

INTRODUÇÃO  
À  
MECÂNICA DOS FLUIDOS  
E AOS  
FENÔMENOS DE TRANSPORTE

---

**Maurício Gobbi, Ph.D.**  
Universidade Federal do Paraná

**Nelson Luís Dias, Ph.D.**  
Universidade Federal do Paraná



# Prefácio

A área de *Mecânica dos Fluidos* é uma das mais importantes e difíceis na formação de cientistas e engenheiros.

A área de pesquisa e ensino hoje conhecida como *Fenômenos de Transporte* formou-se aos poucos, ao longo do século XX, à medida em que se compreendiam as analogias existentes entre os processos de transporte de quantidade de movimento, energia, e massa, em meios contínuos. A Mecânica dos Fluidos forma a grande base de conhecimento para a compreensão dos Fenômenos de Transporte. Esta visão unificada instalou-se inicialmente nos cursos de engenharia química e mecânica, mas está cada vez mais presente em outros ramos das áreas tecnológicas e científicas.

Este livro nasceu da necessidade de se dotar disciplinas de Mecânica dos Fluidos e/ou Fenômenos de Transporte do curso de engenharia de várias unidades de ensino de terceiro grau do Brasil, de um texto unificado introdutório, rigoroso, e corretamente dimensionado para um curso que compreende um único semestre da disciplina com um mínimo de quatro horas/aula teóricas semanais.

O texto contém os fundamentos matemáticos e físicos dos processos e as abordagens para cada tipo de propriedade transportada foram feitas, na medida do possível, em conjunto, e não em partes distintas como é o caso de vários livros texto sobre o assunto.

Os autores.



# Conteúdo

|                                                                           |            |
|---------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Prefácio</b>                                                           | <b>iii</b> |
| <b>Conteúdo</b>                                                           | <b>v</b>   |
| <b>1 Introdução</b>                                                       | <b>1</b>   |
| 1.1 Apresentação . . . . .                                                | 1          |
| 1.2 O meio contínuo . . . . .                                             | 2          |
| 1.3 Fluidos . . . . .                                                     | 3          |
| 1.4 Princípios fundamentais da física . . . . .                           | 4          |
| 1.5 Sistema de unidades . . . . .                                         | 6          |
| 1.6 Revisão matemática . . . . .                                          | 7          |
| 1.6.1 Escalares, vetores, e tensores . . . . .                            | 7          |
| 1.6.2 Produtos escalares e vetoriais, contrações entre tensores . . . . . | 8          |
| 1.6.3 Integral de linha, de superfície, e de volume . . . . .             | 10         |
| 1.6.4 Campos escalares e vetoriais . . . . .                              | 13         |
| 1.6.5 Teoremas de Gauss, Stokes, e Green . . . . .                        | 15         |
| 1.6.6 A série de Taylor . . . . .                                         | 16         |
| <b>2 Elementos de Teoria Cinética e Termodinâmica Clássica</b>            | <b>19</b>  |
| 2.1 O potencial de Lennard-Jones . . . . .                                | 19         |
| 2.2 Energia de um sistema de partículas . . . . .                         | 21         |
| 2.3 Temperatura . . . . .                                                 | 24         |
| 2.4 A primeira lei da termodinâmica . . . . .                             | 24         |
| 2.5 A energia interna é função da temperatura e do volume . . . . .       | 26         |
| 2.5.1 Entalpia . . . . .                                                  | 28         |
| 2.6 A equação de estado de um gás ideal . . . . .                         | 29         |
| 2.7 Equações de estado . . . . .                                          | 32         |
| 2.8 Entropia e a segunda lei da termodinâmica . . . . .                   | 32         |
| 2.8.1 A segunda lei da termodinâmica . . . . .                            | 35         |
| 2.9 Problemas propostos . . . . .                                         | 36         |

|          |                                                    |           |
|----------|----------------------------------------------------|-----------|
| <b>3</b> | <b>Descrição do Meio Contínuo</b>                  | <b>39</b> |
| 3.1      | Introdução . . . . .                               | 39        |
| 3.2      | A hipótese do contínuo . . . . .                   | 40        |
| 3.3      | Difusão e advecção . . . . .                       | 42        |
| 3.4      | Descrições de Euler e de Lagrange . . . . .        | 43        |
| 3.4.1    | Linha e tubo de corrente . . . . .                 | 44        |
| 3.5      | Propriedades intensivas e extensivas . . . . .     | 46        |
| 3.6      | Fluxo e fluxo específico advectivo . . . . .       | 48        |
| 3.7      | Problemas propostos . . . . .                      | 50        |
| <b>4</b> | <b>Forças e Tensões num Fluido - Hidrostática</b>  | <b>55</b> |
| 4.1      | Forças de corpo . . . . .                          | 55        |
| 4.2      | Forças de superfície . . . . .                     | 55        |
| 4.2.1    | O tensor de tensões . . . . .                      | 57        |
| 4.2.2    | Pressão . . . . .                                  | 61        |
| 4.2.3    | Tensão superficial . . . . .                       | 62        |
| 4.3      | Hidrostática . . . . .                             | 63        |
| 4.4      | Problemas propostos . . . . .                      | 71        |
| <b>5</b> | <b>Movimento Relativo Em Um Fluido: Cinemática</b> | <b>83</b> |
| 5.1      | Taxa de deformação de um fluido . . . . .          | 83        |
| 5.1.1    | Deformação linear . . . . .                        | 83        |
| 5.1.2    | Deformação de cisalhamento . . . . .               | 85        |
| 5.2      | Rotação de um fluido: vorticidade . . . . .        | 88        |
| 5.2.1    | Linha e tubo de vorticidade . . . . .              | 88        |
| 5.3      | Movimento relativo . . . . .                       | 89        |
| 5.4      | Circulação . . . . .                               | 91        |
| 5.5      | Problemas propostos . . . . .                      | 94        |
| <b>6</b> | <b>Fluxos Difusivos: Equações Constitutivas</b>    | <b>97</b> |
| 6.1      | Transferência de quantidade de movimento . . . . . | 97        |
| 6.1.1    | Fluidos newtonianos e não-newtonianos . . . . .    | 105       |
| 6.1.2    | A viscosidade como função da temperatura . . . . . | 105       |
| 6.2      | Transferência de calor . . . . .                   | 106       |
| 6.2.1    | Lei de Fourier para a condução de calor . . . . .  | 106       |
| 6.3      | Transferência de massa . . . . .                   | 108       |
| 6.3.1    | Lei de Fick para difusão molecular . . . . .       | 108       |
| 6.4      | Fluxos difusivos e advectivos combinados . . . . . | 111       |
| 6.5      | A segunda lei da termodinâmica . . . . .           | 112       |
| 6.6      | Problemas propostos . . . . .                      | 113       |

|          |                                                                                       |            |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>7</b> | <b>Princípios de Conservação: Equações Integrais</b>                                  | <b>115</b> |
| 7.1      | Princípios básicos de conservação . . . . .                                           | 115        |
| 7.2      | Teorema do transporte de Reynolds . . . . .                                           | 118        |
| 7.3      | Balanco de massa . . . . .                                                            | 122        |
| 7.4      | Balanco de massa de um soluto . . . . .                                               | 130        |
| 7.5      | Balanco de quantidade de movimento . . . . .                                          | 134        |
| 7.6      | Balanco de energia . . . . .                                                          | 143        |
| 7.7      | A equação de Bernoulli . . . . .                                                      | 150        |
| 7.8      | A equação de Bernoulli e o balanço de energia . . . . .                               | 153        |
| 7.9      | Problemas propostos . . . . .                                                         | 155        |
| <b>8</b> | <b>Princípios de Conservação: Equações Diferenciais</b>                               | <b>165</b> |
| 8.1      | Introdução . . . . .                                                                  | 165        |
| 8.2      | Fluxos difusivos e equações integrais . . . . .                                       | 166        |
| 8.3      | A derivada material de uma propriedade intensiva . . . . .                            | 167        |
| 8.4      | Conservação da massa . . . . .                                                        | 168        |
| 8.5      | Conservação da massa de um soluto . . . . .                                           | 169        |
| 8.6      | Conservação da quantidade de movimento . . . . .                                      | 171        |
| 8.6.1    | Equação de Navier-Stokes . . . . .                                                    | 172        |
| 8.7      | Conservação da energia . . . . .                                                      | 174        |
| 8.7.1    | Energia mecânica e energia térmica . . . . .                                          | 174        |
| 8.8      | Aspectos das equações de conservação . . . . .                                        | 176        |
| 8.9      | Condições de contorno . . . . .                                                       | 177        |
| 8.9.1    | Superfície sólida . . . . .                                                           | 177        |
| 8.9.2    | Superfície livre de um líquido . . . . .                                              | 179        |
| 8.9.3    | Interface entre dois fluidos . . . . .                                                | 180        |
| 8.9.4    | Condições de entrada e saída . . . . .                                                | 181        |
| 8.10     | Equações em coordenadas curvilíneas . . . . .                                         | 181        |
| 8.10.1   | Coordenadas cilíndricas . . . . .                                                     | 182        |
| 8.10.2   | Coordenadas esféricas . . . . .                                                       | 183        |
| 8.11     | Soluções das equações de conservação . . . . .                                        | 186        |
| 8.11.1   | Escoamento permanente entre placas paralelas . . . . .                                | 186        |
| 8.11.2   | Fluido em rotação uniforme . . . . .                                                  | 188        |
| 8.11.3   | Difusão pura em material semi-infinito . . . . .                                      | 190        |
| 8.11.4   | Escoamento transiente em fluido semi-infinito - primeiro problema de Stokes . . . . . | 192        |
| 8.11.5   | Escoamento oscilatório em fluido semi-infinito - segundo problema de Stokes . . . . . | 194        |
| 8.11.6   | Escoamento laminar em plano inclinado . . . . .                                       | 195        |
| 8.11.7   | Condução de calor . . . . .                                                           | 197        |
| 8.12     | Problemas propostos . . . . .                                                         | 198        |

|          |                                                            |            |
|----------|------------------------------------------------------------|------------|
| <b>9</b> | <b>Análise Dimensional e Similaridade</b>                  | <b>201</b> |
| 9.1      | Introdução . . . . .                                       | 201        |
| 9.1.1    | Similaridade geométrica . . . . .                          | 201        |
| 9.1.2    | Similaridade para além da geometria . . . . .              | 202        |
| 9.1.3    | Grandezas fundamentais e grandezas derivadas . . . . .     | 205        |
| 9.2      | Teorema de Buckingham dos $\Pi$ 's adimensionais . . . . . | 207        |
| 9.3      | Exemplos de aplicação do teorema de Buckingham . . . . .   | 212        |
| 9.3.1    | Força de arrasto entre fluido e sólido . . . . .           | 212        |
| 9.3.2    | Efeito capilar em meio poroso . . . . .                    | 215        |
| 9.3.3    | Velocidade de um tsunami . . . . .                         | 216        |
| 9.3.4    | Velocidade do som . . . . .                                | 217        |
| 9.3.5    | Hidrostática . . . . .                                     | 217        |
| 9.4      | Adimensionalização de equações . . . . .                   | 218        |
| 9.4.1    | O primeiro problema de Stokes revisitado . . . . .         | 218        |
| 9.4.2    | Incompressibilidade . . . . .                              | 220        |
| 9.4.3    | Equação de Euler . . . . .                                 | 222        |
| 9.5      | Problemas propostos . . . . .                              | 223        |
|          | <b>Índice</b>                                              | <b>226</b> |

## CAPÍTULO 1

# INTRODUÇÃO

Este capítulo introduz os conceitos de meio contínuo e de fluido, apresenta as leis fundamentais da física e um sistema consistente de unidades (SI) das principais grandezas que aparecem ao longo do livro. No final do capítulo, uma breve revisão de alguns conceitos matemáticos é apresentada.

### 1.1 APRESENTAÇÃO

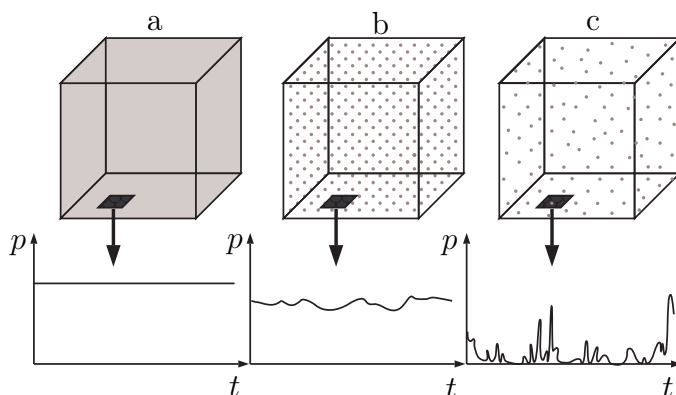
Na natureza, assim como em sistemas projetados pelo homem, uma grande quantidade de fenômenos físicos ocorrem continuamente. O sucesso em se prever ou simular quantitativamente o comportamento de um determinado meio depende de nossa capacidade de formular modelos matemáticos dos seus fenômenos físicos mais importantes. É útil considerar um fenômeno físico como um processo a que um determinado sistema bem identificado é submetido, ou seja, como uma sequência de transformações no estado do sistema. Por estado do sistema entende-se o conjunto de suas propriedades físicas, tais como: massa, volume, pressão, temperatura, constituição química, etc.. Em mecânica dos fluidos e fenômenos de transferência estuda-se os processos por meio dos quais três propriedades físicas fundamentais são transportadas de um ponto a outro do espaço: massa, quantidade de movimento, e energia. Os meios físicos onde tais processos ocorrem serão supostos contínuos, ou seja, há uma distribuição contínua de matéria onde pode-se definir as propriedades do meio como funções matemáticas contínuas do espaço tridimensional  $(x, y, z)$  e do tempo  $t$ . Por exemplo, a massa do meio será representada através da função contínua massa específica  $\rho(x, y, z, t)$ , no lugar de moléculas e espaços vazios. A *hipótese do contínuo* é válida se as escalas

de comprimento relevantes no processo físico em questão forem várias ordens de magnitude maiores que o espaçamento médio entre as moléculas no meio. Na próxima seção discute-se com mais detalhe tal hipótese. Uma das mais importantes hipóteses feitas em fenômenos de transferência é a de que os processos físicos procedem na direção do equilíbrio, ou seja: que o sentido dos processos obedece à *segunda lei da termodinâmica*. A todo processo físico estão associadas diferenças de concentração (de um soluto), temperatura (energia), ou quantidade de movimento que, por sua vez, dão origem a fluxos dessas quantidades em direção ao equilíbrio. Muitos fenômenos e problemas podem ser enquadrados como objetos de estudo da mecânica dos fluidos e de fenômenos de transferência. Como motivação, aqui estão alguns exemplos de interesse em engenharia:

- o escoamento de todo e qualquer fluido, tais como água em rios, canais, tubulações, ou gases em condutos ou na atmosfera;
- o aquecimento da atmosfera durante o dia provocado pela radiação solar;
- a refrigeração a água de um motor;
- a lubrificação a óleo de um sistema mecânico;
- a dispersão de um poluente lançado num rio, lagoa, mar ou na atmosfera.

## 1.2 O MEIO CONTÍNUO

O comportamento da matéria, seja ela sólida ou fluida, está diretamente associado ao comportamento das moléculas que a constituem. Em geral, o número de moléculas por unidade de volume de matéria é enorme. Por exemplo, o número de moléculas em um centímetro cúbico de ar é da ordem de  $10^{19}$ . Se você decidisse contar o número de moléculas nesse pequeno volume a uma razão de uma molécula por segundo, ao final de 20 vezes a idade do universo, você não teria terminado! Obviamente, tentar compreender um sistema através da descrição de cada molécula individualmente é algo simplesmente impossível. Assim sendo, na melhor das hipóteses, os estudos são feitos em termos estatísticos pela chamada *mecânica estatística*. Alternativamente, pode-se propor uma abordagem macroscópica da matéria, e se torna conveniente pensar em termos de uma distribuição espacial contínua de massa, ou seja, de um *meio contínuo*. Conforme já mencionado anteriormente, o contínuo é um modelo válido desde que a menor escala de interesse



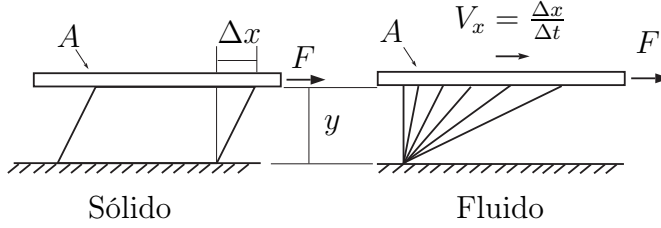
**Figura 1.1:** Limite de validade da hipótese do contínuo numa câmara com um gás progressivamente evacuada.

no problema em questão seja muito maior que as escalas moleculares. Assim, quando se refere a propriedades em um *ponto* no meio contínuo, na verdade está se considerando a média estatística do efeito de um grande número de moléculas em torno deste ponto. Como exemplo, considere o registro de um sensor de pressão em um câmara contendo gás. Na figura 1.1 estão indicadas três situações. Na situação (a), existe um grande número de moléculas na câmara, de modo que o registro de pressão no sensor em função do tempo é praticamente constante. Na situação (b), retira-se gás da câmara até um ponto em que pode-se perceber o efeito do bombardeio individual das moléculas sobre o sensor. Finalmente, em (c), o número de moléculas na câmara é tão pequeno que o registro se torna errático, em função dos choques apenas eventuais das moléculas de gás.

