = 1.8933$ m

b) [10] O valor de $Fr$ nas duas seções do escoamento. *Não tente encontrar $y_c$ na seção trapezoidal porque irá cair em outro processo iterativo.*

c) [10] Esboce os gráficos de $E$ vs. $y$ para as duas seções e argumente como você fez esta representação gráfica.




Para determinar $y$ dado que conhecemos $E$ vamos, como sempre, cair em um problema iterativo. Você pode utilizar esta construção para montar uma função $f(y)$.

$$
\begin{aligned}
A &= by + my^2 \\
E = y + \frac{Q^2}{2g\left(by + my^2\right)^2} &\rightarrow \\
y^5 + (2b/m - E)\,y^4 + \left((b/m)^2 - 2Eb/m\right)y^3 - E(b/m)^2y^2 + \frac{Q^2}{2gm^2} &= 0
\end{aligned}
$$

Se utilizar o método de Newton-Raphson lembre-se de

$$y_{i+1} = y_i - \frac{f}{f'}$$

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

Na seção de montante (1):

$$
\begin{aligned}
A &= my^2 = 12\,\mathrm{m}^2 \\
B &= 2my = 12\,\mathrm{m} \\
Fr^2 &= \frac{Q^2 B}{gA^3} \\
Fr &= \sqrt{\frac{Q^2 B}{gA^3}} = 0.63246 \\
E &= y + \frac{Q^2}{2gA^2} = 2.20\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

O escoamento é fluvial/subcrítico.

a) Reconhecemos que $E_2 = E_1 - h$. Então vamos primeiro calcular $E_1$:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= y_1 + \frac{Q^2}{2gA^2} = 2.20\,\mathrm{m} \\
E_2 &= E_1 - h = 2.0\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Agora precisamos determinar $y_2$ a partir de $E_2$.

$$
\begin{aligned}
A &= by + my^2 \\
E &= y + \frac{Q^2}{2g\left(by + my^2\right)^2} \longrightarrow \\
(E - y)\, y^2\, (b + my)^2 &= \frac{Q^2}{2g} \longrightarrow \\
(E - y)\, y^2 \left(b^2 + m^2 y^2 + 2bmy\right) &= \frac{Q^2}{2g} \longrightarrow \\
(E - y) \left(b^2 y^2 + m^2 y^4 + 2bmy^3\right) &= \frac{Q^2}{2g} \longrightarrow \\
m^2 y^5 + \left(2mb - Em^2\right) y^4 + \left(b^2 - 2Emb\right) y^3 - Eb^2 y^2 + \frac{Q^2}{2g} &= 0 \\
y^5 + (2b/m - E)\, y^4 + \left((b/m)^2 - 2Eb/m\right) y^3 - E(b/m)^2 y^2 + \frac{Q^2}{2gm^2} &= 0
\end{aligned}
$$

Considerando uma solução iterativa pelo método de Newton-Raphson, por exemplo, tomando uma aproximação inicial ($y_i = 2.0$) com valor superior ao da profundidade crítica na seção 2 $y_{C,2} = 1.4794\,\mathrm{m}$, reconhecendo que a energia específica $E_2 = 2.0\,\mathrm{m}$ é maior que a energia crítica nesta seção ($E_c = 1.8933\,\mathrm{m}$).

$$
\begin{aligned}
f &= y^5 + (2b/m - E)\, y^4 + \left((b/m)^2 - 2bE/m\right) y^3 + E(b/m)^2 y^2 + \frac{Q^2}{2gm^2} \\
f' &= 5y^4 + 4\,(2b/m - E)\, y^3 + 3\left((b/m)^2 - 2bE/m\right) y^2 + 2E(b/m)^2 y
\end{aligned}
$$

$$
y_{i+1} = y_i - \frac{f}{f'} = y_i - \frac{y^5 + (2b/m - E)\, y^4 + \left((b/m)^2 - 2bE/m\right) y^3 + E(b/m)^2 y^2 + \frac{Q^2}{2gm^2}}{5y^4 + 4\,(2b/m - E)\, y^3 + 3\left((b/m)^2 - 2bE/m\right) y^2 + 2E(b/m)^2 y}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Tabela 1: **Iterações para determinação da profundidade** $y_2$

| $i$ | $y_i$ (m) |
|---|---|
| 1 | 2.000000 |
| 2 | 1.861111 |
| 3 | 1.803668 |
| 4 | 1.793366 |
| 5 | 1.793048 |
| 6 | 1.793048 |
| 7 | 1.793048 |
| 8 | 1.793048 |
| 9 | 1.793048 |
| 10 | 1.793048 |

