Curitiba, 04.11.2024

Prova P1
GABARITO
Matemática Aplicada I

Tobias Bleninger
Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, Caixa Postal 19011, 81531-990, Curitiba - PR, Brasil

Nome: ________________________________

Assinatura (comprovando de seguir as regras éticas):

____

Pontuação (preenchido pelo Professor):

Questão	Pontos obtidos	Pontos totais		
1		30		
2		10		
3		10		
4		25		
5		25	Porcentagem	
Soma		100		Nota
Final (corrigido)				

Questões

1. (15 Pontos) Considerando $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \vec{y} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$
    a. Calcule x_1 e x_2 utilizando o método iterativo de Gauss-Seidel (podem parar a iteração quando o primeiro digito decimal não muda mais);
    b. Descreva uma vantagem e uma desvantagem dos métodos de Gauss-Seidel em comparação ao método de eliminação de Gauss.

a) 11P
$2x_1 - x_2 = 0{,}5$
$-x_1 + 2x_2 = 0{,}5$
$x_1 = (0{,}5 + x_2)/2$
$x_2 = (0{,}5 + x_1)/2$
arbitrando valor inicial: $x_1 = x_2 = 1$:
$x_1^1 = 0{,}75$
$x_2^1 = (0{,}5 + x_1^1)/2 = 0{,}625$
$x_1^2 = 0{,}5625$
$x_2^2 = 0{,}5313$
$x_1^3 = 0{,}5156$
$x_2^3 = 0{,}5078$

4P Vantagem Gauss: converge sempre
Desvantagem Gauss: pode custar muitos calculos
Desvantagem Gauss-Seidel: pode não converger
Vantagem Gauss-Seidel: exige menos iterações ou cálculos para obter resultado

2. (10 Pontos) O código de Matlab/Octave seguinte representa uma aproximação numérica de um cálculo:

```
>> X=0:1/2:4;
>> Y=X.*exp(-X);
>> Z=trapz(X,Y)
Z= 0.8867
```

    a. Faça o cálculo do valor de Z exato analiticamente.
    b. Explique por que existe uma diferença entre o valor do método numérico e analítico (no máximo duas frases).
    c. Qual modificação simples no código poderia melhorar o resultado numérico?
    d. Quais outros métodos existem para resolver este cálculo (mencione dois e descreva os usando no máximo uma frase).

Solução

a. Faça o calculo do valor de Z exato analiticamente.

$$\int_0^4 xe^{-x}dx = \left[(-x-1)e^{-x}\right]_0^4 = 0{,}9084 \quad \textit{4 pontos}$$

b. Explique por que existe uma diferença entre o valor do método numérico e analítico (no máximo duas frases).
O numero de trapézios é baixo. A aproximação com trapézios não é preciso.
4 pontos

c. Qual modificação simples no código poderia melhorar o resultado numérico?
X=0:1/100:4;
2 pontos

d. Quais outros métodos numéricos existem para descrever (mencione dois e descreva os usado no Maximo uma frase).
Usar aproximações com polinômios ou series Taylor que são muito fáceis para integrar e resolver analiticamente.
2 pontos

3. (5 Pontos) Experimentos mostram que, num campo de concentrações $C(x,y) = x^3 - 3xy^2$, o fluxo de massa J por difusão é na direção de máximo decréscimo da concentração C ($J=-\nabla C$).

a. Encontre essa direção em geral e num dado ponto P:$(8^{0.5},2^{0.5})$. Esboce a direção num gráfico em P, usando uma seta.
b. Calcule a taxa de variação da concentração em geral, considerando que a taxa pode ser representada como Taxa = $D\nabla^2C$, com D sendo uma constante.