### 1.3 FLUIDOS

Inúmeros pesquisadores já propuseram várias definições do que seja um fluido, nas mais diversas situações. Esta é uma tarefa difícil na medida em que os materiais que denominamos genericamente de fluidos tem seu comportamento associado a um grande número de variáveis, e que nem sempre é possível distinguir claramente a fronteira entre os sólidos e fluidos. Para os objetivos do presente texto, define-se fluido da seguinte forma:

*Um material é dito fluido quando se deforma indefinidamente ao ser submetido a uma tensão (tangencial) de cisalhamento, por*



**Figura 1.2:** Diferença entre sólidos e líquidos em termos de deformação e taxa de deformação.

*menor que ela seja.*

A figura 1.2 ilustra a definição acima. Um material é colocado entre uma placa horizontal de área  $A$  e um plano horizontal em repouso. Ao se aplicar uma força tangencial  $F$  sobre a placa, a tensão tangencial aplicada sobre o material é  $F/A$ . Um sólido sofrerá uma deformação finita, e uma força elástica restauradora aparecerá sobre a placa, equilibrando  $F$ . Já um fluido se deformará continuamente enquanto  $F$  estiver aplicada. No primeiro caso, a força com que o sólido resiste ao esforço da placa é proporcional à própria deformação sofrida. Em termos das definições da figura 1.2:

$$\frac{F}{A} = k \frac{\Delta x}{y}, \quad (1.1)$$

enquanto que, no caso de um fluido, a força será proporcional à sua taxa de deformação:

$$\frac{F}{A} = k \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{1}{y} = \frac{V_x}{y}, \quad (1.2)$$

Eis neste exemplo uma diferença fundamental entre a mecânica dos sólidos e a mecânica dos fluidos: enquanto na primeira quer-se resolver as deformações (que se traduzem em deslocamentos), na segunda o enfoque é resolver-se as taxas de deformação (que se traduzem em velocidades).

## 1.4 PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS DA FÍSICA

Os princípios fundamentais que serão adotados como leis que governam todos os fenômenos físicos de relevância neste livro são:

1. conservação da massa;

2. conservação da quantidade de movimento e de quantidade de movimento angular;
3. conservação da energia;
4. conservação ou aumento da entropia.

O item (1) dispensa comentários; o item (2) trata-se dos princípios de conservação da mecânica newtoniana; o item (3) em sua forma mais geral é a primeira lei da termodinâmica; e o item (4) é a segunda lei da termodinâmica. As leis da conservação da quantidade de movimento linear e angular só são independentes uma da outra quando há rotação intrínseca de uma ou mais partículas constituindo um sistema, que não é o caso em mecânica dos sólidos e fluidos. A lei (4) merece uma pequena digressão, já que ela aparece implicitamente nos modelos e não na forma de uma ou mais equações como nos itens (1) a (3). A segunda lei da termodinâmica diz simplesmente que todo sistema caminha naturalmente no sentido da eliminação das diferenças, para o equilíbrio. Dois corpos com temperaturas distintas colocados em contato um com o outro irão tender a uma temperatura de equilíbrio. Um cubo de açúcar colocado em uma xícara de café irá se dissolver e o açúcar tenderá a se distribuir no café. Mais que isso, a segunda lei diz que jamais o açúcar irá se reagrupar e formar um cubo, ou que os dois corpos retomarão temperaturas distintas. Frequentemente a segunda lei é enunciada dizendo que há sempre um aumento da *desorganização* ou *desordem* do sistema. Essa forma de enunciar a segunda lei frequentemente causa confusões que o exemplo a seguir tenta elucidar: considere um pêndulo num recipiente fechado e isolado contendo um certo fluido a uma certa temperatura  $T_1$ . Considere também que o pêndulo oscila inicialmente com uma certa energia mecânica (potencial+cinética). Pela experiência sabe-se que a viscosidade do fluido fará com que em algum instante toda a energia mecânica inicialmente no pêndulo desapareça. Essa energia mecânica (o vai-e-vem do pêndulo) terá sido transformada em energia térmica (agitação microscópica das moléculas), aumentando a temperatura do sistema para  $T_2$ . Quando se fala em um aumento na desordem do sistema o que se quer dizer é que a energia inicialmente organizada do pêndulo (as partículas do pêndulo se movem em conjunto de forma ordenada) se transformou em energia desorganizada do sistema (agitação aparentemente aleatória das moléculas traduzindo-se macroscopicamente em aumento da temperatura). Mais uma vez, a segunda lei garante que se a condição inicial for o pêndulo parado num sistema com temperatura  $T_2$ , jamais o sistema se arrefecerá cedendo a sua energia térmica para o pêndulo ganhar energia mecânica (note que nesse caso a energia se conservaria). A variável termodinâmica associada à desordem dos sistemas é

chamada de *entropia*, portanto, a entropia de um sistema isolado sempre aumenta, ou, no mínimo, permanece constante. Na realidade, a segunda lei da termodinâmica está tão presente no dia-a-dia dos seres humanos que pode-se dizer que ela é a mais intuitiva e a mais facilmente assimilável de todas as leis da física. Adiantando um pouco o que será introduzido em capítulos futuros, para atender à segunda lei nas modelações matemáticas dos processos físicos, basta que se adote valores positivos para os coeficientes de difusão molecular, condutividade térmica, e viscosidade.

## 1.5 SISTEMA DE UNIDADES

O termo dimensão é utilizado em referência a qualquer grandeza mensurável, como comprimento, tempo, temperatura, etc.. As grandezas mensuráveis em geral são divididas em dois grupos:

- grandezas fundamentais: são aquelas para as quais se estabelecem escalas arbitrárias de medida;
- grandezas derivadas: são aquelas para as quais as dimensões são expressas em termos das grandezas fundamentais.

Em fenômenos de transferência as grandezas fundamentais empregadas são:

- massa de cada componente do sistema ( $M$ );
- comprimento ( $L$ );
- tempo ( $T$ );
- temperatura ( $\Theta$ ).

Os símbolos entre parênteses *não* se tratam das unidades, mas sim de uma abreviação usualmente utilizada para indicar a grandeza em si. Neste texto, as unidades adotadas serão exclusivamente as do sistema internacional de unidades (SI). As tabelas 1.1 e 1.2 mostram as unidades SI das grandezas fundamentais e daquelas definidas a partir das mesmas, utilizadas neste texto. Algumas grandezas como velocidade ( $LT^{-1}$ ), aceleração ( $LT^{-2}$ ), etc. não possuem unidades com nomes padrão no SI, como é o caso, por exemplo, da unidade *não*-SI de velocidade *nó*, utilizada em navegação.

**Tabela 1.1:** Grandezas fundamentais do SI.

| Grandeza    | Unidade    | Símbolo |
|-------------|------------|---------|
| Massa       | Quilograma | kg      |
| Comprimento | Metro      | m       |
| Tempo       | Segundo    | s       |
| Temperatura | Kelvin     | K       |

**Tabela 1.2:** Grandezas derivadas do SI.

| Grandeza | Unidade | Símbolo | Fórmula                          |
|----------|---------|---------|----------------------------------|
| Força    | Newton  | N       | $\text{kg m s}^{-2}$             |
| Energia  | Joule   | J       | $\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$    |
| Potência | Watt    | W       | $\text{kg m}^2 \text{s}^{-3}$    |
| Pressão  | Pascal  | Pa      | $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$ |

## 1.6 REVISÃO MATEMÁTICA

Uma base sólida de matemática (cálculo diferencial e integral, álgebra vetorial e tensorial, etc.) é fundamental para a compreensão dos conceitos em fenômenos de transferência. Nesta seção é apresentada de forma bastante breve uma revisão de alguns conceitos da parte mais avançada da matemática utilizada neste texto. O leitor com base matemática mais fraca deve procurar livros texto sobre os assuntos específicos.

### 1.6.1 ESCALARES, VETORES, E TENSORES

Considere três tipos de grandeza como funções contínuas do espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$  (elas podem também ser função do tempo, mas a dependência temporal é irrelevante para as considerações desta seção) com coordenadas cartesianas  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  cujos vetores unitários canônicos são  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ :

$$\phi = \phi(x, y, z), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z), \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}(x, y, z). \quad (1.3)$$

$\phi$  é um escalar, ou seja, é definido por uma componente apenas;  $\mathbf{v}$  é um vetor no espaço  $\mathbb{R}^3$ , e  $\mathbf{T}$  é uma matriz  $3 \times 3$  (também chamada de tensor de ordem 2 no espaço  $\mathbb{R}^3$ , ou simplesmente tensor) com nove componentes. No capítulo 3 serão definidas grandezas físicas tensoriais do tipo  $\mathbf{T}$ , por agora

admita que  $\mathbf{T}$  é nada mais que uma matriz. Em coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z), \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

onde, obviamente, cada componente de  $\mathbf{v}$  e de  $\mathbf{T}$  é um escalar e é função de  $(x, y, z)$ .

### 1.6.2 PRODUTOS ESCALARES E VETORIAIS, CONTRAÇÕES ENTRE TENSORES

#### *Produto escalar*

O produto escalar (também chamado de produto interno) entre dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  em coordenadas cartesianas é definido por:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z. \quad (1.5)$$

Claramente, o resultado da expressão acima é um escalar. O produto escalar pode ter a seguinte interpretação geométrica: o seu resultado é o produto entre o módulo de  $\mathbf{v}$ ,  $\|\mathbf{v}\| = v^1$ , e a projeção de  $\mathbf{u}$  na direção de  $\mathbf{v}$ , ou vice-versa. No caso particular em que  $\mathbf{v}$  é um vetor unitário, ou seja,  $\|\mathbf{v}\| = 1$ , o produto interno acima é simplesmente o valor da projeção de  $\mathbf{u}$  na direção de  $\mathbf{v}$ . No caso em que se conhece o ângulo  $\theta \leq \pi$  entre os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , o produto interno pode ser calculado como  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$ . No caso em que pelo menos um dos vetores seja nulo,  $\theta$  não está definido e o produto interno é simplesmente tomado como igual a zero, por definição. Fica claro portanto que se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores perpendiculares, o produto interno entre eles é nulo, e quando os dois vetores são colineares o produto interno é igual a  $\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$  se os vetores tiverem o mesmo sentido, e  $-\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$  se tiverem sentidos opostos. Outro resultado particular importante é o seguinte:  $\|\mathbf{u}\|^2 = u^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ . Finalmente, note que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ .

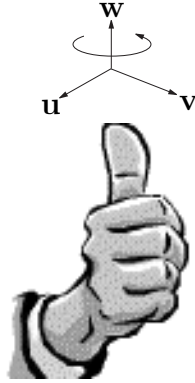
#### *Produto vetorial*

O produto vetorial entre dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  tem como resultado um vetor  $\mathbf{w}$  cujas componentes são dadas em coordenadas cartesianas em termos das componentes de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  por:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x). \quad (1.6)$$

---

<sup>1</sup>Barras verticais duplas como  $\|\mathbf{v}\|$  denotam módulo de um vetor, enquanto barras verticais simples irão denotar valor absoluto de um escalar, ou, quando aplicadas a uma matriz quadrada, denotará o seu determinante.



**Figura 1.3:** Regra da mão direita para determinar o sentido do produto vetorial  $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ .

O módulo de  $\mathbf{w}$  é igual à área do paralelogramo cujos lados são os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ . A direção de  $\mathbf{w}$  é perpendicular ao plano definido por  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , e o sentido é dado pela regra da mão direita (figura 1.3). Note que, por definição,  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ . Note também que a expressão (1.6) pode ser calculada como o determinante:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}. \quad (1.7)$$

### *Produtos envolvendo tensores - contrações*

Define-se o seguinte produto (*contração*) entre um tensor  $\mathbf{T}$  e um vetor  $\mathbf{v}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \\ &= (T_{xx}v_x + T_{xy}v_y + T_{xz}v_z)\mathbf{e}_x + (T_{yx}v_x + T_{yy}v_y + T_{yz}v_z)\mathbf{e}_y \\ &+ (T_{zx}v_x + T_{zy}v_y + T_{zz}v_z)\mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Note que o resultado da operação acima é um vetor. A contração entre dois tensores  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{D}$  cujo resultado é um novo tensor, é definida por:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^3 T_{1j} D_{j1} & \sum_{j=1}^3 T_{1j} D_{j2} & \sum_{j=1}^3 T_{1j} D_{j3} \\ \sum_{j=1}^3 T_{2j} D_{j1} & \sum_{j=1}^3 T_{2j} D_{j2} & \sum_{j=1}^3 T_{2j} D_{j3} \\ \sum_{j=1}^3 T_{3j} D_{j1} & \sum_{j=1}^3 T_{3j} D_{j2} & \sum_{j=1}^3 T_{3j} D_{j3} \end{bmatrix}, \quad (1.9)\end{aligned}$$

onde se utilizou índices  $i, j (= 1, 2, 3)$  em  $\mathbf{T}_{ij}$  no lugar de  $(x, y, z)$  em  $\mathbf{T}_{xx}$ ,  $\mathbf{T}_{xy}$ , etc. para abreviar a notação através da utilização do somatório. A contração dupla entre dois tensores  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{D}$  resulta em um escalar e é definida por:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} : \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{bmatrix} \\ &= T_{xx}D_{xx} + T_{xy}D_{yx} + T_{xz}D_{zx} + T_{yx}D_{xy} + \\ &\quad + T_{yy}D_{yy} + T_{yz}D_{zy} + T_{zx}D_{xz} + T_{zy}D_{yz} + T_{zz}D_{zz}. \quad (1.10)\end{aligned}$$

### 1.6.3 INTEGRAL DE LINHA, DE SUPERFÍCIE, E DE VOLUME

No caso geral, o cálculo de uma integral de linha (integral simples), de superfície (integral dupla), ou de volume (integral tripla) pode ser bastante complicado devido à dificuldade de se identificar o domínio de integração e seu contorno em termos das coordenadas que se tem em mãos. Por exemplo, em coordenadas cartesianas é bastante complicado o cálculo da área da superfície de uma esfera, ou a massa de uma esfera cuja densidade diminui ao se afastar do centro. Nestes dois casos particulares é interessante se trabalhar transformando as coordenadas cartesianas em coordenadas polares esféricas, para que o contorno da esfera se torne uma superfície com uma das coordenadas constantes enquanto as outras variam (se a esfera está centralizada em  $(0, 0, 0)$  esta coordenada seria o vetor distância do centro e o contorno seria definido pelo raio da esfera). No caso geral, estas transformações de coordenadas nada mais são do que parametrizações das coordenadas originais em termos de novas variáveis independentes. A seguir, apresenta-se as integrais de linha, de superfície, e de volume, e como usar parametrizações de coordenadas para facilitar seus cálculos.

**Integral de linha**

Considere uma função escalar no espaço  $\mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y, z)$ . Considere agora uma linha (que pode ser curva)  $\mathcal{C}$  no espaço  $\mathbb{R}^3$  ao longo da qual  $f$  é uma função bem comportada. A integral de linha de  $f$  ao longo de  $\mathcal{C}$  é definida por:

$$I_l = \int_{\mathcal{C}} f dl, \quad (1.11)$$

onde  $dl$  é um comprimento elementar ao longo da linha  $\mathcal{C}$ . Repare que se  $f = 1$ , a integral de linha é simplesmente o comprimento da mesma. A linha  $\mathcal{C}$  pode ou não ser fechada (quando sim, geralmente se denota a integral por  $\oint$ ). De modo geral, cada ponto da linha pode ser identificado por seu vetor posição  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Este vetor posição pode ser parametrizado em termos do parâmetro  $\tau$ :

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau), \quad z = z(\tau), \quad a \leq \tau \leq b, \quad (1.12)$$

ou seja, à medida que se varia  $\tau$  de  $a$  para  $b$ , percorre-se a linha do seu início  $(x(a), y(a), z(a))$  até o seu fim  $(x(b), y(b), z(b))$ . Caso a linha seja fechada, então  $(x(a), y(a), z(a)) = (x(b), y(b), z(b))$ . Então, a integral de linha pode ser escrita como:

$$\int_{\mathcal{C}} f dl = \int_a^b f(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \frac{dl}{d\tau} d\tau, \quad (1.13)$$

onde pode-se mostrar que

$$\frac{dl}{d\tau} = \left( \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right)^{1/2}. \quad (1.14)$$

Note o produto escalar na expressão acima. Integrais de linha aparecem também na forma:

$$I_l = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.15)$$

onde  $\mathbf{r}$  é ainda o vetor posição ao longo de  $\mathcal{C}$ , mas  $f dl$  é substituído pelo produto escalar  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ . Repare que  $d\mathbf{r}$  é um vetor elementar ao longo de  $\mathcal{C}$  (ao passo que  $dl$  era um comprimento elementar e portanto não possuía orientação). Por isso, na forma (1.15), a integral de linha troca de sinal ao se trocar o sentido para o qual se move em  $\mathcal{C}$ .