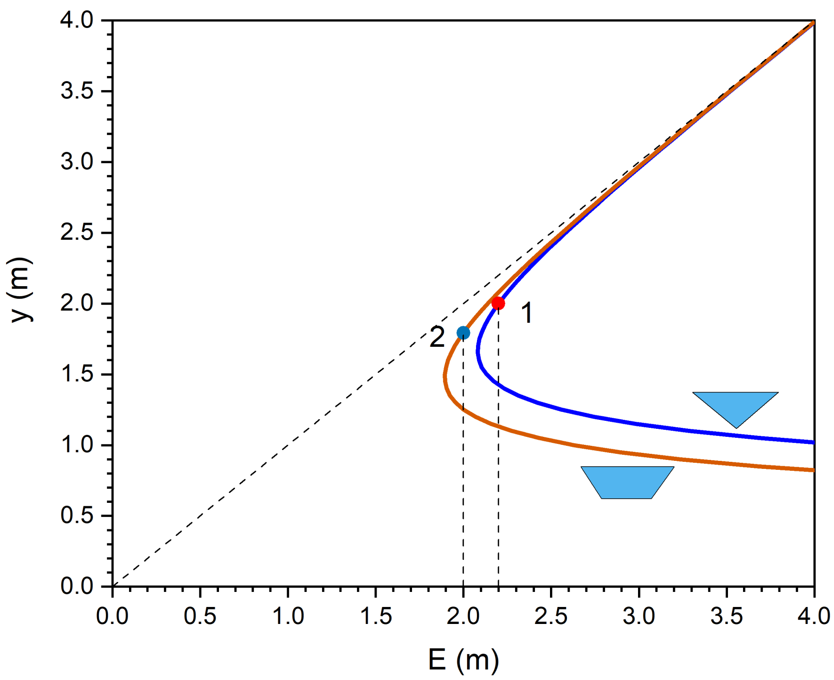
A solução é $y_2 = 1.793\,\text{m}$.

b) Na seção de jusante.

$$A = by + my^2 = 11.7967\,\text{m}$$

$$Fr^2 = \frac{Q^2 B}{gA^3}$$

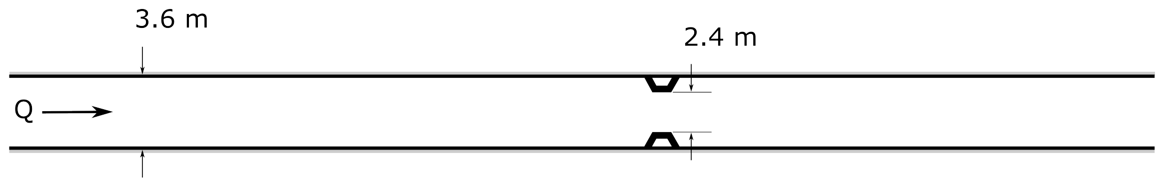
$$Fr = \sqrt{\frac{Q^2 B}{gA^3}} = 0.6477$$

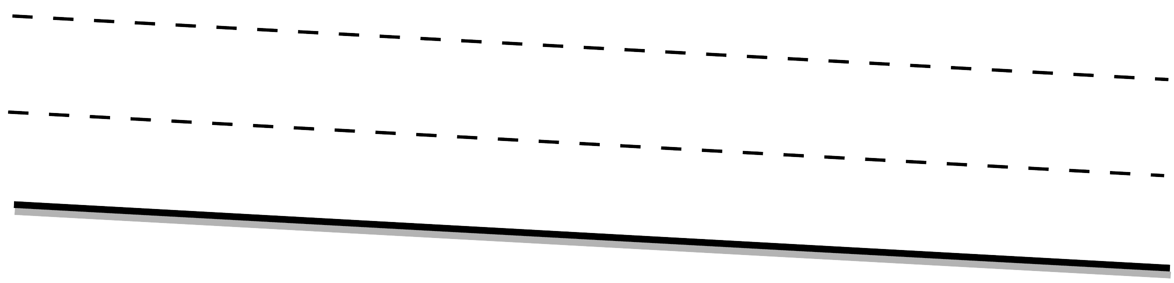



c)