Solução

c. Encontre essa direção em geral e num dado ponto P:$(8^{0.5},2^{0.5})$. Esboce a direção em P, usando uma seta.
$J = -\nabla C = -[3x^2 - 3y^2 , -6xy]^T = -[24-6= 18 , 6*4 = -24]^T = [-18\ 24]^T$

d. Calcule a taxa de variação Taxa = $D\nabla^2C$, com α sendo uma constante.
$Taxa = D\nabla^2C = D\,[6x , -6x)]^T$

4. (15) Dado o problema $y'-3x^2y = -4y^2 + 16$, $y(3) = 7$
   a. Classifique a edo.
   b. Faça a discretização usando o método de Euler progressivo
   c. Descreva um algoritmo para obter a solução numérica deste problema (em palavras, equações e/ou comandos de Matlab/Python)

Solucao

a) Edo1, não linear, não homogêneo, com coeficientes não constantes

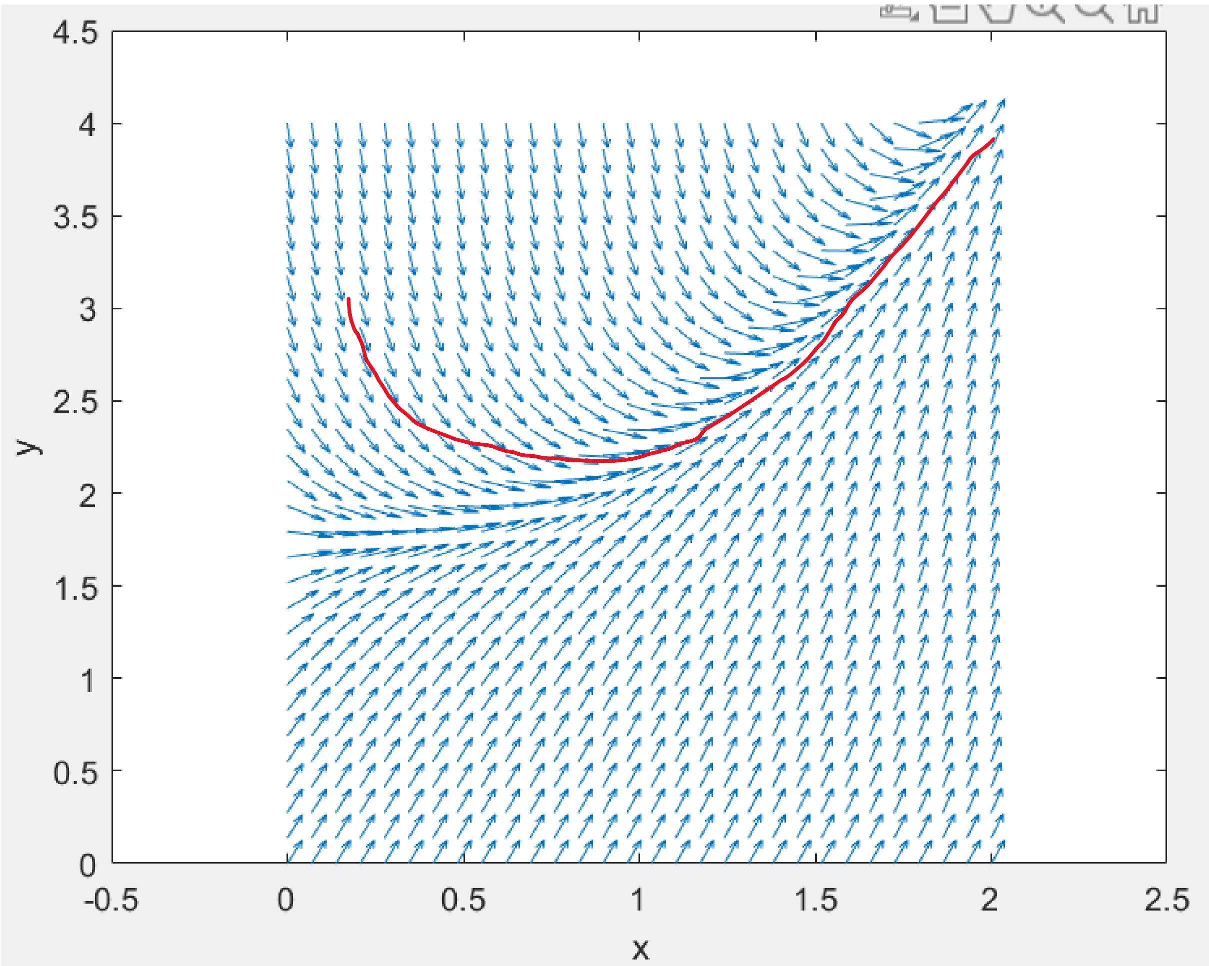
4P

b) $y'-3x^2y = -4y^2 + 16$
$y' = 3x^2y -4y^2 + 16$