**Integral de superfície**

Na seção anterior foi visto como a parametrização das coordenadas  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  com um único parâmetro (no caso  $\tau$ ) fornece uma linha no espaço

$\mathbb{R}^3$ . Similarmente, parametrizando o vetor posição  $\mathbf{r}$  com dois parâmetros, fornece uma superfície  $\mathcal{S}$  (que pode ser curva) no espaço:

$$x = x(p, q), \quad y = y(p, q), \quad z = z(p, q). \quad (1.16)$$

Imagine que se mantenha  $p$  constante. Ao variar-se  $q$  obtém-se uma linha da mesma forma que na seção anterior. Para vários  $p$ 's, portanto, obtém-se uma família de linhas (uma para cada  $p$ ) que forma uma superfície. A integral de superfície de  $f$  em  $\mathcal{S}$  é definida como a seguinte integral sobre todo o domínio de integração  $\mathcal{S}$ :

$$I_s = \int_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dS, \quad (1.17)$$

onde  $dS$  é um elemento de área. Repare que se  $f = 1$ , a integral acima é simplesmente a área da superfície. É fácil mostrar que, em termos de  $(p, q)$ , a integral de superfície acima pode ser calculada como a seguinte integral dupla:

$$\int_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dS = \int_{\mathcal{S}} f(x(p, q), y(p, q), z(p, q)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} \right\| dp dq. \quad (1.18)$$

Repare o produto vetorial na expressão de  $dS$ . A região de integração  $\mathcal{S}$  nas variáveis  $(p, q)$  da expressão acima, é região que mapeia a superfície  $\mathcal{S}$ , ou seja, para cada par  $(p, q)$ , tem-se um ponto no espaço  $(x, y, z)$  sobre  $\mathcal{S}$ .

### *Integral de volume*

De forma absolutamente análoga às integrais de linha e de superfície, a integral de volume de uma função  $f$  em um volume  $\mathcal{V}$  é definida por:

$$I_v = \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dV, \quad (1.19)$$

onde  $dV$  é um volume elementar. Se  $f = 1$  a integral acima é o volume total  $\mathcal{V}$ . Se  $f$  é por exemplo a massa específica de um material ocupando  $\mathcal{V}$ , então a integral é a massa total de  $\mathcal{V}$ . Parametrizando  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  em termos de três parâmetros  $(\alpha, \beta, \gamma)$  tem-se:

$$x = x(\alpha, \beta, \gamma), \quad y = y(\alpha, \beta, \gamma), \quad z = z(\alpha, \beta, \gamma). \quad (1.20)$$

Pode-se demonstrar que o volume elementar em termos das novas coordenadas  $(\alpha, \beta, \gamma)$  é igual a

$$dV = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma} \right| d\alpha d\beta d\gamma, \quad (1.21)$$

e a integral de volume fica

$$\int_V f(x(\alpha, \beta, \gamma), y(\alpha, \beta, \gamma), z(\alpha, \beta, \gamma)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma} \right| d\alpha d\beta d\gamma. \quad (1.22)$$

$V$  é a região do sistema de coordenadas  $(\alpha, \beta, \gamma)$  correspondente a  $\mathcal{V}$ .

#### 1.6.4 CAMPOS ESCALARES E VETORIAIS

Quando uma grandeza está definida em todos os pontos de uma região  $\mathcal{R}$  do espaço  $\mathbb{R}^3$  diz-se que naquela região há um *campo*. Se a grandeza for um escalar (por exemplo a temperatura do ar) diz-se que há um *campo escalar*. Se a grandeza for um vetor (por exemplo a aceleração da gravidade no entorno da terra), diz-se que há um *campo vetorial*. Obviamente, vários campos escalares e campos vetoriais podem coexistir na mesma região. Nesta seção é apresentada uma série de conceitos relacionados a tais tipos de campos.

##### A divergência

Considere um ponto  $P = (x, y, z)$  num campo vetorial  $\mathbf{v}$  em torno do qual há uma região  $\mathcal{R}$  (de volume  $\mathcal{V}$ ) cujo contorno é a superfície  $\mathcal{S}$  (não importa muito aqui qual é a forma desta região). Considere a seguinte integral de superfície:  $\int_{\mathcal{S}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS$ , onde  $dS$  é o elemento de integração da área  $\mathcal{S}$  e  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal a  $dS$  (note que  $\|\mathbf{n}\| = 1$  constante mas, sua direção e sentido são funções de  $(x, y, z)$ ). Define-se o divergente do vetor  $\mathbf{v}$ ,  $\text{div } \mathbf{v}$ , no ponto  $P$  como:

$$\text{div } \mathbf{v} = \lim_{\mathcal{R} \rightarrow 0} \left[ \frac{\int_{\mathcal{S}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS}{V} \right], \quad (1.23)$$

onde  $\mathcal{R} \rightarrow 0$  significa que a região  $\mathcal{R}$  tende ao ponto  $P$ , no sentido que a dimensão máxima de  $\mathcal{R}$  tende a zero enquanto  $\mathcal{R}$  contém  $P$ . Pode-se demonstrar facilmente que no caso de coordenadas cartesianas:

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (1.24)$$

Considere agora o operador diferencial vetorial (às vezes chamado de operador gradiente) definido por:

$$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z). \quad (1.25)$$

Utilizando a notação do produto escalar, define-se o divergente em termos do operador  $\nabla$ :

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (1.26)$$

Repare que como  $\nabla$  é um operador diferencial vetorial (isto é, um operador com três componentes), e não um vetor, então  $\nabla \cdot \mathbf{v} \neq \mathbf{v} \cdot \nabla$ . Na realidade,  $\mathbf{v} \cdot \nabla$  é definido como o seguinte operador diferencial escalar:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.27)$$

O significado físico do divergente de um vetor ficará claro oportunamente. É comum se usar a notação do divergente ( $\nabla \cdot$ ) aplicada a um tensor  $\mathbf{T}$ . A operação que resulta em um vetor é definida em coordenadas cartesianas por:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} = & \left( \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_y + \\ & \left( \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (1.28)$$

### *O gradiente*

O gradiente do escalar  $\phi(x, y, z)$  é o vetor definido por (em coordenadas cartesianas):

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right). \quad (1.29)$$

Se  $\phi$  é uma função suave do espaço tridimensional, é possível construir-se (iso-)superfícies curvas bi-dimensionais nas quais o valor de  $\phi$  é constante. É um fato que o vetor  $\nabla \phi$  em um ponto é sempre normal à iso-superfície que passa naquele ponto, e seu sentido aponta para a direção para onde o valor de  $\phi$  aumenta. Uma aplicação interessante do gradiente é quando se deseja calcular a derivada de  $\phi$  não em relação a  $x$ ,  $y$ , ou  $z$ , mas em relação a uma direção qualquer definida por um vetor unitário  $\mathbf{n}$ . Esta derivada é calculada como:

$$\frac{d\phi}{dn} = \nabla \phi \cdot \mathbf{n}. \quad (1.30)$$

Repare que se  $\mathbf{n}$  é tangente a uma iso-superfície de  $\phi$ , então  $d\phi/dn = 0$ , como é de se esperar de acordo com a interpretação geométrica do gradiente dada acima.

### *O rotacional*

O rotacional de um vetor é o vetor definido em coordenadas cartesianas por:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}, \quad (1.31)$$

onde se utilizou a notação do produto vetorial. As barras verticais denotam o determinante da matriz cuja primeira linha contém os vetores unitários normais do sistema cartesiano, a segunda contém  $\nabla$  e a terceira contém o campo vetorial  $\mathbf{v}$ . No caso em que o campo vetorial é um campo de velocidades em um meio contínuo, o rotacional deste campo em cada ponto é igual a duas vezes o vetor velocidade angular local, daí o nome rotacional. Em mecânica dos fluidos, o rotacional do campo de velocidade é chamado de vorticidade  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ .

### Combinações

O divergente do gradiente de um escalar  $\phi$  é definido como o importante operador escalar chamado *laplaciano* (aqui apresentado em coordenadas cartesianas):

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (1.32)$$

A seguir uma série de identidades são apresentadas. Dados os vetores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , e o escalar  $\phi$ :

$$\text{div } (\phi \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) = \nabla \phi \cdot \mathbf{v} + \phi \nabla \cdot \mathbf{v}; \quad (1.33)$$

$$\text{rot } (\phi \mathbf{v}) = \nabla \times (\phi \mathbf{v}) = \nabla \phi \times \mathbf{v} + \phi \nabla \times \mathbf{v}; \quad (1.34)$$

$$\text{div } (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{v}; \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{u} + \\ &\quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}; \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} \text{grad } (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \\ &\quad \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u}); \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\text{div rot } (\mathbf{u}) = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u} = 0; \quad (1.38)$$

$$\text{rot grad } (\phi) = \nabla \times \nabla \phi = \mathbf{0}. \quad (1.39)$$

#### 1.6.5 TEOREMAS DE GAUSS, STOKES, E GREEN

A seguir, uma série de teoremas envolvendo campos, e integrais de linha superfície e volume são apresentados. As demonstrações destes teoremas podem ser encontradas em livros de matemática.

#### O teorema da divergência de Gauss

Seja um campo vetorial  $\mathbf{v}$  definido em um volume  $\mathcal{V}$  cujo contorno é a superfície  $\mathcal{S}$ , e seja  $\mathbf{n}$  o vetor unitário normal a cada ponto de  $\mathcal{S}$ . O teorema da divergência de Gauss garante que a integral de volume do  $\text{div } \mathbf{v}$  em  $\mathcal{V}$  é

igual à integral de superfície em  $\mathcal{S}$  de  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  (componente de  $\mathbf{v}$  perpendicular a  $\mathcal{S}$  em cada ponto de  $\mathcal{S}$ ), ou seja:

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV = \int_{\mathcal{S}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (1.40)$$

### O teorema de Stokes

Seja um campo vetorial  $\mathbf{v}$  definido em um espaço  $\mathbb{R}^3$  contendo uma superfície *aberta*  $\mathcal{S}$  delimitada por uma linha curva  $\mathcal{C}$  *fechada*. Seja  $\mathbf{n}$  o vetor unitário normal a cada ponto de  $\mathcal{S}$ , e  $\mathbf{r}$  o vetor distância da origem até  $\mathcal{C}$ . O teorema de Stokes garante que a integral de superfície em  $\mathcal{S}$  da componente do rotacional de  $\mathbf{v}$  normal a  $\mathcal{S}$  é igual à integral de linha fechada da componente de  $\mathbf{v}$  tangencial à linha  $\mathcal{C}$ , ou seja:

$$\int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.41)$$

### O teorema de Green

No caso particular em que a superfície  $\mathcal{S}$  e seu contorno  $\mathcal{C}$  estão no plano cartesiano  $(x, y)$ ,  $\mathbf{v} = \phi(x, y)\mathbf{e}_x + \psi(x, y)\mathbf{e}_y$ , e a orientação da integral de linha é no sentido anti-horário, o teorema de Stokes se reduz ao chamado teorema de Green:

$$\int_{\mathcal{S}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dS = \oint_{\mathcal{C}} (\phi dx + \psi dy). \quad (1.42)$$

#### 1.6.6 A SÉRIE DE TAYLOR

Considere uma função *suave*  $f(x)$  e a seguinte sequência de polinômios  $p_0(x)$ ,  $p_1(x)$ ,  $\dots$ :

$$p_0(x) = f(a), \quad (1.43)$$

$$p_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a), \quad (1.44)$$

$$p_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x - a)^2, \quad (1.45)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x - a)^n. \quad (1.46)$$

Fazendo  $x = a$  para as expressões acima assim como suas derivadas primeira, segunda, etc., tem-se:

$$\begin{array}{ccccccc} p_0(a) = f(a) & p_1(a) = f(a) & p_2(a) = f(a) & \cdots & & & \\ & p'_1(a) = f'(a) & p'_2(a) = f'(a) & \cdots & & & \\ & & p''_2(a) = f''(a) & \cdots & & & \\ & & & \ddots & & & \end{array} \quad (1.47)$$

Portanto, até a  $n$ -ésima derivada, a função  $f$  e o polinômio  $p$  são iguais no ponto  $x = a$ . A partir deste resultado, a *série de Taylor* de  $f(x)$  em torno de  $x = a$  é definida por:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x - a)^n + \cdots \quad (1.48)$$

ou, em notação mais compacta:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (x - a)^n, \quad (1.49)$$

onde, por definição:  $f^{(0)} = f$  (derivada de ordem zero), e  $0! = 1$ . Este é um resultado extremamente importante, já que ele mostra que, dado que uma função é bem comportada o suficiente na vizinhança de um ponto  $x = a$  de seu domínio, conhecendo-se a função e todas as suas derivadas em  $x = a$ , pode-se calcular a função em qualquer ponto  $x_0$  nesta vizinhança. Mais do que isso, mesmo não conhecendo-se todas as derivadas em  $x = a$  (apenas digamos as duas primeiras), os primeiros termos da série de Taylor podem fornecer uma ótima aproximação para  $f(x_0)$ , se  $x_0$  estiver suficientemente próximo de  $a$ .



## CAPÍTULO 2

# ELEMENTOS DE TEORIA CINÉTICA E TERMODINÂMICA CLÁSSICA

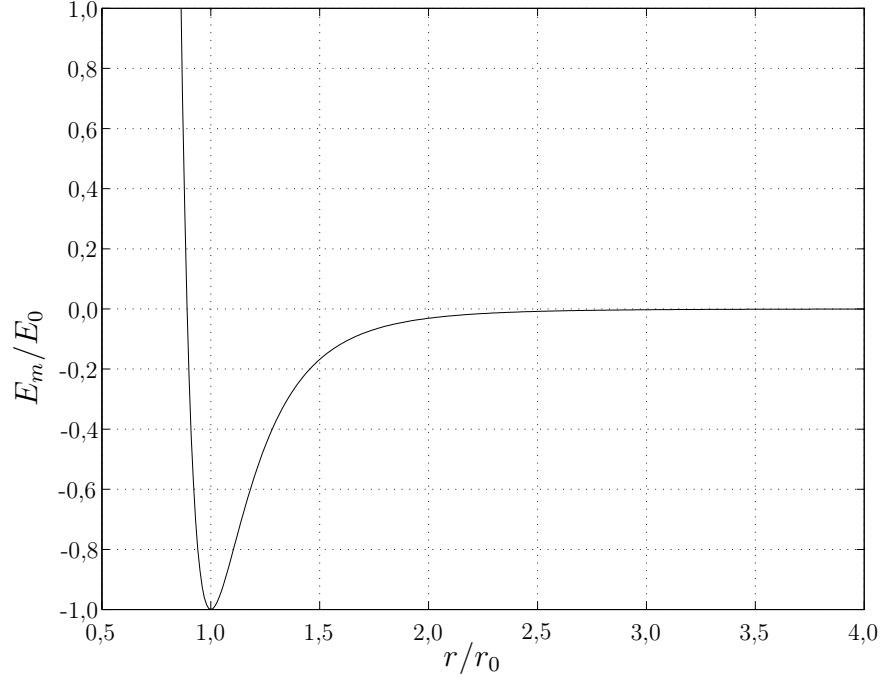
Neste capítulo são introduzidos alguns conceitos fundamentais relacionados com as escalas moleculares ocorrentes nos fenômenos físicos que se relacionam com fenômenos em escalas macroscópicas que serão objeto dos próximos capítulos. A forma de exposição adotada aqui é baseada no livro *Física* de Alonso & Finn<sup>1</sup>.

### 2.1 O POTENCIAL DE LENNARD-JONES

A natureza da interação entre duas moléculas é eletromagnética. O problema entretanto é suficientemente complexo para que até os dias de hoje não exista uma descrição de interações intermoleculares baseada exclusivamente em leis fundamentais clássicas. Sabe-se que, qualitativamente, duas moléculas tendem a se repelir se estiverem muito próximas e a se atrair quando a distância entre elas for relativamente grande. É conveniente tratar-se destes fenômenos em termos de energia potencial associada ao campo de forças, e não diretamente com as forças em si. Supondo que a interação entre duas moléculas depende exclusivamente das distâncias  $r_{ij}$  entre elas, e que a direção da força é dada pela reta que une os seus centros de massa, a relação entre a energia

---

<sup>1</sup>Alonso, M. e Finn, E. J. - *Fundamental University Physics*, Addison-Wesley Publishing, 1967. Edição em português: *Física - Um Curso Universitário*, Editora Edgard Blücher, 1972.



**Figura 2.1:** Energia potencial de Lennard-Jones em função da distâncias entre moléculas, ambas adimensionalizadas.

potencial *molecular*  $E_m(r_{ij})$  e a força  $F(r_{ij})$  é:

$$F_{ij} = -\frac{\partial E_m}{\partial r_{ij}}. \quad (2.1)$$

Uma equação *empírica* que descreve com sucesso a função  $E_m$  para gases é o potencial de Lennard-Jones:

$$E_m(r_{ij}) = E_0 \left[ \left( \frac{r_0}{r_{ij}} \right)^{12} - 2 \left( \frac{r_0}{r_{ij}} \right)^6 \right], \quad (2.2)$$

onde  $E_0$  e  $r_0$  são constantes determinadas para cada tipo de gás.  $-E_0$  é a energia potencial no ponto de equilíbrio,  $r_0$  é a distância em que a força entre duas moléculas passa de repulsiva para atrativa, e é da ordem do diâmetro de uma molécula.