Continue a solução no verso ⟹

**2** [50] Um canal retangular de $b = 3.6$ m de largura, declividade $S_0 = 0.001$ m/m e coeficiente de Manning $n = 0.013$ s/m$^{1/3}$ apresenta uma contração e expansão suaves de modo que a perda de energia localizada pode ser desprezada. A vazão transportada é de $Q = 12\,\text{m}^3/\text{s}$. A contração tem largura de $b = 2.4$ m. A profundidade normal do escoamento, obtida pela solução da equação de Manning é $y_n = 1.548558$ m.



a) [5] Determine o tipo declividade do canal e classifique-o como forte (S) ou moderado (M). Justifique

b) [15] Esboce o perfil da linha de água, indicando as curvas de remanso e as alturas normal e crítica, ocorrência de ressalto hidráulico se aplicável.

c) [10] Determine a profundidade conjugada do ressalto hidráulico.

d) [20] Na ocorrência de algum remanso à montante, estime a distância de um ponto de profundidade conhecida até a profundidade normal $y_n$ com uma diferença de 1%. Utilize o *Direct Step Method* com um único passo.

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) Você pode calcular $y_c$ ou $S_c$ e comparar.

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{12}{3.6} = 3.333333\,\text{m}^3/\text{s/m}$$

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = 1.042388\,\text{m}$$

$$S_c = \left[\frac{QnP_c^{2/3}}{A^{5/3}}\right]^2 = 0.003007\,\text{m/m}$$

Como $y_c < y_n$ o canal é de declividade moderada (M). Da mesma forma, como $S_0 < S_c$ a declividade é moderada.

b) Vamos ver o que acontece na contração. O escoamento à montante é fluvial, porque $y_n > y_c$, logo $Fr < 1$. Podemos até mesmo calcular e verificar que $Fr_1 = 0.552272$. Vamos calcular a energia específica e verificar a máxima contração possível com essa energia, ou seja, a menor energia necessária para vencer a contração que é a $E_c$ na seção contraída.

Continue a solução no verso ⟹

$$
\begin{aligned}
E_1 &= y_1 + \frac{q^2}{2gy_1^2} = 1.784716\,\mathrm{m^3/s} \\
q_2 &= \frac{Q}{b_2} = \frac{12}{2.4} = 5.0\,\mathrm{m^3/s/m} \\
y_{c,2} &= \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = 1.3659153\,\mathrm{m} \\
E_c &= \frac{3}{2}y_{c,2} = 2.048872\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Logo, a energia necessária na contração deve ser $E_2 = E_c = \frac{3}{2}y_{c,2} = 2.048872\,\mathrm{m}$ e haverá controle de escoamento elevando o nível à montante da contração e estabelecendo uma curva do tipo M1. Após o escoamento crítico buscamos a profundidade de escoamento supercrítico e antes do estreitamento a profundidade fluvial. As soluções para isso vem da equação $E(y) = y + \frac{q^2}{2gy^2}$. Temos então que resolvendo a equação cúbica de forma analítica:

$$
\begin{aligned}
E_2 = y_2 + \frac{q_2^2}{2gy_2^2} &\rightarrow y_2^3 - E_2 y_2^2 + \frac{q_2^2}{2g} = 0 \\
x^3 + ax^2 &+ bx + c = 0 \\
y_2^3 - 2.048872 y_2^2 &+ 1.274210 = 0
\end{aligned}
$$

Calculamos

$$
\begin{aligned}
p &= b - \frac{a^2}{3} = -1.399293 \\
q &= \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = -0.070789 \\
\Delta &= \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -0.100223
\end{aligned}
$$

Se $\Delta < 0$ temos as soluções:

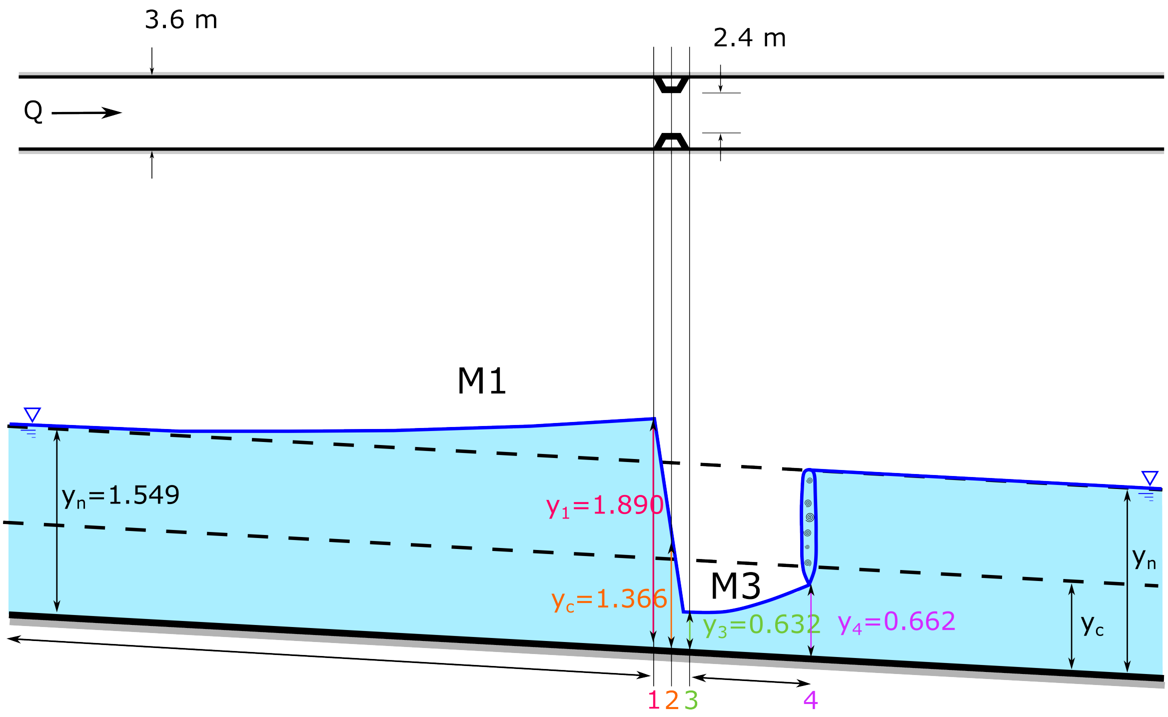
$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-p}\sin\left[\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}q}{2(-p)^{3/2}}\right)\right] - \frac{a}{3} \\
x_2 &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-p}\sin\left[\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}q}{2(-p)^{3/2}}\right) + \frac{\pi}{3}\right] - \frac{a}{3} \\
x_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-p}\cos\left[\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}q}{2(-p)^{3/2}}\right) + \frac{\pi}{6}\right] - \frac{a}{3}
\end{aligned}
$$

As raízes são então:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.632275 \rightarrow \text{torrencial} \\
x_2 &= -0.690330 \rightarrow \text{fisicamente inviável} \\
x_3 &= 1.890401 \rightarrow \text{fluvial}
\end{aligned}
$$

A profundidade de montante será então $y_1 = 1.890401$ m e a profundidade após a contração será 0.632275 m.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$




c)

d) Pela equação para ressalto hidráulico em canal retangular, reconhecemos que a profundidade d jusante de ser $y_n$, então $y_2 = y_n$ na equação do ressalto hidráulico, assim $Fr_2 = 0.552272$.

