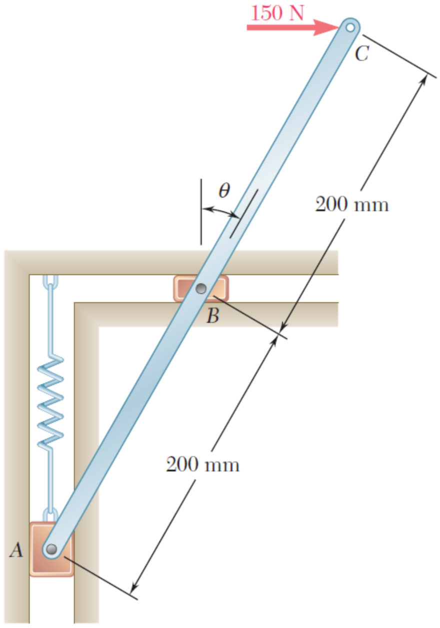
TEA005 - Mecânica dos Sólidos I
Curso de Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P05, 1 Julho 2025
Prof. Michael Mannich

P05

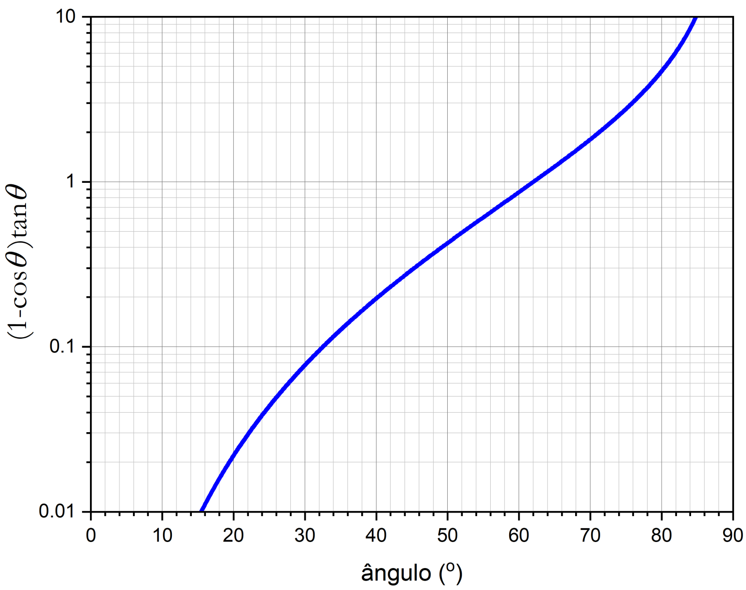
NOME: GABARITO   Assinatura: ____________________

---

1 [40] A barra ABC é conectada a 2 blocos A e B que deslizam livremente nas guias ilustradas. Uma mola com constante da mola $k = 3\,\text{kN/m}$ é conectada ao bloco A. Sabe-se que a mola está livre quando a barra ABC está na vertical. Para a força de 150 N aplicada em C conforme a figura, determine o ângulo θ correspondente ao equilíbrio.