A figura 2.1 mostra a função  $E_m$  adimensionalizada por  $E_0$ , em função da distância  $r_{ij}$  adimensionalizada por  $r_0$ .

## 2.2 ENERGIA DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS

Considere agora a existência de duas formas de energia: cinética e potencial. Num sistema composto por  $N$  partículas, a energia total é a soma da energia cinética total com a energia potencial total, ou seja:

$$E = E_{ct} + E_{pt}. \quad (2.3)$$

O potencial de Lennard-Jones dado pela equação (2.2) supre empiricamente a falta de um conhecimento mais detalhado sobre a natureza das forças intermoleculares. Supondo que o sistema é composto por  $N$  moléculas idênticas, cada uma com massa  $m$ , a massa total do sistema é:

$$M = Nm. \quad (2.4)$$

A velocidade do centro de massa do sistema é dada por:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m \mathbf{v}_i, \quad (2.5)$$

onde  $\mathbf{v}_i$  é a velocidade de cada molécula. A energia cinética total do sistema é:

$$E_{ct} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i). \quad (2.6)$$

Supondo que além da energia potencial devido às interações mútuas, todas as moléculas estão sujeitas a um campo gravitacional uniforme com aceleração  $\mathbf{g}$  de módulo  $g$ , a energia potencial total será:

$$E_{pt} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N E_m(r_{ij}) + \sum_{i=1}^N mgz_i. \quad (2.7)$$

Observe que o termo com somatório duplo só depende das interações mútuas entre as moléculas, enquanto que o último termo é devido ao campo gravitacional, onde  $z_i$  é a posição de cada molécula em relação a um plano horizontal de referência.

A energia cinética total do sistema  $E_{ct}$  pode ser separada entre a energia cinética *interna* em relação ao centro de massa, e a energia cinética correspondente ao movimento do centro de massa, como é mostrado a seguir. A velocidade de cada molécula pode ser decomposta em:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \mathbf{v}_{ri}, \quad (2.8)$$

onde  $\mathbf{v}_{ri}$  é a velocidade de cada molécula em relação ao centro de massa. A energia cinética total será:

$$\begin{aligned}
 E_{ct} &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m ([\mathbf{v} + \mathbf{v}_{ri}] \cdot [\mathbf{v} + \mathbf{v}_{ri}]) \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}_{ri} \cdot \mathbf{v}_{ri} + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_{ri}) \\
 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) M + \sum_{i=1}^N m (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_{ri}) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m (\mathbf{v}_{ri} \cdot \mathbf{v}_{ri}). \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

Note que

$$\sum_{i=1}^N m (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_{ri}) = \mathbf{v} \cdot \left[ \sum_{i=1}^N m \mathbf{v}_{ri} \right], \quad (2.10)$$

e o termo entre colchetes representa a quantidade de movimento do sistema em relação ao centro de massa, que é nula (a prova é deixada como exercício). A equação (2.9) fica então:

$$E_{ct} = \frac{1}{2} M (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m (\mathbf{v}_{ri} \cdot \mathbf{v}_{ri}), \quad (2.11)$$

sendo a primeira parcela a energia cinética translacional do sistema associada ao movimento do centro de massa, e a segunda, a energia cinética em relação ao centro de massa. Definindo a velocidade rmq (*raiz-média-quadrática*)  $v_{\text{rmq}}$  do sistema de partículas como:

$$v_{\text{rmq}} = \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{v}_{ri} \cdot \mathbf{v}_{ri}) \right]^{1/2}, \quad (2.12)$$

pode-se reescrever (2.11) como:

$$E_{ct} = E_c + E_{cu}, \quad (2.13)$$

onde,

$$E_c = \frac{1}{2} M (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}), \quad (2.14)$$

e

$$E_{cu} = \frac{1}{2} N m v_{\text{rmq}}^2. \quad (2.15)$$

A mesma ideia é agora aplicada à energia potencial do sistema. A posição  $z$  do centro de massa em relação a um plano horizontal de referência pode ser escrita como:

$$Mz = \sum_{i=1}^N mz_i. \quad (2.16)$$

A energia potencial gravitacional de todo o sistema é portanto:

$$E_p = \sum_{i=1}^N mgz_i = Mgz, \quad (2.17)$$

enquanto que a energia potencial interna é:

$$E_{pu} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N E_m(r_{ij}). \quad (2.18)$$

O resultado deste desenvolvimento projeta alguma luz sobre a maneira usual de modelar a energia de um sistema (no caso, de moléculas). A energia total do sistema é tão somente a soma das energias cinética e potencial totais:

$$E = E_{ct} + E_{pt}, \quad (2.19)$$

cada uma das quais, por sua vez, possui uma parcela identificável com o centro de massa do sistema e outra parcela *interna*, cuja contabilização exige o conhecimento das posições e velocidades de cada partícula (no caso, de cada molécula) do sistema:

$$E = (E_c + E_{cu}) + (E_p + E_{pu}). \quad (2.20)$$

Por conveniência, define-se a energia interna do sistema por:

$$U = E_{cu} + E_{pu}, \quad (2.21)$$

de modo que a energia total passa a ser dada por:

$$E = E_c + E_p + U. \quad (2.22)$$

Um ponto crucialmente importante na modelação de processos que ocorrem em meios contínuos é a suposição de que existe um sistema formado por um grande número  $N$  de moléculas na vizinhança de cada ponto do espaço, de modo que podemos associar a cada ponto uma certa energia total por unidade massa,  $e$ . Esta é obtida dividindo-se  $E$  em (2.22) pela massa  $M$  do sistema:

$$e = e_c + e_p + u, \quad (2.23)$$

onde  $e_c = 1/2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$ ,  $e_p = gz$ , e  $u = U/M$ .

## 2.3 TEMPERATURA

A noção macroscópica de temperatura está associada a  $E_{cu}$ . Em outras palavras, o conceito físico de temperatura é usado para definir o *estado de agitação*, ou simplesmente a energia cinética das moléculas que constituem o sistema em relação ao seu centro de massa. Observe que no presente modelo, cada molécula está animada apenas de energia cinética translacional. Pode-se imaginar que as moléculas constituídas de dois ou mais átomos possuem energia cinética vibracional e rotacional, e por estarem os átomos ligados, deve haver também uma energia (potencial) de ligação a ser considerada. De fato, este é o caso. Os resultados apresentados aqui, portanto, se restringem em princípio a moléculas mono-atômicas. Para uma apresentação mais geral do assunto, recomenda-se Feynman *et al.*<sup>2</sup>. De fato, a física clássica é insuficiente para descrever o comportamento molecular das diversas formas de energia possíveis neste tipo de sistema: translação, rotação, e vibração. Historicamente, o fracasso da física clássica em explicar o comportamento de moléculas poliatômicas (na verdade de prever seu calor específico - ver próxima seção) criou um impasse que só seria solucionado com o advento da *mecânica quântica*.

Para os objetivos deste texto, entretanto, será razoável definir a temperatura  $T$  de um sistema em que cada partícula (molécula) só possui energia cinética translacional tal que:

$$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}mv_{\text{rmq}}^2, \quad (2.24)$$

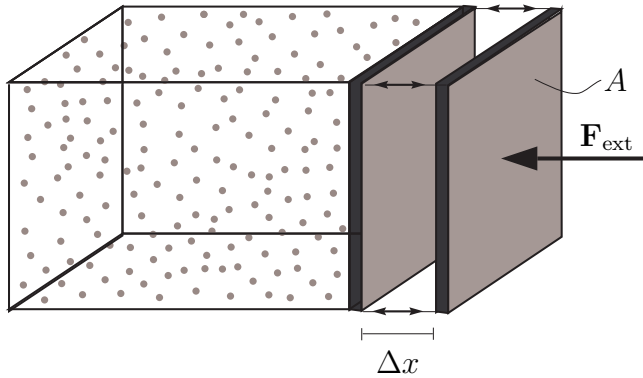
onde o lado direito é a energia cinética média (por molécula) do sistema em relação ao centro de massa.  $k$  é denominada *constante de Boltzmann* e é dada por:  $k = 1,38045 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ . A equação (2.24) mostra que a temperatura do sistema é proporcional a  $E_{cu}$ . Além disso, cada molécula tem em média uma energia cinética em relação ao centro de massa igual a  $\frac{3}{2}kT$ . Pode-se mostrar que para cada grau de liberdade que a molécula possui para se movimentar (três, no presente caso) está associada uma energia média igual a  $\frac{1}{2}kT$ .

## 2.4 A PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

O princípio da conservação de energia diz que, no caso de um sistema isolado,  $E$  permanece constante. Se o sistema interage com a vizinhança, o trabalho

---

<sup>2</sup>Feynman, R. P., Leighton, R. B., e Sands, M. - *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley Publishing, 1970.



**Figura 2.2:** Trabalho macroscópico realizado por força externa sobre um sistema.

realizado pela vizinhança sobre o sistema é igual à variação de  $E$  do sistema:

$$W = \Delta E_c + \Delta E_p + \Delta U. \quad (2.25)$$

Quando as interações entre o sistema e sua vizinhança dão origem a deslocamentos macroscópicos, é possível calcular  $W$  como:

$$W = \int \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.26)$$

onde  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  são as forças externas atuando sobre o sistema. A figura 2.2 mostra um exemplo clássico. Um pistão cheio de gás está parado num referencial inercial. O sistema em questão é formado por todas as  $N$  moléculas de gás dentro do pistão. Neste caso  $E_c = 0$  e  $E_p = C$  (constante). Quando movemos o êmbolo do pistão reduzindo o volume do sistema, o trabalho realizado pelas forças externas no sistema é:

$$W = \int |\mathbf{F}_{\text{ext}}| (-dx). \quad (2.27)$$

Define-se a pressão a que o sistema está submetido como:

$$p = \frac{|\mathbf{F}_{\text{ext}}|}{A}, \quad (2.28)$$

onde  $A$  é a área do pistão. Neste caso,  $A dx$  é a variação do volume do sistema associada a um deslocamento infinitesimal  $dx$ , e:

$$W = - \int p dV, \quad (2.29)$$

logo

$$- \int p dV = \Delta U. \quad (2.30)$$

No entanto, é possível que um sistema troque energia com sua vizinhança sem que haja deslocamentos perceptíveis (ou seja, macroscópicos), ou que seja possível identificar claramente as forças externas atuando sobre o mesmo. Ou seja, é possível que uma parcela de  $W$  seja realizada em nível *microscópico*. Por exemplo, uma barra de aço muito quente mergulhada em um balde de água fria troca energia com a água quando as moléculas do metal com grande quantidade de energia cinética (alta temperatura) se chocam com as da água. Define-se o *calor*  $Q$  como essa parcela de  $W$  realizada microscopicamente sobre um sistema. Assim, pode-se escrever a lei da conservação de energia como:

$$W + Q = \Delta E_c + \Delta E_p + \Delta U, \quad (2.31)$$

onde agora  $W$  refere-se *somente* à parcela macroscópica de trabalho realizada sobre o sistema. A equação (2.31) é conhecida como a *primeira lei da termodinâmica*. Foi Joule<sup>3</sup> o primeiro a propor a incorporação do calor como forma de energia.

Três classes de processos particularmente importantes são aqueles que ocorrem: a volume constante ( $W = 0$ ) ou isovolumétricos, a pressão constante ou isobáricos, e sem trocas de calor com o exterior ou adiabáticos.

## 2.5 A ENERGIA INTERNA É FUNÇÃO DA TEMPERATURA E DO VOLUME

A energia interna  $U$  de um sistema é:

$$U = E_{cu} + E_{pu}. \quad (2.32)$$

Usando (2.15) e (2.18):

$$U = \frac{1}{2} N m v_{\text{rmq}}^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N E_m(r_{ij}), \quad (2.33)$$

e, usando (2.24):

$$U = \frac{3}{2} N k T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N E_m(r_{ij}). \quad (2.34)$$

---

<sup>3</sup>James Prescott Joule (1818-1889) - físico inglês cujo trabalho levou ao que se chama hoje de *primeira lei da termodinâmica*.

As moléculas devem se distribuir mais ou menos homoganeamente por todo o volume  $V$  do sistema, e  $E_{pu}$  dependerá essencialmente da densidade de matéria e da extensão ocupada pelo sistema. Assim, para um sistema de massa  $M$  constante, a energia interna dependerá de sua temperatura  $T$  e de seu volume  $V$ :

$$U = U(T, V). \quad (2.35)$$

Define-se a massa específica de um sistema como:

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad (2.36)$$

e o volume específico é o inverso de  $\rho$ :

$$v = \frac{V}{M}. \quad (2.37)$$

Conforme mencionado anteriormente, num meio contínuo imagina-se que existe de um sistema termodinâmico em torno (na vizinhança) de cada ponto  $(x, y, z)$  do espaço. Neste caso, a energia interna específica (energia interna por unidade de massa)  $u$  será uma função de  $T$  e de  $v$ :

$$u = u(T, v). \quad (2.38)$$

O calor específico a volume constante de uma substância é definido como:

$$c_v = \frac{\partial u}{\partial T}. \quad (2.39)$$

Em dois casos particulares, o conhecimento do valor de  $c_v$  e a hipótese de que ele permanece constante ao longo de uma determinada faixa de temperatura  $\Delta T = T_2 - T_1$  são suficientes para calcular variações de energia interna. Estes casos são quando a substância for: (i) um gás ideal; (ii) um fluido incompressível. No modelo de gás ideal, supõe-se que as moléculas estão tão afastadas umas das outras, que  $E_{pu}$  pode ser desprezado. Neste caso, evidentemente,  $U = U(T)$ . Logo:

$$\Delta u = c_v \Delta T. \quad (2.40)$$

Por outro lado, um fluido incompressível é um material cuja massa específica permanece constante ao longo dos processos físicos aos quais ele é submetido. Naturalmente, não existe tal material e o sucesso desta hipótese simplificadora fica sujeito a verificação experimental e depende da situação em questão. Quando válida, entretanto, a variação da energia interna entre dois estados, será apenas função da variação de temperatura:

$$\Delta u = u(T_2, v) - u(T_1, v) = c_v \Delta T, \quad (2.41)$$

novamente. Observe também que a equação (2.34) prevê que o calor específico a volume constante de um gás monoatômico é:

$$c_v = \frac{3}{2} \frac{Nk}{M}. \quad (2.42)$$

Além disso o nome de  $c_v$  provém do fato de ele ser numericamente igual ao calor recebido por unidade de massa por unidade de temperatura, a volume constante. De fato, se  $V$  é constante, então  $W = 0$  e:

$$Q = \Delta U, \quad (2.43)$$

de forma que:

$$c_v = \frac{1}{M} \left( \frac{dQ}{dT} \right)_v = \frac{\partial u}{\partial T}, \quad (2.44)$$

onde o sub-índice indica a grandeza mantida constante. O calor específico a pressão constante de uma substância pode ser definido de maneira análoga, como o calor recebido por unidade de massa por unidade de temperatura quando a pressão  $p$  do sistema é constante, mas não pode ser expresso como a derivada parcial de  $u$  em relação à temperatura:

$$c_p = \frac{1}{M} \left( \frac{dQ}{dT} \right)_p. \quad (2.45)$$

### 2.5.1 ENTALPIA

Se definirmos a *entalpia*  $H$  e a *entalpia específica*  $h$  como:

$$H = U + pV \quad \text{e} \quad h = u + pv,$$

é possível definir (a demonstração fica como exercício):

$$c_p = \frac{\partial h}{\partial T}$$

Em gases, os efeitos de compressibilidade são grandes, e é comum distinguir-se claramente entre  $c_v$  e  $c_p$ . Já em líquidos, em geral as variações de volume específico são desprezíveis (o fluido pode ser considerado incompressível). Isso faz com que para líquidos que não estejam sujeitos a condições extremas de pressão,  $c_v$  e  $c_p$  sejam praticamente iguais.