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+8Fr_2^2} - 1\right]$$
$$\frac{y_4}{y_n} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+8Fr_n^2} - 1\right]$$
$$y_4 = y_n\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+8Fr_n^2} - 1\right]$$
$$y_4 = 1.548558\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+8\cdot 0.552272^2} - 1\right]$$
$$y_4 = 0.661802\,\text{m}$$

e) Vamos estimar a distância do remanso entre o ponto em que a profundidade é (ponto 2) $y_1 = 1.01y_n = 1.564043$ m e a profundidade logo à montante da barragem (ponto 1) $y_2 = 1.823564$ m.

$$y_2 = 1.01y_n = 1.564043\,\text{m}$$
$$E_2 = y_2 + \frac{q^2}{2gy_1^2} = 1.795549\,\text{m}$$
$$S_{f2} = \left(QnP^{2/3}A^{-5/3}\right)^2 = 0.0009733458\,\text{m/m}$$
$$y_1 = 1.890401\,\text{m}$$
$$E_1 = y_1 + \frac{q^2}{2gy_1^2} = 2.048872\,\text{m}$$
$$S_{f1} = \left(QnP^{2/3}A^{-5/3}\right)^2 = 0.000585507\,\text{m/m}$$

Continue a solução no verso ⟹

$$\bar{S_f} = \frac{1}{2}\left(S_{f1} + S_{f2}\right) = 0.000779427\,\mathrm{m/m}$$
$$\Delta x = \frac{E_2 - E_1}{S_0 - \bar{S_f}} = -1148.48\,\mathrm{m}$$

Logo, o remanso se estende aproximadamente 1km à montante.

Continue a solução no verso ⟹

CÁLCULOS ADICIONAIS PARA EXERCITAR – REMANSO M3

Se fossemos calcular a curva de remanso do tipo $M_3$ e o comprimento do ressalto. A transição gradual ocorre logo a jusante da expansão até estabelecer a profundidade conjugada para o ressalto. A transição gradual ocorre da profundidade $y_3 = 0.632275$ m até imediatamente antes do ressalto $y_4 = 0.661802$ m, que obtivemos anteriormente.

$$y_3 = 0.632275\,\mathrm{m}$$
$$E_3 = y_3 + \frac{q^2}{2gy_3^2} 2.048872\,\mathrm{m}$$
$$S_{f3} = \left(QnP^{2/3}A^{-5/3}\right)^2 = 0.0129304\,\mathrm{m/m}$$

$$y_4 = 0.661802\,\mathrm{m}$$
$$E_4 = y_4 + \frac{q^2}{2gy_4^2} = 1.954813\,\mathrm{m}$$
$$S_{f4} = \left(QnP^{2/3}A^{-5/3}\right)^2 = 0.0112856\,\mathrm{m/m}$$

$$\bar{S_f} = \frac{1}{2}\left(S_{f3} + S_{f4}\right) = 0.012107985\,\mathrm{m/m}$$
$$\Delta x = \frac{E_2 - E_1}{S_0 - \bar{S_f}} = 8.4677\,\mathrm{m}$$

O comprimento do ressalto hidráulico pode ser estimado por $L_r = 6.9\,(y_n - y_4) = 6.12$ m. Desta forma o comprimento total do trecho até o fim do ressalto é $L = L_r + \Delta x = 14.59$ m.

Continue a solução no verso ⟹

CÁLCULOS ADICIONAIS PARA EXERCITAR – PROFUNDIDADE UNIFORME

A profundidade uniforme foi fornecida no enunciado, mas caso fosse necessário calcular poderia ser na forma a seguir.

$$\begin{aligned}
A &= by \\
P &= b + 2y \\
Q = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2} &= \frac{1}{n} A^{5/3} P^{-2/3} S_0^{1/2} \\
\frac{Qn}{S_0^{1/2}} P^{2/3} &= A^{5/3} \\
A &= \left( \frac{Qn}{S_0^{1/2}} \right)^{3/5} P^{2/5}
\end{aligned}$$

Montamos uma equação iterativa e resolvemos partindo de uma aproximação inicial.

$$y_{i+1} = \frac{1}{b} \left( \frac{Qn}{S_0^{1/2}} \right)^{3/5} (b + 2y_i)^{2/5}$$

Tabela 2: **Iterações para determinação da profundidade $y_n$**

| $i$ | $y_i$ |
|---|---|
| 1 | 2.000000 |
| 2 | 1.628912 |
| 3 | 1.563316 |
| 4 | 1.551284 |
| 5 | 1.549062 |
| 6 | 1.548651 |
| 7 | 1.548575 |
| 8 | 1.548561 |
| 9 | 1.548558 |
| 10 | 1.548558 |

A solução é $y_n = 1.548558\,\text{m}$.

Continue a solução no verso ⟹