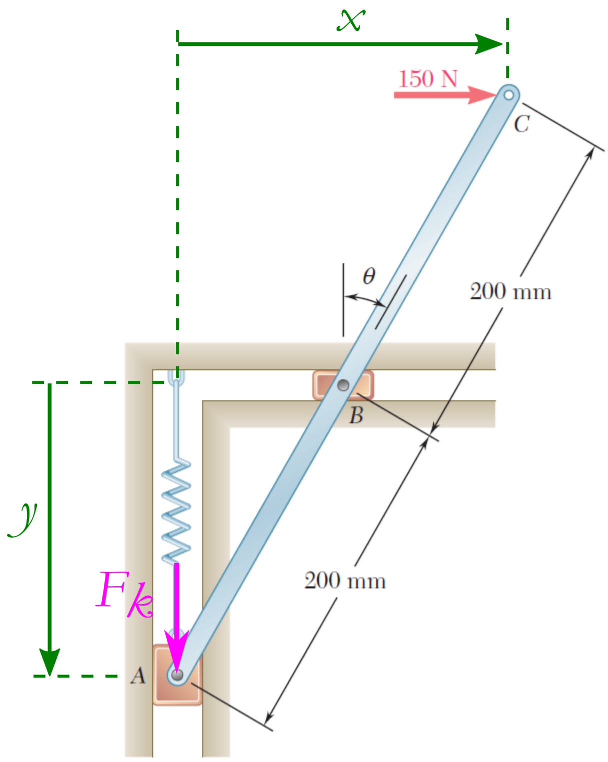


Neste problema você chegará em uma equação transcedental. Você poderia usar o método de Newton-Raphson, da Secante ou de substituições sucessivas para obter a solução. Para facilitar, utilize o gráfico de suporte para determinar o ângulo θ com uma solução gráfica aproximada. Note que parte do seu problema terá o termo $(1 - \cos\theta)\tan\theta$ cuja função é apresentada no gráfico. Note também a figura está em escala log.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹



Verificamos os 2 deslocamentos virtuais.

$$[\delta U = 0] \therefore F_k \delta y + 150\delta x = 0$$

Para x e y, considerando L o comprimento total da barra BC, temos:

$$\begin{aligned} x &= L \operatorname{sen}\theta \\ \delta x &= L\cos\theta\delta\theta \\ y &= \frac{L}{2}\cos\theta \\ \delta y &= -\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta\delta\theta \end{aligned}$$

A força da mola pode ser determinada reconhecendo que o comprimento da mola não tensionada é 200 mm ou $\frac{L}{2}$ enquanto o comprimento comprimida é $\frac{L}{2}\cos\theta$. Desta forma $F_k = k\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2}\cos\theta\right) = k\frac{L}{2}(1-\cos\theta)$.
Voltando ao $[\delta U = 0]$:

$$\begin{aligned} \delta U &= F_k\delta y + 150\delta x = 0 \\ \delta U &= -k\frac{L}{2}(1-\cos\theta)\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta\delta\theta + 150L\cos\theta\delta\theta = 0 \\ -\frac{kL}{4}(1-\cos\theta)\operatorname{sen}\theta + 150\cos\theta &= 0 \\ (1-\cos\theta)\tan\theta &= \frac{150\cdot 4}{Lk} \\ (1-\cos\theta)\tan\theta &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Pelo gráfico, uma solução aproximada é $\theta \approx 52°$. A solução mais precisa do problema pode ser obtida transformando as variáveis e resolvendo um polinômio de 4o grau. De forma mais ágil podemos aplicar o método de Newton-Raphson

Continue a solução no verso ⟹

$$f(\theta) = \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$$

$$f(\theta) = \cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$$

$$\text{Newton-Raphson: } \theta_{n+1} = \theta_n - \frac{f(\theta_n)}{f'(\theta_n)}$$

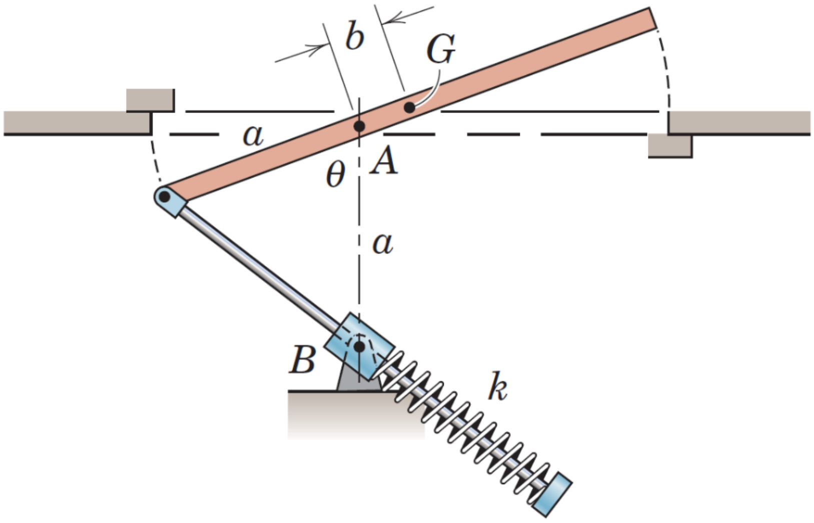
Com esta aproximação inicial partimos para as iterações pelo método de Newton-Raphson:

i	ξ_n	$f(\xi)$	$f'(\xi)$
1	0.5	-0.3801	0.576993
2	1.158762	0.349114	1.537869
3	0.931751	0.025718	1.286306
4	0.911758	0.000285	1.257685
5	0.911531	3.7210^{-8}	1.257357
6	0.911531	6.6610^{-16}	1.257357
7	0.911531	0	1.257357
8	0.911531	0	1.257357
9	0.911531	0	1.257357
10	0.911531	0	1.257357