## 2.6 A EQUAÇÃO DE ESTADO DE UM GÁS IDEAL

Considere a quantidade escalar:

$$A = \sum_{i=1}^N m \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_i, \quad (2.46)$$

onde  $\mathbf{r}_i$  é o vetor posição de cada molécula num referencial inercial. Diferenciando (2.46) em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \sum_{i=1}^N m \mathbf{v}_i \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} + \sum_{i=1}^N m \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \mathbf{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^N m (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) + \sum_{i=1}^N m \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_i = 2E_{ct} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i, \end{aligned} \quad (2.47)$$

onde  $\mathbf{a}_i$  é a aceleração de cada molécula e  $\mathbf{F}_i$  é a força resultante sobre cada molécula, pela segunda lei de Newton. Suponha que o *sistema* esteja em repouso, isto é, que a velocidade  $\mathbf{v}$  do centro de massa seja nula, de modo que  $E_{ct} = E_{cu}$ . Cada  $\mathbf{F}_i$  pode ser escrita como a soma da força *externa ao sistema* sobre cada molécula  $\mathbf{F}_{ei}$ , com a soma das forças internas devido às  $N - 1$  outras moléculas  $\mathbf{F}_{ij}$ :

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{ei} + \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}, \quad j \neq i. \quad (2.48)$$

Substituindo em (2.47), tem-se:

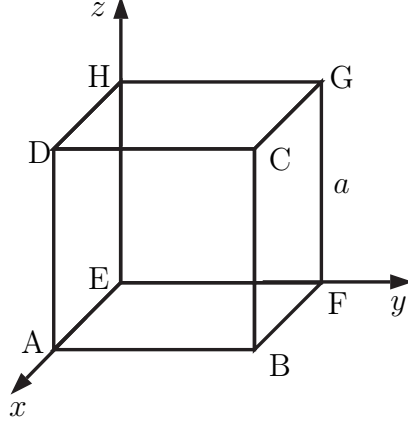
$$\frac{dA}{dt} = 2E_{ct} + \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{F}_{ei} + \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} \right) \cdot \mathbf{r}_i \quad j \neq i. \quad (2.49)$$

Sabendo que  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$  (pela terceira lei de Newton) e que  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_i \quad (j \neq i) &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot \mathbf{r}_j) \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}), \end{aligned} \quad (2.50)$$

donde:

$$\frac{dA}{dt} = 2E_{ct} + \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_{ei} \cdot \mathbf{r}_i) + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}). \quad (2.51)$$



**Figura 2.3:** Gás contido num cubo de aresta  $a$ . Aplicação do teorema do virial.

Tomando a média temporal entre  $t = 0$  e  $t = \Delta$  da equação acima, onde  $\bar{a} = 1/\Delta \int_0^\Delta a dt$ , tem-se:

$$\overline{\frac{dA}{dt}} = \frac{A|_{t=\Delta} - A|_{t=0}}{\Delta} = \overline{2E_{ct}} + \overline{\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_{ei} \cdot \mathbf{r}_i)} + \overline{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})}. \quad (2.52)$$

Repare que em (2.52), desde que a quantidade  $A$  seja finita em qualquer  $t$ , para  $\Delta$  suficientemente grande:

$$\overline{2E_{ct}} + \overline{\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_{ei} \cdot \mathbf{r}_i)} + \overline{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})} = 0, \quad (2.53)$$

A equação acima é o chamado *teorema do virial*.

Como exemplo de aplicação, considere (figura 2.3) um cubo de aresta  $a$ , volume  $V = a^3$ , em repouso contendo  $N$  moléculas de um gás. As forças externas correspondem aos choques das moléculas de gás fora do cubo com as paredes do cubo. Supondo que as forças sejam perpendiculares às respectivas paredes, tem-se, para a face ABCD:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_{ei} \cdot \mathbf{r}_i) = -pa^3 = -pV, \quad (2.54)$$

onde  $p$  é a pressão à que a face está submetida. Em EFGH,  $x = 0$ , portanto:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_{ei} \cdot \mathbf{r}_i) = 0, \quad (2.55)$$

naquela face. Procedendo analogamente para as outras faces, pode-se escrever que, para todo o cubo:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_{ei} \cdot \mathbf{r}_i) = -3pV. \quad (2.56)$$

Substituindo (2.56) em (2.53):

$$\overline{2E_{ct}} - 3pV + \overline{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})} = 0. \quad (2.57)$$

Como para um gás ideal as forças internas no sistema são desprezíveis, o último termo de (2.57) pode ser desprezado. Usando ainda (2.15), (2.24), e o fato de que  $E_{ct} = E_{cu}$ , tem-se:

$$pV = NkT, \quad (2.58)$$

que é a *equação de estado de um gás ideal*. O número  $N$  de moléculas é igual ao número de Avogadro  $N_A$  vezes o número de moles  $n$ . Assim, definindo  $R_u = N_A k$  pode-se reescrever (2.58) na sua forma mais conhecida:

$$pV = nR_u T. \quad (2.59)$$

$R_u$  é a chamada *constante universal dos gases* e é dada por:

$$R_u = 8,314 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}. \quad (2.60)$$

Outra forma muito útil de se escrever a lei universal é:

$$p = \rho RT, \quad (2.61)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do gás,  $R$  é uma constante específica do gás dada por  $R = R_u / \mathcal{M}$ , e  $\mathcal{M} = M/n$ , por sua vez, é a chamada massa molecular do gás. A tabela 2.1 mostra valores de  $\mathcal{M}$ ,  $R$ ,  $c_v$ , e  $c_p$  para alguns gases nas *condições normais de temperatura e pressão* (CNTP).

**Tabela 2.1:** Grandezas fundamentais do SI.

| Gás                | Símbolo          | $\mathcal{M}$<br>kg mol <sup>-1</sup> | $R$<br>J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> | $c_v$<br>J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> | $c_p$<br>J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> |
|--------------------|------------------|---------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------|
| Ar                 | -                | $28,98 \times 10^{-3}$                | 286,9                                     | 717,4                                       | 1005,0                                      |
| Dióxido de carbono | CO <sub>2</sub>  | $44,01 \times 10^{-3}$                | 188,9                                     | 651,4                                       | 840,4                                       |
| Hélio              | He               | $4,00 \times 10^{-3}$                 | 2077,0                                    | 3147,4                                      | 5225,0                                      |
| Hidrogênio         | H                | $2,07 \times 10^{-3}$                 | 4124,0                                    | 10060,0                                     | 14180,0                                     |
| Nitrogênio         | N <sub>2</sub>   | $28,01 \times 10^{-3}$                | 296,8                                     | 742,0                                       | 1039,0                                      |
| Oxigênio           | O <sub>2</sub>   | $32,00 \times 10^{-3}$                | 259,8                                     | 649,6                                       | 909,4                                       |
| Vapor d'água       | H <sub>2</sub> O | $18,02 \times 10^{-3}$                | 461,4                                     | 1540,0                                      | 2000,0                                      |

## 2.7 EQUAÇÕES DE ESTADO

As variáveis mais comumente utilizadas para descrever processos térmicos e mecânicos em sistemas termodinâmicos com substâncias puras são a pressão  $p$ , a temperatura  $T$ , e o volume  $V$ . Alternativamente, pode-se trabalhar *por unidade de massa*, e para tal utiliza-se  $p$ ,  $T$ , e  $v$ . Equações de estado são aquelas que interrelacionam estas variáveis. A equação (2.61) é um caso particular de equação de estado. De forma mais geral:

$$p = f(T, v). \quad (2.62)$$

Note que o termo envolvendo o somatório das forças internas na equação (2.57) é por assim dizer o *responsável* pela forma da equação de estado para casos particulares.

## 2.8 ENTROPIA E A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

Este texto não explora os detalhes do conceito de entropia, apenas introduz a sua definição no contexto das transformações de um sistema termodinâmico.

Quando um sistema termodinâmico simples (substância pura, monofásica), como por exemplo um gás ideal, é sujeito a trabalho e calor externo de maneira que evolui lentamente (reversivelmente), o seu estado pode ser completamente determinado em todos os estágios desta evolução conhecendo-se 2 variáveis de estado independentes. Uma das mais importantes descobertas da teoria foi a existência de uma “nova” variável de estado chamada entropia

$S$ , e definida macroscopicamente através da sua variação:

$$dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T}, \quad S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_{\text{rev}}}{T}, \quad \oint \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = 0. \quad (2.63)$$

Na equação acima, proposta por Claussius<sup>4</sup> que formalizou as ideias de entropia de Carnot<sup>5</sup>, em cada mudança de estágio infinitesimal a que o sistema é submetido, ele está a uma temperatura  $T$  e recebe uma certa quantidade de calor  $dQ_{\text{rev}}$ , que pode evidentemente ser positiva (calor fornecido *ao* sistema) ou negativa (calor fornecido *pelo* sistema).

Há uma sutileza que merece destaque no conceito de  $S$  como definido acima que é a seguinte: a entropia  $S$  é uma variável de estado, e embora o calor  $dQ$  não seja uma variável de estado, variações de entropia dependem de  $dQ$  para serem medidas macroscopicamente, e mais, a entropia do sistema sequer pode ser modificada sem que haja alguma forma de transferência de calor  $dQ$ .

Em muitos casos de sistemas conhecidos (principalmente gasosos), é fácil contabilizar  $\Delta S$ , mas por muito tempo nunca se soube sequer definir ou calcular o valor absoluto  $S$ . Tal como ocorreu com o conceito de zero absoluto da temperatura, o conceito de entropia só foi realmente compreendido quando a termodinâmica foi estudada no nível microscópico pela mecânica estatística. Boltzmann<sup>6</sup> postulou que a entropia na verdade é uma quantidade proporcional ao logaritmo natural do número  $\Omega$  de configurações microscópicas (microestados) que um sistema pode ter sem modificar o seu macroestado:

$$S = k \ln \Omega, \quad (2.64)$$

onde  $k$  é a constante de Boltzmann  $k = 1,38065 \times 10^{-23}$  J/K. A ideia pode ser exemplificada de forma simples para um sistema elementar. Imagine um sistema composto por apenas 4 partículas idênticas  $A, B, C, D$  em um recipiente fechado. Para facilitar ainda mais, imagine que o estado de cada partícula é binário no sentido que ela pode estar no lado esquerdo (índice  $e$ ) ou no lado direito (índice  $d$ ) do recipiente. Assim, os estados possíveis das partículas individualmente são:

$$\{A_e, A_d\}, \{B_e, B_d\}, \{C_e, C_d\}, \{D_e, D_d\}. \quad (2.65)$$

---

<sup>4</sup>Rudolf Clausius (1822-1888) - físico e matemático alemão, um dos fundadores da termodinâmica.

<sup>5</sup>Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796-1832) - engenheiro militar francês, que criou o conceito de entropia e é considerado o *pai da termodinâmica*.

<sup>6</sup>Ludwig Boltzmann (1844-1906) - físico e filósofo austríaco, e um dos pilares da mecânica estatística e da termodinâmica.

As possíveis configurações dessas partículas que fornecem o mesmo estado macroscópico e definem  $\Omega$  (e, portanto  $S$ ) estão listadas abaixo.

1. Todas as partículas no lado esquerdo,  $\{A_e, B_e, C_e, D_e\}$ :  $\Omega = 1$ .
2. Uma partícula no lado direito,  $\{A_d, B_e, C_e, D_e\}$  ou  $\{A_e, B_d, C_e, D_e\}$  ou  $\{A_e, B_e, C_d, D_e\}$  ou  $\{A_e, B_e, C_e, D_d\}$ :  $\Omega = 4$ .
3. Duas partículas em cada lado,  $\{A_d, B_d, C_e, D_e\}$  ou  $\{A_d, B_e, C_d, D_e\}$  ou  $\{A_d, B_e, C_e, D_d\}$  ou  $\{A_e, B_d, C_d, D_e\}$  ou  $\{A_e, B_d, C_e, D_d\}$  ou  $\{A_e, B_e, C_d, D_d\}$ :  $\Omega = 6$ .
4. Três partículas no lado direito,  $\{A_d, B_d, C_d, D_e\}$  ou  $\{A_d, B_d, C_e, D_d\}$  ou  $\{A_d, B_e, C_d, D_d\}$  ou  $\{A_e, B_d, C_d, D_d\}$ :  $\Omega = 4$ .
5. Todas as partículas no lado direito,  $\{A_d, B_d, C_d, D_d\}$ :  $\Omega = 1$ .

Claramente, se o estado de cada partícula é aleatório, as opções 1 e 4 são as menos prováveis. Diz-se que estes são os estados de máxima ordem ou mínima desordem. A opção 3 contém distribuição uniforme entre o lado esquerdo e direito do recipiente, é a mais provável de acontecer. Diz-se que é o estado de máxima desordem. Para sistemas reais, basta imaginar um número imenso de partículas (não apenas quatro, mas algo da ordem de  $10^{23}$  moléculas), e também imaginar que uma molécula tem, além da posição que ocupa, outras “qualidades” como velocidade (ou quantidade de movimento) translacional, rotação (e/ou *spin*), carga elétrica, etc., e qualquer partícula com quaisquer destas características pode estar ocupando qualquer posição dentro do recipiente (não apenas um dos dois lados). A ideia de se calcular entropia desta forma leva a números assombrosos, mas o recado é simples: a máxima entropia é sempre o estado mais provável, que por sua vez é sempre a configuração mais uniforme, e por isso os sistemas sempre tendem a aumentar a sua entropia. Por exemplo, gases tendem a ocupar todo o volume de um recipiente uniformemente pois essa é a configuração com maior chance de ocorrer.

Um dos problemas de se associar aumento de entropia com fornecimento de calor é que esta definição pode levar alguém desavisado a pensar que o conceito de entropia não é necessário pois já existe a temperatura, que também tende a aumentar com o fornecimento de calor. A confusão é compreensível, mas é um equívoco que decorre do fato de que é muito pouco provável que um sistema com altas temperaturas tenha menos entropia que o mesmo sistema em baixas temperaturas. Basta imaginar as mesmas moléculas de água no estado sólido (cristais de gelo/neve a baixas temperaturas e maior ordem) e no estado de vapor (altas temperaturas e maior desordem). O fato,

entretanto é que entropia e temperatura são variáveis de estado independentes e o conceito de entropia e o seu significado macroscópico não podem ser completamente apreciados sem a ideia de ordem/desordem associada aos microestados.

Como então associar aumento de entropia com fornecimento de calor e com o aumento de desordem? Imagine que o sistema estivesse na configuração 1 (todas as partículas do lado esquerdo, mínima entropia - nula, no caso). Imagine também que a velocidade de todas as partículas seja nula (temperatura no zero absoluto). Agora forneça calor ao sistema aumentando a sua temperatura, lembrando que, por definição, calor é fornecimento aleatório de energia cinética microscópica. Isto vai fazer com que as partículas comecem a se mover aleatoriamente, e será uma questão de tempo para que a configuração deixe de ser a configuração 1 (baixa entropia) e caminhe para a configuração 3 (alta entropia). É claro que é possível que, por uma grande coincidência, esperando tempo suficiente, a configuração volte a ser de baixa entropia, mesmo com fornecimento de calor e com temperaturas altas. Cálculos neste sentido já foram feitos para sistemas dinâmicos com número de partículas da ordem de 1 mol a temperaturas usuais da atmosfera, a partir de um mínimo de entropia. Chegou-se que a probabilidade do sistema voltar a este mínimo é de uma vez a cada  $N$  anos onde  $N$  é muitas potências de 10 vezes maior que a idade do universo, e esta é a razão para que se diga que a entropia sempre aumenta. A entropia diminuir é improvável *por definição*.

### 2.8.1 A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

As variáveis de estado da termodinâmica, a rigor, só existem para sistemas em equilíbrio. Por isso, quando um sistema muda de um estado para outro, por exemplo, entre valores de pressão e temperatura  $\{P_1, T_1\}$  e  $\{P_2, T_2\}$  os estados intermediários só têm validade se o processo for reversível. Isto porque, durante a transição, em um processo irreversível, a pressão e a temperatura sequer são definidas. Já foi apresentado que, em um processo reversível, a variação da entropia pode ser calculada por (2.63). Se o sistema passa do estado 1 para o estado 2 por um processo irreversível, na verdade toda a fonte de irreversibilidade se dá por conta da forma de fornecimento de trabalho e calor. O que ocorre é que, neste caso, o trabalho é fornecido de maneira, digamos, muito abrupta, gerando movimento do gás e diferenciais de velocidades que, por sua vez, geram atrito, e, ao final, quando o sistema se equilibra (estado 2) uma parcela do trabalho não foi útil para, por exemplo, comprimir o gás e aumentar sua energia interna por conta dessa compressão e do aumento de temperatura dado pela equação de estado. Esta parcela “inútil” simplesmente se dissipou em calor. É como se o trabalho realizado

não fosse igual ao trabalho recebido útil, e uma parte do trabalho acaba entrando no sistema como se fosse calor injetado diretamente no sistema:

$$\Delta W_{\text{fornecido}} = \Delta W_{\text{útil}} + \Delta Q_W. \quad (2.66)$$

Na equação acima  $\Delta Q_W$  é a parte do trabalho dissipada e transformada em calor.

Tal como o trabalho, o próprio calor fornecido ao sistema pode ser feito de forma reversível ou irreversível. Se o calor for fornecido por exemplo de forma não uniforme, o sistema pode se aquecer (ou resfriar, se o calor for negativo) de maneira não uniforme, gerando diferenciais de pressão e movimentos/dissipação, convecção, etc.

Digamos que o processo que leva o estado 1 ao estado 2 seja adiabático, ou seja, sem fornecimento de calor, apenas com fornecimento de trabalho. O processo ser irreversível, significa simplesmente que, mesmo sem querer, é como se houvesse o fornecimento de calor na parcela  $\Delta Q_W$ , e isso faz com que a entropia aumente entre 1 e 2 e esse aumento pode ser contabilizado como se houvesse uma transferência reversível de calor de  $S_2 - S_1 = \int_1^2 dQ_W/T > 0$ . Se o processo fosse inteiramente reversível,  $\Delta Q_W$  seria zero, e  $S_2 - S_1$  seria zero. A segunda lei da termodinâmica simplesmente generaliza a ideia acima para qualquer processo (adiabático, isotérmico, ou qualquer outro) e diz que

$$(S_2 - S_1)_{\text{irrev}} > (S_2 - S_1)_{\text{rev}} = \int_1^2 \frac{dQ_{\text{rev}}}{T}. \quad (2.67)$$

Uma consequência direta de (2.67) é que processos reais, que sempre são irreversíveis, sempre tenderão a aumentar a entropia de um sistema isolado, ou de todo o universo (sistema + vizinhança).