$y' \approx (y_{i+1} - y_i)/\Delta x$
$(y_{i+1} - y_i)/\Delta x = 3x_i^2y_i -4y_i^2 + 16$
$y_{i+1} = y_i + (3x_i^2y_i -4y_i^2 + 16)\Delta x$

6P

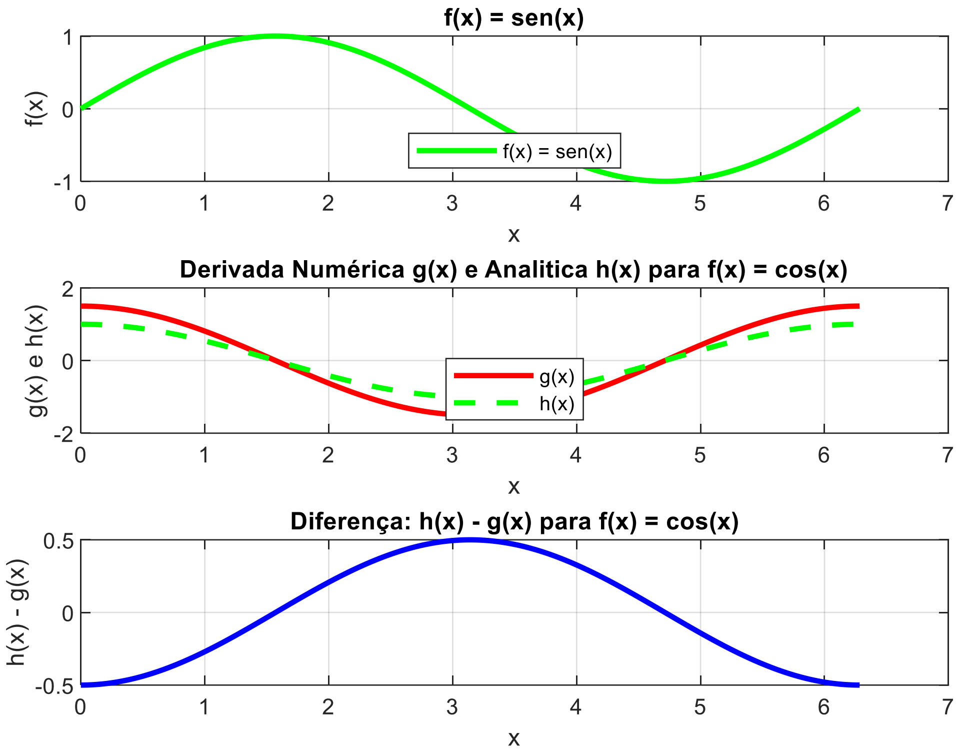
c)
```
dx = 0.1;
x = [3:dx:8.0];
s = zeros(size(x));
s(1) = 7;
for i = 1:(length(x)-1)
s(i+1) = s(i) + dx * (3*x(i)^2*s(i) - 4*s(i)^2 + 16);
end
```
5P

5. (20) Dado o campo direcional da equação $2y'-2x^2y = -2y^2 + x^{1/2} + 6$, $y(0,2) = 3$
   a. trace a solução qualitativamente no próprio gráfico dado abaixo
   b. Classifique a edo (ordem, linearidade, homogeneidade).
   c. Faça a discretização usando o método de Euler regressivo



a. 10P
b. 3P Edo1, não-linear, não homogêneo
c. 7P $y' = x^2y - y^2 + 1/2x^{1/2} + 3$
$(y_{i+1} - y_i)/\Delta x = x_{i+1}^2 y_{i+1} - y_{i+1}^2 + 1/2x_{i+1}^{1/2} + 3$

