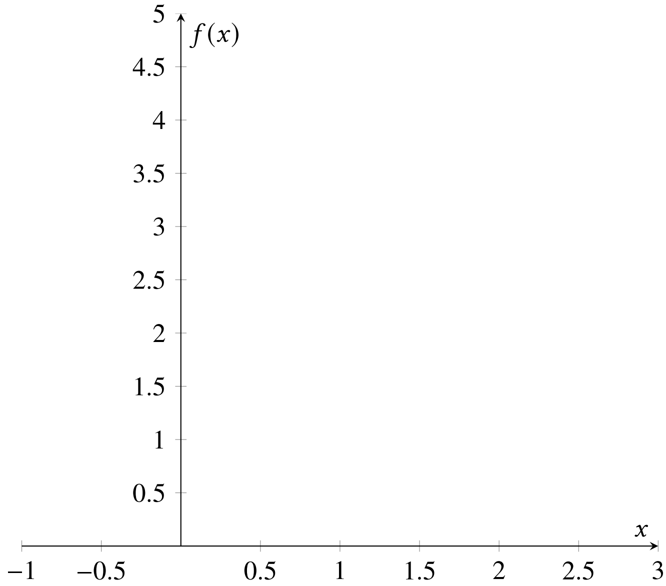
TEA005 - Mecânica dos Sólidos I
Curso de Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 15 Maio 2025
Prof. Michael Mannich

P03

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [35] Considere a região delimitada pelas funções $y_1 = x^2$ e $y_2 = 2^x$ no intervalo $0 \leq x \leq 2$. Esboce a região formada e determine a coordenada $\bar{y}$ do centroide da região.



$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

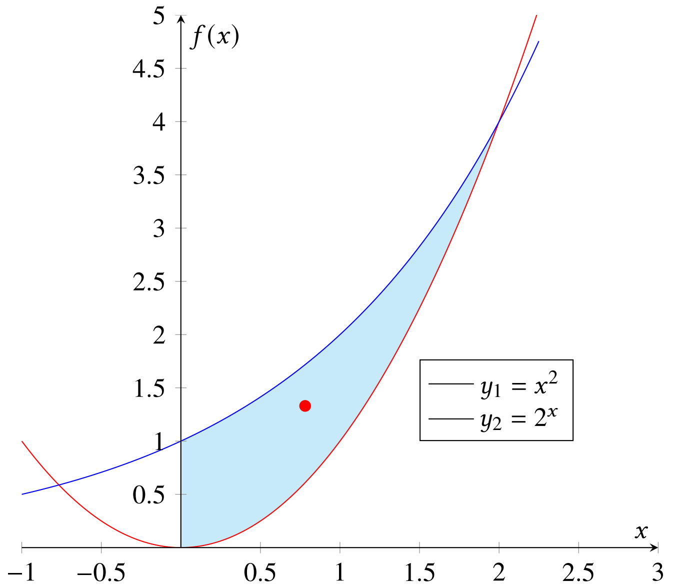
$$\int x a^x dx = \frac{x a^x}{\ln a} - \frac{a^x}{\ln^2 a} + C$$

$$A\bar{x} = \int x dA$$

$$A\bar{y} = \int y dA$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹



Selecionamos um elemento diferencial de comprimento $(y_2 - y_1)$ e altura dx, o centroide é calculado em torno desse retângulo e depois utilizado para toda a área através da integração. Dessa forma, o elemento infinitesimal de área e a área total são iguais a

$$A = \iint_A dydx = \int_0^2 \left[\int_{x^2}^{2^x} dy\right] dx = \int_0^2 2^x dx - \int_0^2 x^2 dx$$

$$A = \left[\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$A = \frac{3}{\ln 2} - \frac{8}{3} = 1.661418\,\text{ua}$$

A coordenada x do centroide do elemento retangular é $x_c = x$, que é simplesmente a coordenada. A coordenada x do centroide da área completa é dada por