## 2.9 PROBLEMAS PROPOSTOS

1. Seja a equação de estado de um gás ideal:  $pV = nR_u T$ ; Com  $R = 8,314 \text{ J kg K}^{-1}$  para este gás, re-escreva a equação na forma  $p = \rho RT$ , baseado nas definições deste capítulo.
2. Considere dois sistemas: um cujo volume é mantido constante e outro cuja pressão é mantida constante. Ambos estão inicialmente à mesma temperatura, e recebem quantidades de calor  $dQ_v$  e  $dQ_p$  tais que as suas temperaturas aumentam igualmente de  $dT$ . A partir das definições de calor específico a volume e pressão constante:

$$c_v = \frac{1}{M} \frac{dQ_v}{dT}, \quad c_p = \frac{1}{M} \frac{dQ_p}{dT}, \quad \tilde{c}_v = \frac{1}{n} \frac{dQ_v}{dT}, \quad \tilde{c}_p = \frac{1}{n} \frac{dQ_p}{dT},$$

onde  $M$  é a massa do sistema,  $n$  é o número de moles e  $\sim$  indica calores específicos molares, mostre que:

$$(a) \quad c_v = \frac{1}{M} \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial u}{\partial T};$$

$$(b) \quad c_p = c_v + R;$$

$$(c) \quad \tilde{c}_p = \tilde{c}_v + R_u.$$

Obs: nos dois últimos itens, use a equação de estado de um gás ideal nas formas convenientes.

3. Durante uma transformação adiabática de um gás ideal, valem as seguintes relações:

$$dQ + dW = dU; \quad pV = nR_u T; \quad dQ = 0;$$

$$dU = n\tilde{c}_v dT; \quad dW = -pdV; \quad \tilde{c}_p = \tilde{c}_v + R_u;$$

onde os  $\sim$  indicam calores específicos molares. Se as condições iniciais e finais são  $(p_1, V_1)$  e  $(p_2, V_2)$ , mostre que:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma, \quad \gamma = \frac{\tilde{c}_p}{\tilde{c}_v}.$$

4. Define-se entalpia específica por:

$$h = u + \frac{p}{\rho},$$

onde  $p$  é a pressão e  $\rho$  é a massa específica do material. Para o caso de um gás ideal com calor específico mássico constante  $c_p$ , mostre que as variações de entalpia serão dadas por  $\Delta h = c_p \Delta T$ , onde  $\Delta T$  são as variações da temperatura absoluta do sistema.



## CAPÍTULO 3

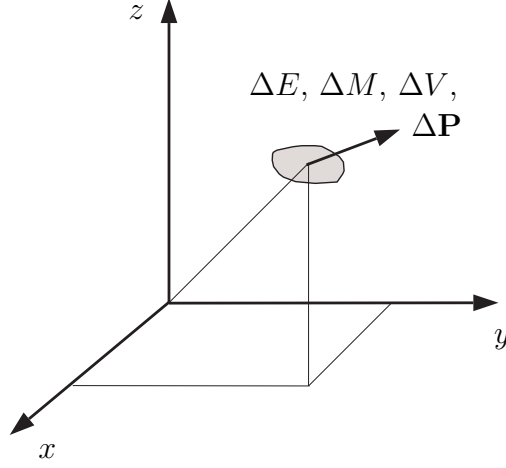
# DESCRIÇÃO DO MEIO CONTÍNUO

Este capítulo introduz formalmente a hipótese do contínuo, ou seja: de que a matéria distribui-se uniformemente no espaço. A partir deste modelo, é possível então definir algumas propriedades tanto a nível macroscópico quanto molecular do meio em cada ponto do espaço, tais como: massa específica, velocidade, temperatura, concentração, tensão. No caso dos fluidos, a existência de um campo de velocidades, ou seja, de um vetor velocidade associado a cada ponto do espaço, dá lugar ao conceito de advecção (o transporte de uma propriedade devido ao movimento macroscópico do meio), enquanto que o transporte devido aos processos a nível molecular dão lugar ao conceito de difusão.

### 3.1 INTRODUÇÃO

O principal objetivo deste capítulo é a formulação de conceitos que permitam a quantificação dos fenômenos físicos que serão estudados em capítulos futuros. Conforme visto no Capítulo 1, em fenômenos de transferência defronta-se com um número extraordinariamente grande de partículas (moléculas), e portanto, é claramente impossível se aplicar as leis da física para cada partícula individualmente na tentativa de se descrever o sistema como um todo. Alternativamente, pode-se supor a existência de um sistema em equilíbrio termodinâmico tal como definido no Capítulo 2 na vizinhança de cada ponto do espaço, e postular a existência das propriedades associadas a este sistema em cada ponto.

Outra questão fundamental é a compreensão da natureza dinâmica dos processos que, em sua maioria, envolvem fluidos em movimento. O enfoque,



**Figura 3.1:** Sistema termodinâmico em torno de cada ponto do espaço.

daqui para frente, não mais será dado ao que acontece a cada molécula, e sim às propriedades do escoamento em uma região de interesse.

### 3.2 A HIPÓTESE DO CONTÍNUO

No Capítulo 2, procurou-se mostrar como a natureza molecular de sistemas termodinâmicos se evidencia macroscopicamente através de propriedades associadas ao movimento do centro de massa, além das características *intrínsecas*, tais como a energia interna. A ideia foi de se criar base para a chamada *hipótese do contínuo*. Esta hipótese concebe um meio material com uma distribuição contínua de matéria, ocupando todo o espaço tridimensional. É útil imaginar que em torno de cada ponto do espaço existe um sistema termodinâmico, tal como indicado na figura 3.1. A massa do sistema é  $\Delta M$ , a quantidade de movimento  $\Delta \mathbf{P}$ , a energia total  $\Delta E$ , e o volume ocupado pelo sistema é  $\Delta V$ . Considere também a possibilidade de existir alguma substância *diluída* no meio, tal como vapor d'água em ar seco, ou açúcar em água destilada, tal que o sistema da figura 3.1 comporte uma certa massa  $\Delta M_A$  de uma substância A sujeita a diluição. De acordo com o Capítulo 2, define-se a massa específica  $\rho$  em cada ponto do espaço cartesiano  $(x, y, z)$ , e instante de tempo  $t$  como:

$$\rho(x, y, z, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} . \quad (3.1)$$

A velocidade em cada ponto deverá ser a velocidade do centro de massa do sistema na vizinhança do ponto:

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \lim_{\Delta M \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta M} . \quad (3.2)$$

Analogamente, a energia específica (energia por unidade de massa) será:

$$e(x, y, z, t) = \lim_{\Delta M \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta M} . \quad (3.3)$$

Observe que (3.3) pressupõe a existência de um campo de temperaturas  $T$ , uma vez que, conforme já visto:

$$e = e_c + e_p + u, \quad (3.4)$$

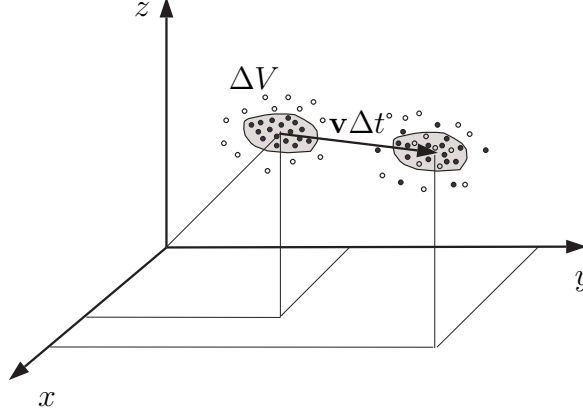
onde

$$e_c = \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}), \quad e_p = gz, \quad u = u(T, \rho). \quad (3.5)$$

Finalmente, é preciso definir concentração em cada ponto, como medida da quantidade de soluto  $A$ . Ao contrário de  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$ , ou  $T$ , não existe uniformidade na definição de concentração; dependendo do problema ou área de conhecimento, define-se concentração das mais diversas formas e com as mais diversas unidades: gramas, miligramas, ou microgramas por litro; gramas de soluto por litro de solução; moles de soluto por moles de solução, etc. . Para manter uniformidade na notação e nas unidades, este texto adotará a concentração mássica  $C_A$  de um soluto  $A$  como a massa de  $A$  por massa da solução, ou seja:

$$C_A(x, y, z, t) = \lim_{\Delta M \rightarrow 0} \frac{\Delta M_A}{\Delta M} . \quad (3.6)$$

O meio contínuo passa então a ser descrito por três funções (ou campos) escalares e uma função (ou campo) vetorial, a saber:  $\rho(x, y, z, t)$ ,  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ ,  $T(x, y, z, t)$ , e  $C_A(x, y, z, t)$ . Repare que, rigorosamente falando, os limites  $\Delta M, \Delta V \rightarrow 0$  são uma *abstração matemática*, ou seja, são parte da *modelação* dos fenômenos físicos, uma vez que a rigor é impossível que um sistema termodinâmico tenha dimensões nulas. Obviamente quando  $\Delta M$  se aproxima da massa de um número relativamente pequeno de moléculas, a hipótese do contínuo falha. Os limites de validade dos modelos contínuos devem ser estabelecidos empiricamente, por meio de experimentos. A justificativa final para a utilização da hipótese do contínuo deve ser a sua capacidade de prever com sucesso o comportamento dos meios materiais. Neste sentido, a sua validade tem sido amplamente verificada.



**Figura 3.2:** Movimento de uma partícula de fluido: advecção e difusão.

### 3.3 DIFUSÃO E ADVECÇÃO

Uma maneira algumas vezes útil de se raciocinar em problemas envolvendo o escoamento de fluidos é considerar a existência de uma partícula de fluido com um pequeno volume  $\Delta V$  passando pelo ponto  $(x, y, z)$  no instante  $t$ . Este é o análogo ao ponto material, ou partícula, da mecânica clássica. Deve-se considerar também que o sistema termodinâmico local em torno de  $(x, y, z)$  mencionado acima é por assim dizer *interno* à partícula, de forma que a mesma possui no instante  $t$  as propriedades do ponto  $(x, y, z)$ :  $\rho(x, y, z, t)$ ,  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ ,  $T(x, y, z, t)$ , e  $C_A(x, y, z, t)$ .

Para fixar as ideias, suponha que todas as moléculas desta partícula foram *pintadas de preto*, no instante  $t$ , para serem distinguidas das outras moléculas do fluido. O que acontece  $\Delta t$  segundos depois? A figura 3.2 ilustra a situação. Por simplicidade, suponha que durante  $\Delta t$  o volume  $\Delta V$  da partícula não variou, apenas transladou-se de  $\mathbf{v}\Delta t$ . Em  $t + \Delta t$ , verifica-se que algumas das *moléculas pretas* estão agora fora de  $\Delta V$ , enquanto que algumas entraram. Este efeito que é devido ao movimento aleatório das moléculas que compõem a *partícula de fluido*, é chamado de difusão molecular ou simplesmente *difusão*, e ocorre independentemente do movimento do fluido. A translação do volume  $\Delta V$  é denominada *advecção*. Repare que, por causa da aleatoriedade do movimento das moléculas, em média, entram tantas moléculas brancas quanto saem moléculas pretas, de modo que o efeito da difusão molecular sobre a massa do fluido é nulo. Em outras palavras,  $\Delta M$  permanece constante.

Entretanto, a difusão molecular afeta a quantidade de movimento, a energia (ou a temperatura), e a concentração do soluto  $A$  (em casos nos quais há um soluto  $A$ ) nas partículas de fluido. Diz-se então que devido à difusão aliada à advecção, há transferência destas propriedades no fluido. A modelação dos mecanismos sob os quais estas transferências se dão é o objeto da disciplina *fenômenos de transferência*.

### 3.4 DESCRIÇÕES DE EULER E DE LAGRANGE

A descrição de Lagrange<sup>1</sup> ou lagrangiana do movimento de um fluido consiste em acompanhar a história de uma ou mais partículas. Como já visto, devido à difusão molecular, a própria identidade da partícula se modifica continuamente por causa das trocas de moléculas entre esta e o fluido em seu redor. No entanto, ainda é possível modelar a trajetória da partícula e suas propriedades matematicamente. Por exemplo, o vetor posição  $\mathbf{r}_p$  de uma partícula obedece à equação:

$$\frac{d^2\mathbf{r}_p}{dt^2} = \mathbf{a}, \quad (3.7)$$

onde  $\mathbf{a}$  é a aceleração da partícula, que pode ser determinada pela segunda lei de Newton. A equação (3.7) deve ser integrada com as condições iniciais:

$$\mathbf{r}_p(0) = (x_0, y_0, z_0), \quad (3.8)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_p}{dt} = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}). \quad (3.9)$$

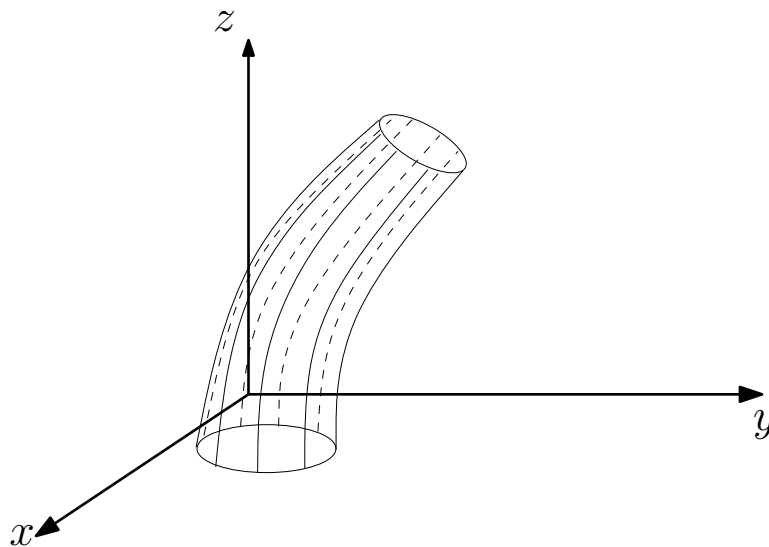
(a posição ocupada pela partícula e sua velocidade no tempo inicial), para fornecer  $\mathbf{r}_p(t)$ .

A descrição de Euler<sup>2</sup> ou euleriana do movimento dos fluidos, por outro lado, consiste em acompanhar as propriedades do escoamento em pontos *fixos* no espaço, ao longo do tempo. Na maioria das vezes, não há interesse em se conhecer a história de cada partícula e sim da evolução temporal da distribuição espacial das propriedades do meio. Assim sendo, a descrição euleriana de um escoamento consiste em encontrar as funções  $\rho(x, y, z, t)$ ,  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ ,  $T(x, y, z, t)$ , e  $C_A(x, y, z, t)$ , onde agora,  $(x, y, z)$  não é a posição de uma partícula em qualquer instante  $t$ , e sim um sistema de coordenadas

---

<sup>1</sup>Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) - Um dos mais importantes matemáticos de todos os tempos. Sua obra é repleta de elegância e simplicidade.

<sup>2</sup>Leonhard Euler (1707-1783) - O mais prolífico dos matemáticos, Euler possuía uma memória espetacular: sabia de cor todas as fórmulas de análise e trigonometria, as primeiras seis potências dos primeiros cem números primos, uma infinidade de poemas, etc.. Sua obra completa tem mais que setenta volumes.



**Figura 3.3:** Linhas de corrente gerando um tubo de corrente.

cartesiano indicando uma posição fixa no espaço, independente de  $t$ . A descrição euleriana será preferencialmente utilizada ao longo deste texto. Um conceito importante, especialmente na descrição euleriana, é o de *linha de corrente*.

### 3.4.1 LINHA E TUBO DE CORRENTE

Uma linha de corrente é definida como a linha à qual o vetor velocidade é tangente num dado instante, ou  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ , onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal à linha de corrente. Alternativamente, a linha de corrente pode ser definida pelas equações:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \quad (3.10)$$

Um tubo de corrente é limitado por paredes contendo linhas de correntes e topologicamente igual a um cilindro (um tubo ou um cilindro deformável). Nenhum vetor velocidade cruza as paredes de um tubo de corrente. A figura 4.3 ilustra as definições de linha e de tubo de corrente.

**EXEMPLO**

Um escoamento bidimensional tem as seguintes componentes de velocidade:

$$v_x = \frac{t}{1+x^2}, \quad (3.11)$$

$$v_y = \frac{1}{1+y}. \quad (3.12)$$

- a) Determinar a trajetória da partícula situada no ponto  $(x, y) = (1, 1)$  no instante  $t = 0$ .  
 b) Determinar a linha de corrente (ou fluxo) que passa no ponto  $(x, y) = (1, 1)$  no instante  $t = 1$ .