6. (10P) Dada a função $f(x) = \text{sen } x$ em $0 \leq x \leq 2\Pi$, a função $g(x) = (f(x+0,015) - f(x-0,015))/0,03$ e a função $h(x) = f´(x)$ e os gráficos das mesmas e o gráfico de $h(x)-g(x)$:



a. Descreva a definição formal de f´(x) e discute a diferença entre f´(x) e g(x) em poucas palavras e utilizando o gráfico.
b. Em quais pontos vale f´(x) = g(x).
c. Explique em poucas palavras, porque a diferença h(x) - g(x) varia com x.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

a) 4P g(x) é uma aproximação (função similar, sem limite e com h maior) a derivada num intervalo finito com h = 0,015. A aproximação porém no caso apresentado varia da derivida analítica com erros absolutos menos que 0,5

b) 3P Nos pontos aproximadamente 1,5 e 4,7, pontos com menor inclinação da curva (menor derivada) e assim menor "efeito" da aproximação.

c) 3P As inclinações variam e são estas que foram aproximadas. Maiores erros em regiões com máxima variação (taxa).

7. (25 P) Consideramos um elemento quadrado no plano x-y delimitada pelo dois vetores unitários **i** e **j** e que é transformada de forma que um ponto P:(x_1, x_2) vai até o ponto Q:(y_1, y_2) dado por $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

a. Encontre as direções principais (autovetores).
b. Qual é o angulo entre as direções principais?
c. Que forma assume o quadrado sob essa deformação? Faça um desenho esquemático com o quadrado, os autovetores e a deformação final.
d. A deformação modifique a área do quadrado (justifique e quantifique sua resposta com uma frase)?
e. A deformação mantém o sentido do quadrado? Justifique sua resposta com poucas palavras.
f. Calcule o vetor $\vec{x}$ do qual surgiu o vetor $\vec{y} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$ obrigatoriamente calculando a inversa da Matriz A.

g. Desenha a transformação do vetor da questão f) e do resultado da transformação no esquema da questão c)

h. O vetor $\vec{y} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$ representa uma direcao principal? Justifique sua proposta.

Solução:

a) $(2-\lambda)(2-\lambda)-1=0$

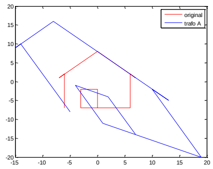
$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$

$\lambda_1 = 3$: $-x_1 - x_2 = 0$; $-x_1 = x_2$; escolhe $x_2 = 1 \rightarrow x_1 = -1$

$\lambda_2 = 1$: $x_1 - x_2 = 0$; $x_1 = x_2$; escolhe $x_2 = 1 \rightarrow x_1 = 1$

b) 5P $autovet_1 * autovet_2 = |autovet_1||autovet_2|\cos(\varphi)$ <=> $(-1+1)/2 = 0 = \cos(\varphi)$ $\rightarrow \varphi = 90°$

c) 

d) det(A) = 4-1 = 3, modifique área três vezes maior

e) Mantem sentido porque det(A) é positivo (porta não muda do lado)

f) 5P $Ax=y$ <=> $x=A^{-1}y$

$A^{-1} = 1/\det(A)[a_{22}\ -a_{12}; -a_{21}\ a_{11}] = [2/3\ 1/3;\ 1/3\ 2/3]$

A^{-1} (0,5;0,5) = (2/3*0,5 + 1/3*0,5; 1/3*0,5+2/3*0,5) = (0,5; 0,5)

g) Figura, estiqua o quadrado na direção 1, - no fator de 3

h) 3P Sim, é autovetor com autovalor 1 A(0,5 0,5)=1(0,5 0,5)