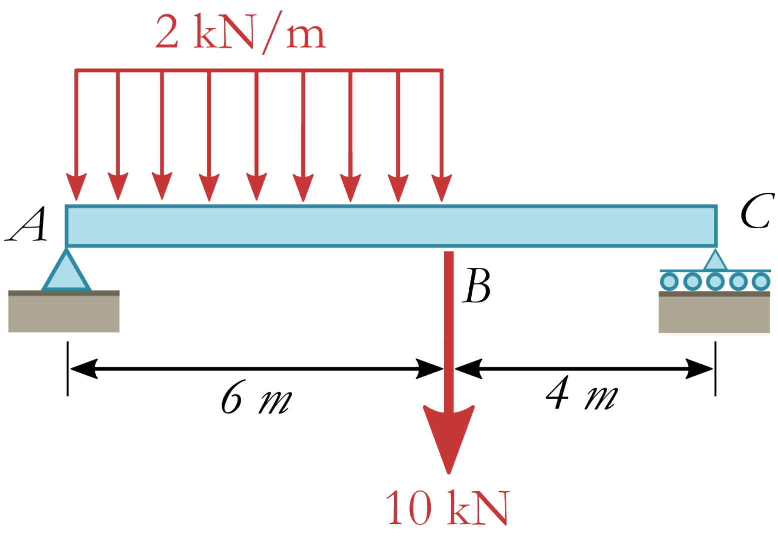
$$\begin{aligned} A\bar{x} &= \int x_c dA = \int x(y_2 - y_1)dx = \int_0^2 x\left[2^x - x^2\right] dx = \int_0^2 x2^x dx - \int_0^2 x^3 dx \\ &= \left[\frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{\ln^2 2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 \\ &= \frac{8}{\ln 2} - \frac{3}{(\ln 2)^2} - \frac{2^4}{4} = 1.297453\,\text{uv} \\ \bar{x} &= \frac{1.297453}{1.661418} = 0.780931\,\text{uc} \end{aligned}$$

A coordenada y do centroide do elemento retangular é igual a distância y entre o eixo x e o ponto do centroide do elemento. A coordenada y do centroide da área completa é dada por

$$\begin{aligned} A\bar{y} &= \int y_c dA = \int \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) \cdot (y_1 - y_2)\, dx = \int_0^2 \frac{1}{2}\left(2^{2x} - x^4\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^2 2^{2x} dx - \int_0^2 x^4 dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{4^x}{\ln 4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{15}{\ln 4} - \frac{2^5}{5}\right] = 2.210106\,\text{uv} \\ \bar{y} &= \frac{2.210106}{1.661418} = 1.330253\,\text{uc} \end{aligned}$$

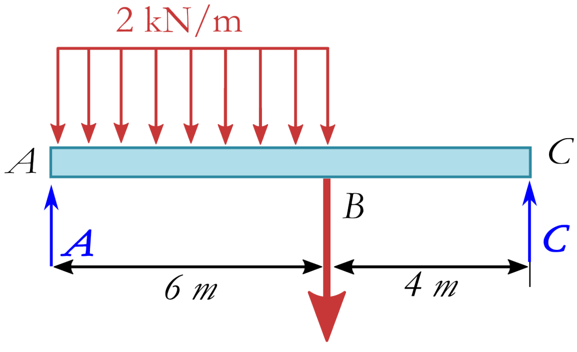
Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [35] Determine os diagramas de esforço cortante e momento fletor da viga ilustrada. Esboce os gráficos de esforço cortante e momento fletor indicando os valores máximos e/ou mínimos das funções no gráfico e os valores nas extremidades da viga. Certifique-se de que estará representando a característica real do gráfico.



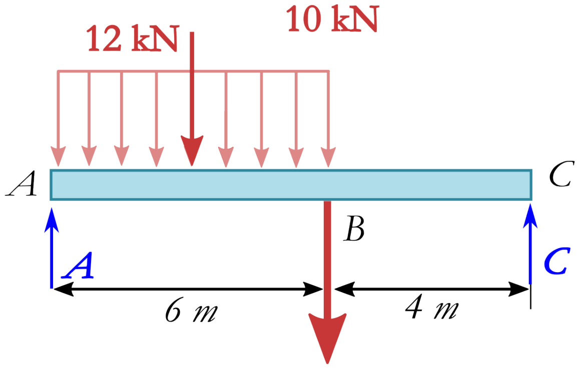
SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

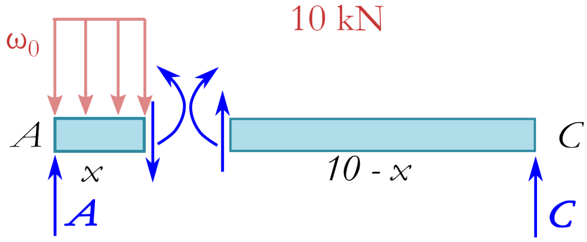


Para a viga toda:

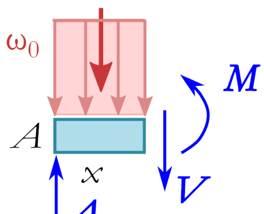
$$\sum M_A = -2 \cdot 6(3) - 10(6) + C(10) = 0$$
$$\rightarrow C = 9.6\,\text{kNm}$$
$$\sum F_y = A + C - 2 \cdot 6 - 10 = 0$$
$$\rightarrow A = 12.4\,\text{kNm}$$