**Solução**

- a) As coordenadas de uma partícula  $(x_p, y_p)$  são tais que:

$$\frac{dx_p}{dt} = v_x = \frac{t}{1+x_p^2}, \quad (3.13)$$

$$\frac{dy_p}{dt} = v_y = \frac{1}{1+y_p}. \quad (3.14)$$

Separando as variáveis:

$$(1+x_p^2) dx_p = t dt, \quad (3.15)$$

$$(1+y_p) dy_p = dt. \quad (3.16)$$

Integrando:

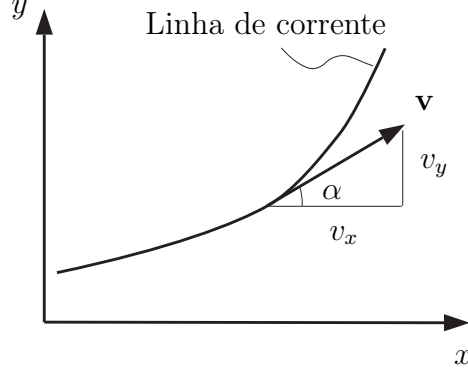
$$x_p + \frac{x_p^3}{3} + C_x = \frac{t^2}{2}, \quad (3.17)$$

$$y_p + \frac{y_p^2}{2} + C_y = t, \quad (3.18)$$

onde as constantes de integração  $C_x$  e  $C_y$  são determinadas pela condição inicial  $(x_p(0), y_p(0)) = (1, 1)$ :  $C_x = -\frac{4}{3}$  e  $C_y = -\frac{3}{2}$ . As equações paramétricas da trajetória da partícula (a posição em função do tempo) são:

$$-\frac{4}{3} + x_p(t) + \frac{1}{3}x_p^3(t) = \frac{1}{2}t^2, \quad (3.19)$$

$$-\frac{3}{2} + y_p(t) + \frac{1}{2}y_p^2(t) = t. \quad (3.20)$$



**Figura 3.4:** Linha de corrente.

b) A linha de corrente deve ser tangente ao vetor velocidade em cada ponto, conforme a figura 3.4. É imediato que:

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1+x^2}{t(1+y)} . \quad (3.21)$$

rearranjando:

$$t(1+y) dy = (1+x^2) dx. \quad (3.22)$$

Integrando:

$$t \left( y + \frac{y^2}{2} \right) = x + \frac{x^3}{3} + C, \quad (3.23)$$

onde  $C = \frac{1}{6}$ , pela condição  $(x(1), y(1)) = (1, 1)$ .

■

### 3.5 PROPRIEDADES INTENSIVAS E EXTENSIVAS

Conforme visto anteriormente, pode-se considerar a porção de matéria que ocupa um dado volume  $V_s$  (volume do sistema) em um determinado instante  $t$  como um sistema termodinâmico. Naturalmente, um volume  $V_s$  finito, por menor que seja, conterá um número extraordinário (*infinito*) de partículas (aqui nos referimos a partículas de fluido e não a moléculas), e ocupará regiões distintas do espaço com o correr do tempo, ou seja: as posições de suas partículas variarão com o tempo.

Assim sendo, o volume  $V_s$  de um sistema pode sofrer distorções contínuas, e torna-se extremamente difícil o acompanhamento de uma massa de fluido durante todo o tempo de observação. Além disso, foi visto que na descrição euleriana do movimento dos fluidos a observação é feita com relação às propriedades do escoamento em cada ponto, ao longo do tempo. Dessa forma, é mais conveniente a aplicação das leis básicas da física a um volume fixo ou com movimento conhecido no espaço. Este volume recebe a denominação de *volume de controle*.

O procedimento a ser aqui adotado consiste em formular as leis da física primeiro para um sistema, e, mais tarde (Capítulo 5), reescrevê-las para uma região arbitrária do espaço (um volume de controle).

A massa total de um sistema pode ser escrita como:

$$M = \int_{V_s} \rho dV. \quad (3.24)$$

O vetor quantidade de movimento total do sistema será:

$$\mathbf{P} = \int_{V_s} \mathbf{v} \rho dV. \quad (3.25)$$

A energia total por sua vez será:

$$E = \int_{V_s} e \rho dV. \quad (3.26)$$

E finalmente, a massa total do soluto  $A$  diluído no sistema será:

$$M_A = \int_{V_s} C_A \rho dV. \quad (3.27)$$

Repare que, de maneira geral, pode-se escrever as integrais (3.24)-(3.27) na forma:

$$N = \int_{V_s} \eta \rho dV. \quad (3.28)$$

Diz-se que  $N$  é uma grandeza ou propriedade *extensiva*, e  $\eta$  a grandeza ou propriedade *intensiva* associada. De maneira geral, propriedades extensivas são aditivas: ao reunir-se dois sistemas, a massa resultante será a soma das massas individuais, o mesmo valendo para a quantidade de movimento, energia total, e massa de soluto. Propriedades intensivas, por outro lado, são definidas ponto a ponto e não são aditivas: ao reunir-se dois sistemas com a mesma concentração de soluto  $C_A$ , obviamente a concentração resultante não será  $2C_A$ , mas permanecerá  $C_A$ .

**Tabela 3.1:** Propriedades extensivas e intensivas em um fluido.

| Propriedade extensiva   | Símbolo      | Propriedade intensiva | Símbolo      | Relação                             |
|-------------------------|--------------|-----------------------|--------------|-------------------------------------|
| Massa                   | $M$          | 1                     | 1            | $M = \int_{V_s} \rho dV$            |
| Quantidade de movimento | $\mathbf{P}$ | velocidade            | $\mathbf{v}$ | $P = \int_{V_s} \mathbf{v} \rho dV$ |
| Energia                 | $E$          | energ. espec.         | $e$          | $E = \int_{V_s} e \rho dV$          |
| Massa de soluto         | $M_A$        | concentração          | $C_A$        | $M_A = \int_{V_s} C_A \rho dV$      |

A equação (3.28) mostra claramente que as propriedades intensivas  $\eta$  podem ser consideradas como concentrações mássicas das propriedades extensivas associadas: a velocidade é a quantidade de movimento por unidade de massa, a energia específica é a energia por unidade de massa, e a concentração de soluto é a massa de soluto por unidade de massa (total). A tabela 3.1 resume as relações entre propriedades intensivas e extensivas utilizadas neste texto.

### 3.6 FLUXO E FLUXO ESPECÍFICO ADVECTIVO

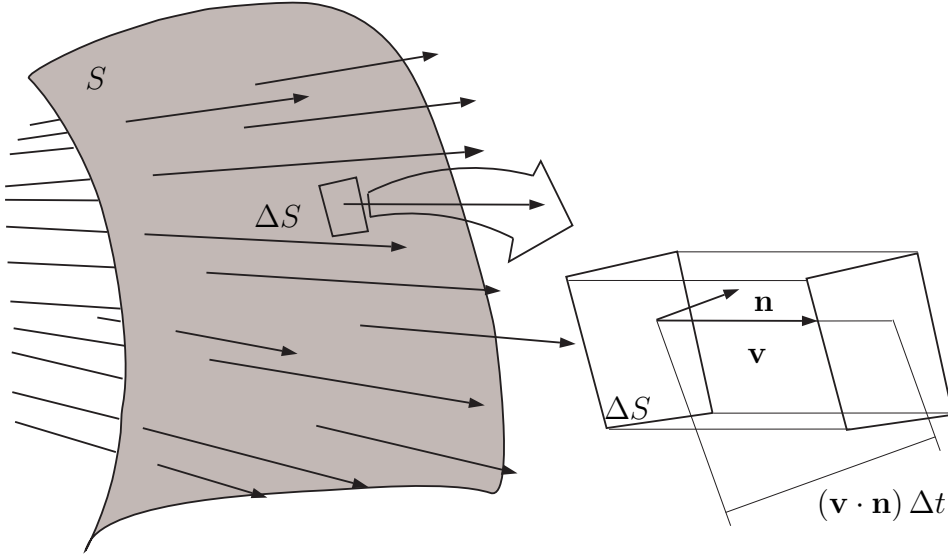
Seja  $S$  uma superfície aberta no espaço correspondente a um fluido em escoamento, de acordo com a figura 3.5, e seja  $\Delta S$  um elemento de área dessa superfície. Entre os instantes de tempo  $t$  e  $t + \Delta t$ , a quantidade total de matéria que atravessou  $\Delta S$  estará contida no prisma mostrado em detalhe. Sendo  $\mathbf{n}$  o vetor de módulo unitário normal a  $\Delta S$ , a quantidade de massa que é transportada no espaço entre  $t$  e  $t + \Delta t$  será dada pelo produto entre massa específica do fluido  $\rho$  e o volume do prisma, cuja base é  $\Delta S$  e a altura é  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \Delta t$ . Então:

$$\Delta M = \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \Delta t \Delta S. \quad (3.29)$$

A grandeza denominada *fluxo específico de massa*, é definida como a quantidade de massa transportada por unidade de tempo por unidade de área:

$$\dot{m} = \lim_{\Delta t, \Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta t \Delta S} = \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}). \quad (3.30)$$

O fluxo advectivo total de massa, ou simplesmente *fluxo de massa*, que é a taxa com que a massa é transportada através de uma superfície, será dado



**Figura 3.5:** Fluxo através de uma superfície aberta.

pela integral de  $\dot{m}$  em toda a superfície  $S$ .

$$\dot{M} = \int_S \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (3.31)$$

Generalizando, para uma grandeza extensiva qualquer  $N$ , a quantidade dessa grandeza transportada no espaço durante um intervalo  $\Delta t$ , é dada pelo produto da propriedade intensiva associada  $\eta$  pela massa do prisma,  $\Delta M$ :

$$\Delta N = \eta \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \Delta t \Delta S. \quad (3.32)$$

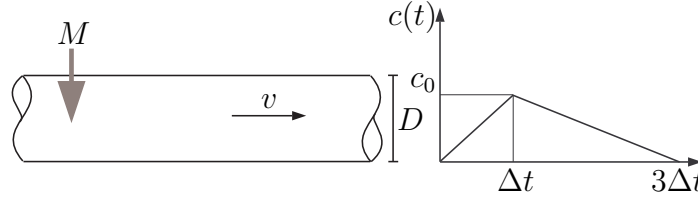
O fluxo específico da grandeza  $N$  será:

$$\dot{n} = \frac{\Delta N}{\Delta t \Delta S} = \eta \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}). \quad (3.33)$$

Finalmente, o fluxo (total) associado será:

$$\dot{N} = \int_S \eta \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (3.34)$$

O tipo de fluxo discutido acima, chamado de fluxo advectivo, corresponde à parcela do transporte devida à advecção (movimento médio das moléculas). Existe também o chamado fluxo difusivo, que é aquele devido a processos intermoleculares. Entretanto, a importância e as particularidades desse tipo de fluxo são tais que o assunto merece uma discussão à parte, e será objeto do capítulo 6.



**Figura 3.6:** Determinação do fluxo de massa em uma tubulação.

### 3.7 PROBLEMAS PROPOSTOS

1. A tubulação da figura 3.6 tem diâmetro  $D$ . O escoamento possui velocidade média  $v$ . Uma massa  $M$  de sal é injetada a 100 m da seção S e observa-se a curva de concentração em função do tempo  $c(t)$  mostrada. (a) Determine o fluxo de massa  $\dot{M}(t)$  através de S em função de  $\rho$ ,  $v$ ,  $D$ , e  $c(t)$ . (b) A partir do resultado de (a), e da função  $c(t)$  dada na figura, determine a velocidade média  $v$  em função de  $M$ ,  $\rho$ ,  $D$ ,  $c_0$ , e  $\Delta t$ .

$$\dot{M}(t) = \rho v D^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 c(t) r dr d\theta = \rho v D^2 \pi \int_0^1 c(t) r dr = \rho v D^2 \pi \frac{c(t)}{2} \int_0^1 r dr = \rho v D^2 \pi \frac{c(t)}{2} \frac{1}{2} = \frac{\rho v D^2 \pi}{4} c(t)$$

2. A figura 3.7 mostra a formação da chamada *camada limite* sobre uma placa horizontal: região do escoamento influenciada pela presença da placa de comprimento  $L$ . Em  $x \leq 0$ , a componente horizontal da velocidade  $v_x(0, y) = v_0 = \text{constante}$ ; em  $0 < x \leq L$ , admita, por simplificação, que o perfil  $y$  de  $v_x$  é linear tal que  $v_x(x, 0) = 0$  e  $v_x(x, \delta(x)) = v_0$ , e que para  $y > \delta(x)$ ,  $v_x(x, y) = v_0$ ; sendo  $\delta(x)$  a espessura da camada limite. Determine:

- (a)  $\dot{M}$  (fluxo de massa) através da seção AB;
- (b)  $\dot{M}$  (fluxo de massa) através da seção CD;
- (c)  $\dot{P}_x$  (fluxo de quantidade de movimento) através da seção AB;
- (d)  $\dot{P}_x$  (fluxo de quantidade de movimento) através da seção CD;

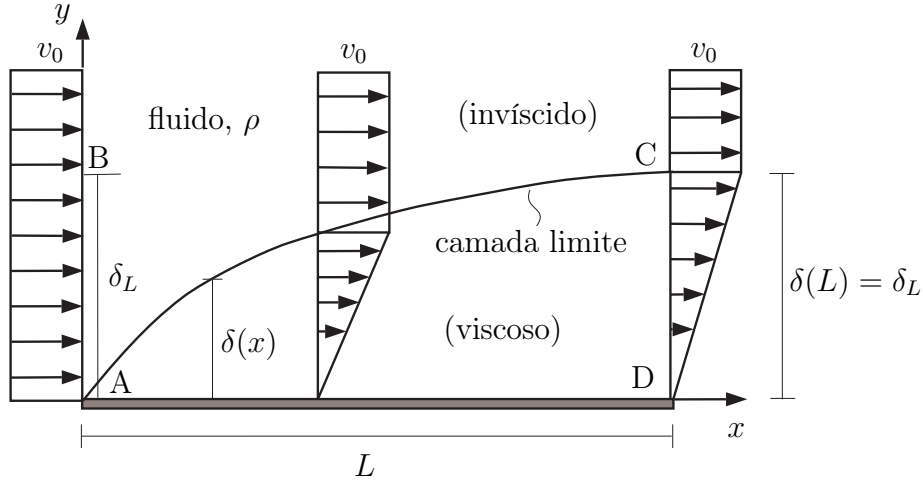
Obs.: como o problema é bidimensional, dê sua respostas *por unidade de comprimento* na direção  $z$ .

$$\dot{M} = \rho \int_0^{\delta(x)} v_x(x, y) dy = \rho \int_0^{\delta(x)} \frac{v_0 y}{\delta(x)} dy = \rho v_0 \frac{\delta(x)}{2} \int_0^1 \eta d\eta = \rho v_0 \frac{\delta(x)}{2} \frac{1}{2} = \frac{\rho v_0 \delta(x)}{4}$$

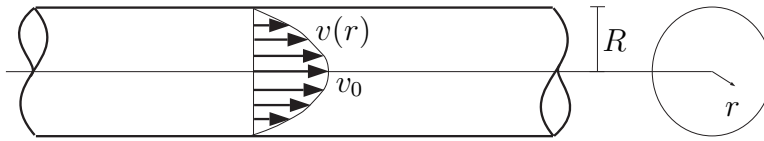
3. O campo de velocidades na seção circular do tubo da figura 3.8 axissimétrico, e é dado por:

$$v(r) = v_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (3.35)$$

onde  $v_0$  é a velocidade no centro do tubo,  $r$  é a distância a partir do



**Figura 3.7:** Determinação de fluxos em uma camada limite idealizada.



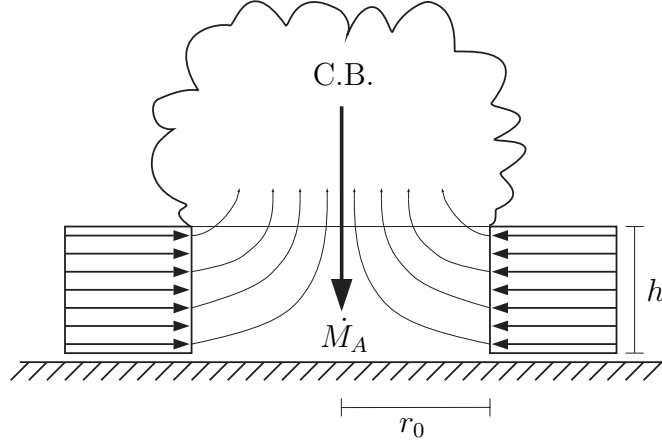
**Figura 3.8:** Determinação de fluxos em um tubo circular.

centro (variável), e  $R$  é o raio do tubo. Sendo a massa específica do fluido  $\rho$ , determine:

- o fluxo de massa no tubo;
- o fluxo de quantidade de movimento no tubo;
- o fluxo de energia cinética no tubo.

*Resposta:* (a)  $\dot{M} = \frac{8}{15} \pi R^2 \rho v_0$ ; (b)  $\dot{P} = \frac{8}{15} \pi R^2 \rho v_0^2$ ; (c)  $\dot{E} = \frac{8}{15} \pi R^2 \rho v_0^3$ .