Assim, encontramos $\theta = 0.911531$ rad $= 52.226897°$.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

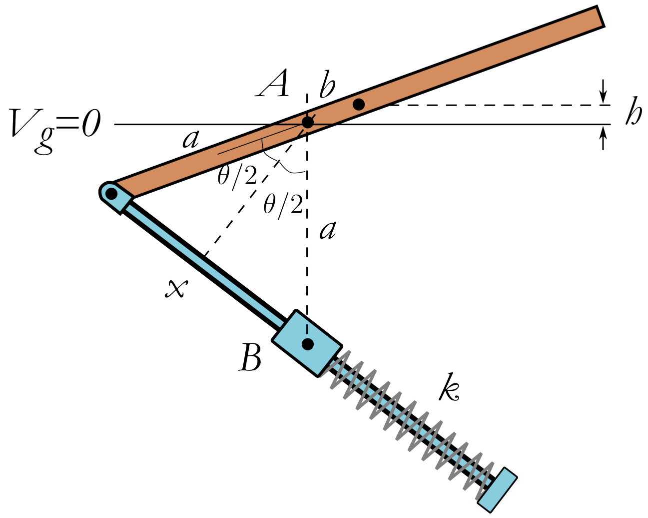
2 [60] A seção transversal de uma tampa de armário, com uma dobradiça em A que possui uma massa m e centro de massa em G é ilustrada na figura. A mola é comprimida por uma barra, que está fixada na extremidade inferior da porta e que passa pelo bloco de rotação B. Quando a porta está totalmente aberta, $\theta = 0$, a mola está indeformada. Mostre que, com a rigidez adequada k da mola, a porta estará em equilíbrio neutro para qualquer ângulo. Em outras palavras, apresente uma equação para a constante da mola k em função das demais variáveis do problema que garanta que a porta permaneça em equilíbrio neutro para qualquer ângulo de abertura θ. Novamente, traduzindo matematicamente, apresente uma equação para k de modo que $\dfrac{dV}{d\theta} = 0$ e $\dfrac{d^2V}{d\theta^2} = 0$.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

A figura a seguir representa o diagrama de forças ativas do sistema.



O deslocamento da mola acaba sendo literalmente o valor de x na figura. Assim podemos escrever a energia potencial elástica da mola como:

$$\left[V_e = \frac{1}{2}kx^2\right] \therefore V_e = \frac{1}{2}k\left(2a\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\right)^2$$

Tomando o ponto A como a referência para a energia potencial gravitacional, temos que $h = b\cos\theta$, então:

$$[V_g = mgh] \therefore V_g = mgh = mgb\cos\theta$$

A energia potencial total é então:

$$V = V_e + V_g = \frac{1}{2}k\left(2a\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\right)^2 + mgb\cos\theta$$

Logo, o equilíbrio ocorre para $dV/d\theta = 0$, de forma que:

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{d\theta} &= \frac{1}{2}k4a^2 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\frac{1}{2} - mgb\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \\
\frac{dV}{d\theta} &= ka^2 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - mgb\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \\
\frac{dV}{d\theta} &= ka^2\,\mathrm{sen}\,\theta - mgb\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \\
\frac{dV}{d\theta} &= \mathrm{sen}\,\theta\left(ka^2 - mgb\right) = 0
\end{aligned}$$

Desta forma, para satisfazer a igualdade para qualquer valor de θ, $k = \dfrac{mgb}{a^2}$.
Para analisar a estabilidade determinamos $\frac{d^2V}{d\theta^2}$:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = \cos\theta\left(ka^2 - mgb\right)$$

Podemos claramente verificar $\dfrac{d^2V}{d\theta^2} = \cos\theta\left(ka^2 - mgb\right) = 0$ para qualquer valor de θ com o valor de $k = \dfrac{mgb}{a^2}$ previamente definido para atender a condição de equilíbrio. Desta forma, o equilíbrio é dito neutro para qualquer valor de θ, ou seja, para qualquer abertura da porta.

Continue a solução no verso ⟹