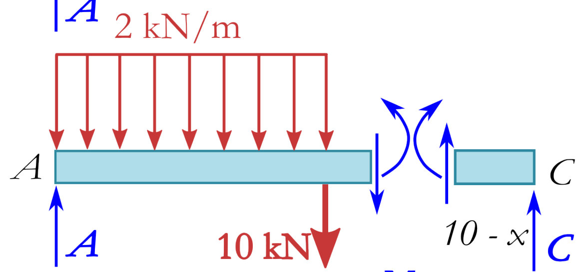


Para a seção $0 < x < 6$ vou analisar trecho da esquerda. Note que $\omega(x) = \omega_0 = 2$:



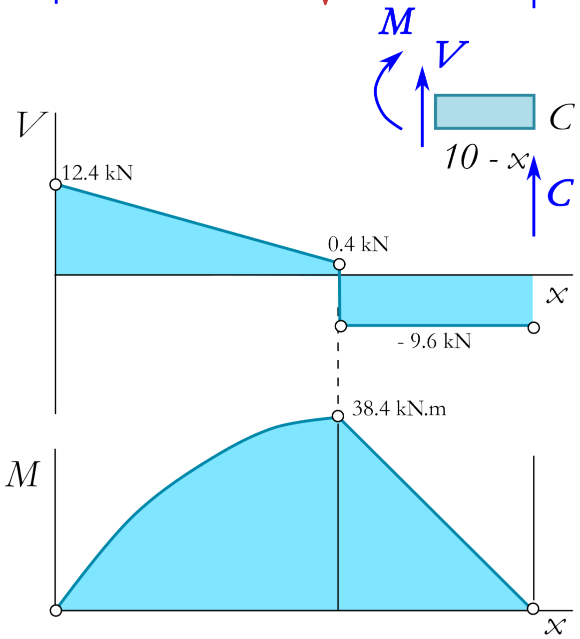
$$\sum F_y = -V - \omega_0(x) + A = 0$$
$$\rightarrow V = A - \omega_0 x = 12.4 - 2x\,\text{kN}$$
$$\sum M_x = +M + \omega_0 x \frac{x}{2} - Ax = 0$$
$$\rightarrow M = 12.4x - x^2\,\text{kNm}$$



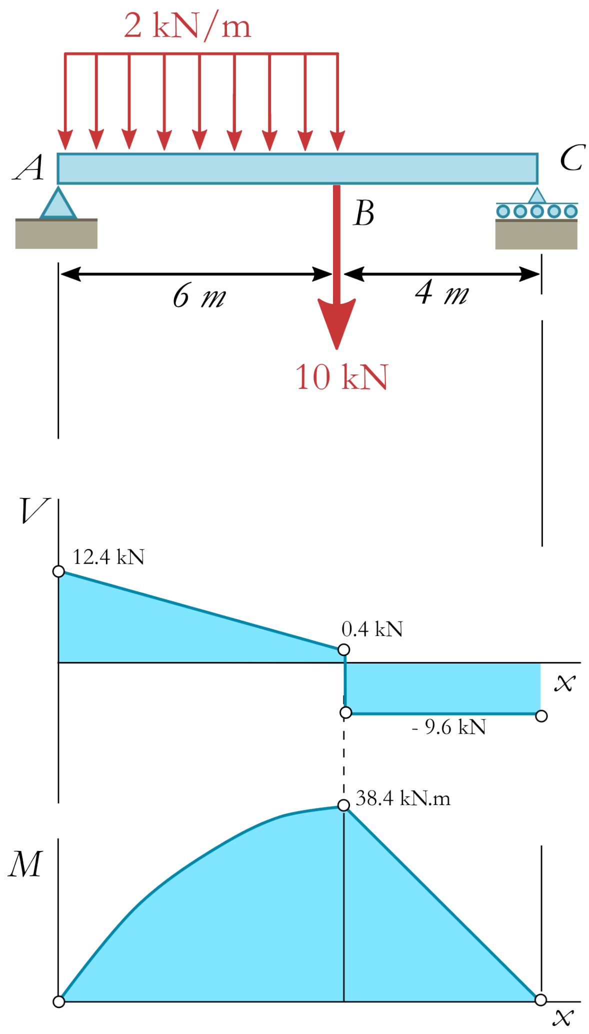


Para a seção $6 < x < 10$ vou analisar trecho da direita (parece mais fácil):

$$\sum F_y = V + C = 0$$
$$\rightarrow V = -C = -9.6\,\text{kN}$$
$$\sum M_C = -M - V(10 - x) = 0$$
$$\rightarrow M = 96 - 9.6x\,\text{kNm}$$

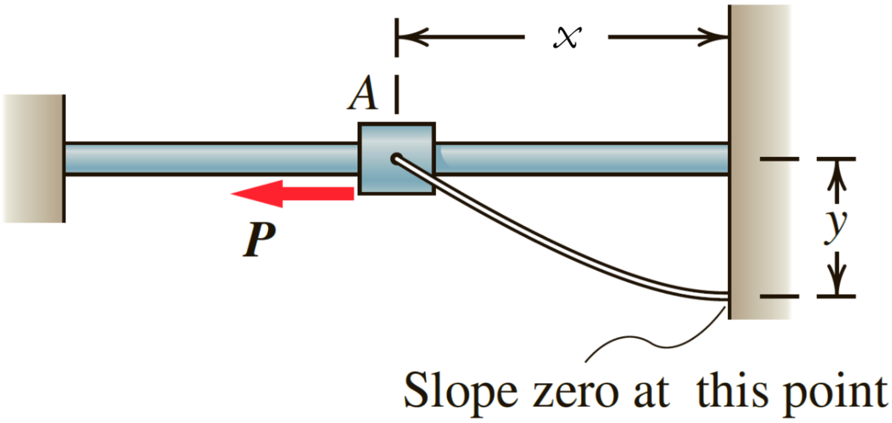


Continue a solução no verso ⟹



Continue a solução no verso ⟹

3 [35] Um cabo com 0.4 kg/m é conectado a um colar (A) que desliza sem atrito na barra horizontal. Para o cabo ilustrado, determinar a força horizontal P necessária para manter o colar na posição $x = 600$ mm e $y = 360$ mm.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Esse problema é tratado como o do cabo catenário com a origem na fixação com a parede. Inspecionando as equações reconhecemos que

$$\boxed{y = \frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\frac{\mu x}{T_0} - 1\right)}$$
$$T = T_0 \cosh\frac{\mu x}{T_0}$$
$$s = \frac{T_0}{\mu}\operatorname{senh}\frac{\mu x}{T_0}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu s}{T_0}$$
$$T = T_0 + \mu y$$
$$T^2 = T_0^2 + (\mu s)^2$$

Nossos dados são $x = 0.6$ m, $y = 0.36$ m Podemos lidar com as seguintes equações e resolver o sistema:
T_0 é a nossa incógnita comum e temos as coordenadas em A. Vamos resolver a equação:

$$y = \frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\frac{\mu x}{T_0} - 1\right)$$

Para encontrar T_0, a equação pode ser solucionada iterativamente pelo método numérico de Newton-Raphson:

$$f(T_0) = \cosh\frac{\mu x}{T_0} - \frac{\mu y}{T_0} - 1$$

Fazendo $\xi = \dfrac{\mu}{T_0}$:

$$f(\xi) = \cosh \xi x - \xi y - 1$$
$$f'(\xi) = x \operatorname{senh} \xi x - y$$
$$\text{Newton-Raphson: } \xi_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)}$$

O enunciado dá o valor de massa por unidade de comprimento de $\mu = 0.4$ kg/m, sendo necessário multiplicar esse valor pela aceleração da gravidade para se obter μ:

$$\mu = 0.4 \cdot 9.81 = 3.924\text{Nm}^{-1}$$

Continue a solução no verso ⟹

Necessitamos de uma boa aproximação inicial de T_0 que pode ser obtida pela formulação do cabo parabólico:

$$T_0 = \frac{wl_A^2}{2h_A} \approx \frac{\mu x^2}{2y}$$

$$\frac{\mu}{T_0} = \xi = \frac{2y}{x^2} = \frac{2 \cdot 0.36}{0.6^2} = 2.0\,\mathrm{m}^{-1}$$

Com esta aproximação inicial partimos para as iterações pelo método de Newton-Raphson:

i	ξ_n	$f(\xi)$	$f'(\xi)$
1	2.000000	0.09065557	0.545677
2	1.833866	0.00875367	0.441708
3	1.814048	0.00011761	0.429858
4	1.813774	0.00000002	0.429695
5	1.813774	0.00000000	0.429695
6	1.813774	0.00000000	0.429695
7	1.813774	0.00000000	0.429695
8	1.813774	0.00000000	0.429695
9	1.813774	0.00000000	0.429695
10	1.813774	0.00000000	0.429695

Obtivemos $\xi = 1.813774$, portanto, $\xi = \dfrac{\mu}{T_0} = 1.813774\,\mathrm{m}^{-1}$ e $P = T_0 = \dfrac{\mu}{\xi} = 2.163444\,\mathrm{N}$.

Continue a solução no verso ⟹