- A figura 3.9 mostra o modelo simplificado de uma tempestade de verão. O ar úmido entra pela base da nuvem. Considere a região de entrada como sendo a lateral de um cilindro de raio  $r_0$  m e altura  $h$ . A velocidade do vento convergindo para a nuvem (isto é, para o centro do cilindro) é  $v$ . A concentração de vapor de água no ar é  $C_A$  gramas de vapor de água por quilogramas de ar. Dentro da nuvem, o ar úmido



**Figura 3.9:** Esquema simplificado de uma tempestade convectiva.

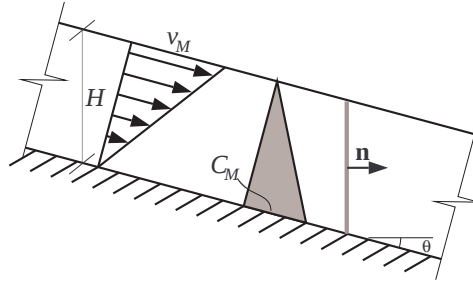
ascende (este processo advectivo é conhecido por convecção) até um nível onde se condensa dando origem à precipitação. Calcule a quantidade (altura) acumulada de chuva em mm (ou seja, o volume de chuva por unidade de área horizontal),  $\Delta t$  após o seu início, admitindo que os dados fornecidos se mantiveram constantes durante este intervalo de tempo. São conhecidas as densidades do ar  $\rho_a$ , e da água líquida  $\rho_l$ .

*Resposta:* altura de chuva =  $2\Delta t C_A \rho_a v h / (\rho_l r_0)$ .

5. A figura 3.10 mostra um canal inclinado (um rio) de largura  $B$  com ângulo  $\theta$  e profundidade  $H$  (na vertical). O escoamento é permanente e varia apenas na direção normal ao canal. A concentração  $C$  de sedimentos (argila) na água de densidade  $\rho$  constante é linear, máxima no fundo ( $C_M$ ), e nula na superfície. O vetor velocidade da água  $\mathbf{v}$  também é uma função linear máxima na superfície ( $v_M$ ) e nula no fundo. Calcule: (a) o fluxo do vetor quantidade de movimento  $\dot{\mathbf{P}}$ ; e (b) o fluxo de massa de argila  $\dot{M}_A$  através da superfície vertical cujo vetor normal unitário é  $\mathbf{n}$  (ver figura).

*Resposta:* (a) Fluxo apenas no eixo x paralelo ao fundo  $\dot{P}_x = \frac{3}{16} \rho v_M^2 H$ ; (b)  $\dot{M}_A = \frac{3}{16} \rho v_M C_M B H$ .

6. A figura 3.11 mostra um tubo circular de raio  $R$  onde se dá o escoamento permanente de um fluido de massa específica  $\rho$ . Neste escoamento só há variações na direção radial  $r$ . A distribuição de velocidades do fluido é  $v(r) = v_0 [1 - (r/R)^2]$ , onde  $v_0$  é a velocidade no centro do

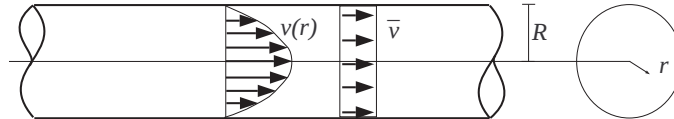


**Figura 3.10:** Problema do canal inclinado com sedimento.

tubo.

- Determine qual é a velocidade média  $\bar{v}$  no tubo. (Use o fato de que a velocidade média deve produzir um fluxo de massa no tubo idêntico ao produzido por  $v(r)$ .)
- Determine o fluxo de quantidade de movimento  $\dot{P}$  na seção transversal do tubo utilizando a velocidade  $v(r)$ .
- Determine o fluxo de quantidade de movimento utilizando a velocidade média  $\bar{v}$  calculada no item (a), ao invés de  $v(r)$ . Se as respostas do item (b) e (c) forem diferentes, justifique.

Respostas: (a)  $\bar{v} = v_0/2$ ; (b)  $\dot{P} = \rho v_0^2 R^2/2$ ; (c)  $\dot{P} = \rho \bar{v}^2 R^2/2 \neq \rho v_0^2 R^2/2$



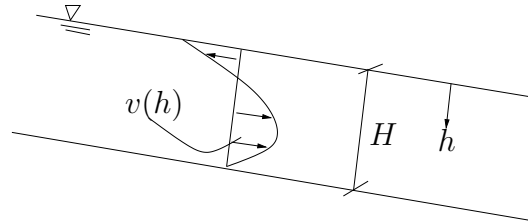
**Figura 3.11:** Tubo circular com escoamento.

- A figura 3.12 mostra um escoamento em um canal com superfície livre (ignore a direção transversal e resolva o problema por unidade de largura). A profundidade do canal é  $H$  e o escoamento não varia na direção do canal. A velocidade do fluido de massa específica  $\rho$  no canal varia com a profundidade e é dada pela combinação de um termo devido a um vento na superfície soprando para cima e outro termo devido à ação da gravidade:

$$v(h) = -V_s \left[ 1 - \frac{1}{H} h \right] + V_g \left[ 1 - \frac{h^2}{H^2} \right].$$

Onde  $V_s$  e  $V_g$  são valores de velocidades que dependem do vento e do ângulo no fundo respectivamente. Determine o valor de  $V_s$  para que o fluxo de massa do fluido numa seção qualquer do canal seja nula, admitindo que as outras variáveis são conhecidas.

Resposta:  $V_s = \frac{3}{4} V_g$ .

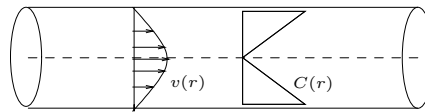


**Figura 3.12:** Fluxo de massa num canal.

8. A figura 3.13 mostra uma tubulação de raio  $R$  por onde passa água (massa específica igual a  $\rho$ ) com uma dióxido de ferro diluído. O perfil de velocidade  $v(r)$  na seção é dado como função da distância  $r$  até o centro por:  $v(r) = V_0(1 - r^2/R^2)$ , enquanto que o perfil de concentração de dióxido de ferro  $C(r)$  é o dado na figura (nulo em  $r = 0$  e igual a  $C_R$  em  $r = R$ ). Ambas funções são conhecidas. Admitindo que nada varia com a coordenada  $x$  ao longo do tubo:

- (a) calcule o fluxo de massa da solução (água + dióxido de ferro) através de uma seção transversal qualquer;  
 (b) calcule o fluxo de massa do soluto (dióxido de ferro).

Resposta: (a)  $\dot{M} = \frac{1}{2} \rho V_0 \pi R^2$ . (b)  $\dot{M} = \frac{1}{4} \rho V_0 \pi R^2 C_R$ .



**Figura 3.13:** Fluxo advectivo de massa em um tubo.

## CAPÍTULO 4

# FORÇAS E TENSÕES NUM FLUIDO - HIDROSTÁTICA

### 4.1 FORÇAS DE CORPO

Forças de corpo são aquelas que atuam em um sistema devido à presença de um campo de forças. Uma característica fundamental é a de que, sendo o campo definido em todo o volume contendo o sistema, ele atuará em todo o sistema. Neste texto apenas o campo gravitacional será considerado como força de corpo, isto é, a força de corpo em um sistema ocupando volume  $V_s$  será dada pelo peso do corpo, sujeito à aceleração do campo gravitacional  $\mathbf{g}$ :

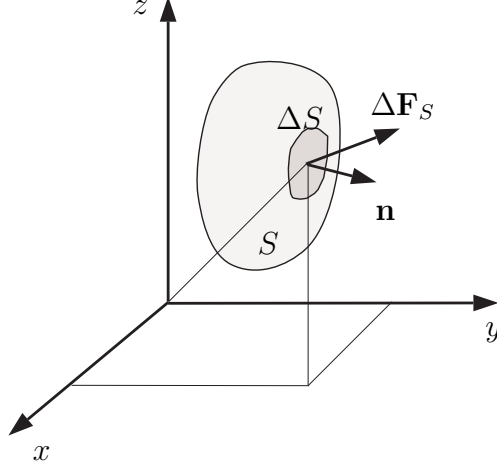
$$\mathbf{F}_c = \int_{V_s} \rho \mathbf{g} dV. \quad (4.1)$$

É útil se pensar no campo gravitacional imaginando-se um vetor  $\mathbf{g}$  associado a todo e qualquer ponto do espaço.

### 4.2 FORÇAS DE SUPERFÍCIE

As forças de superfície são o resultado das interações das moléculas que estão na fronteira do sistema com o espaço imediatamente à sua volta. A figura 4.1 ilustra esquematicamente o conceito de força de superfície.

Considere uma pequena região de área  $\Delta S$  da superfície de um sistema, cuja normal é  $\mathbf{n}$ . O resultado das interações com as partículas *do lado de fora* é uma força  $\Delta \mathbf{F}_s$  agindo sobre  $\Delta S$ . Define-se o vetor tensão atuando



**Figura 4.1:** Forças de superfície sobre um sistema.

num ponto como:

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_s}{\Delta S} . \quad (4.2)$$

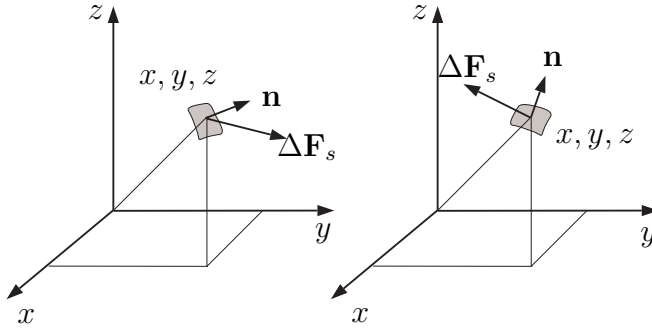
Deste modo, a força total de superfície atuando sobre o sistema será:

$$\mathbf{F}_s = \int_{S_s} \mathbf{t} dS, \quad (4.3)$$

onde  $S_s$  é a superfície em torno volume do sistema (superfície do sistema).

Considere agora uma pequena superfície  $\Delta S$  dentro de um fluido, num ponto  $(x, y, z)$ , ignorando por um momento a qual sistema esta superfície pertence ou com que sistema ela faz fronteira (figura 4.2). Considere a força resultante  $\Delta \mathbf{F}_s$  agindo sobre  $\Delta S$ , devido aos choques entre as moléculas de um lado e do outro de  $\Delta S$ .

A definição do vetor tensão dada por (4.2) obviamente permanece válida. Entretanto, uma característica de certa forma incômoda desta definição é que ao mudar-se a orientação do vetor unitário normal  $\mathbf{n}$ , a força  $\Delta \mathbf{F}_s$  muda, no caso geral. Em outras palavras, o vetor tensão é uma função não apenas do ponto  $(x, y, z)$  e do tempo  $t$ , mas também da direção  $\mathbf{n}$  escolhida. É desta inconveniência em se trabalhar com o *vetor* tensão que surge a necessidade do conceito de *tensor de tensões*.



**Figura 4.2:** Dependência entre o vetor tensão  $\mathbf{t} = \frac{\Delta \mathbf{F}_s}{\Delta S}$  e a direção do plano de atuação, dada pelo vetor normal  $\mathbf{n}$ .

#### 4.2.1 O TENSOR DE TENSÕES

Até agora, foram apresentadas grandezas escalares:  $\rho$ ,  $T$ , e  $C_A$ , e grandezas vetoriais:  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{t}$ . Para se obter uma descrição apropriada de forças de superfície por unidade de área, é necessário que se introduza um novo tipo de grandeza: o tensor.

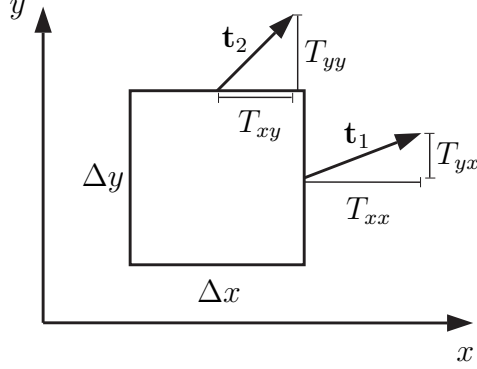
A figura 4.3 mostra um elemento de fluido em duas dimensões. Trabalhar em duas dimensões facilita a visualização e o esforço algébrico, sem prejudicar a compreensão dos conceitos fundamentais. Define-se  $T_{ij}$  como a  $i$ -ésima componente do *vetor* tensão que atua no plano com normal na direção  $j$ . Ou seja, o segundo sub-índice indica o plano de atuação da tensão, e o primeiro indica a direção da componente da tensão atuando naquele plano. Por exemplo, de acordo com a figura 4.3,  $T_{yx}$  é a componente  $y$  do vetor  $\mathbf{t}_1$  que atua no plano com normal na direção  $x$  (note que este plano está na direção  $y$ ). Assim sendo, note que:

$$\mathbf{t}_1 = T_{xx}\mathbf{e}_x + T_{yx}\mathbf{e}_y, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{t}_2 = T_{xy}\mathbf{e}_x + T_{yy}\mathbf{e}_y, \quad (4.5)$$

onde  $\mathbf{e}_x$  e  $\mathbf{e}_y$  são os vetores unitários nas direções  $x$  e  $y$ .

$\mathbf{T}$  é chamado de um tensor (de tensões, no caso), com componentes  $T_{ij}$ . Note que o número de elementos desse tensor é nove no caso geral de um espaço tridimensional (quatro, no caso bidimensional), enquanto que um vetor possui três elementos (dois, no caso bidimensional), e um escalar possui um elemento. Alguns autores se referem aos escalares como tensores de ordem zero, aos vetores como tensores de primeira ordem, e ao que este texto chama



**Figura 4.3:** Convenção adotada entre o vetor tensão  $\mathbf{t}$  e o tensor de tensões  $\mathbf{T}$ .

tensor, de tensores de segunda ordem. Tensores de ordem mais alta também são possíveis, mas estão fora do escopo deste texto.

Considere agora o elemento triangular da figura 4.4 (novamente, por simplicidade, ignore a direção  $z$ ). O vetor normal à superfície  $\Delta S$  é:

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \\ &= n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y,\end{aligned}\tag{4.6}$$

de modo que  $n_x$  e  $n_y$  são as componentes de  $\mathbf{n}$ . O vetor tensão atuando em  $\Delta S$  é  $\mathbf{t}$ . Admitindo que  $\mathbf{t}(\mathbf{e}_x) = \mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{t}(\mathbf{e}_y) = \mathbf{t}_2$ , e utilizando o fato de que  $\mathbf{t}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{n})$  (pela terceira lei de Newton da ação e reação), tem-se que os vetores tensão atuando em  $\Delta x$  e  $\Delta y$  são  $-\mathbf{t}_2$  e  $-\mathbf{t}_1$ , respectivamente. A força de superfície total sobre o elemento é, então:

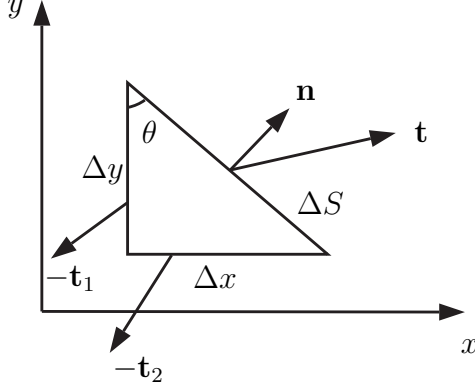
$$\Delta \mathbf{F}_s = \mathbf{t} \Delta S - \mathbf{t}_1 \Delta y - \mathbf{t}_2 \Delta x.\tag{4.7}$$

Substituindo a força total de corpo sobre o elemento, que é:

$$\Delta \mathbf{F}_c = \Delta m \mathbf{g} = \frac{1}{2} \rho \Delta x \Delta y \mathbf{g},\tag{4.8}$$

na segunda lei de Newton aplicada sobre o elemento:

$$\Delta \mathbf{F}_s + \Delta \mathbf{F}_c = \Delta m \mathbf{a},\tag{4.9}$$



**Figura 4.4:** Elemento triangular de um fluido. Determinação da dependência entre  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$ .

onde  $\mathbf{a}$  é a aceleração do elemento, tem-se:

$$\frac{1}{2}\rho\Delta x\Delta y\mathbf{g} + \mathbf{t}\Delta S - \mathbf{t}_1\Delta y - \mathbf{t}_2\Delta x = \frac{1}{2}\rho\Delta x\Delta y\mathbf{a}. \quad (4.10)$$

Substituindo  $\Delta y = \Delta S n_x$ ,  $\Delta x = \Delta S n_y$  e rearranjando:

$$\mathbf{t} - \mathbf{t}_1 n_x - \mathbf{t}_2 n_y = \frac{1}{2}\rho\Delta S n_x n_y (\mathbf{a} - \mathbf{g}). \quad (4.11)$$

Tomando o limite quando o elemento se torna infinitesimal, ou seja, quando  $\Delta S \rightarrow 0$ , o lado direito da equação acima se anula. Usando (4.4) e (4.5) tem-se:

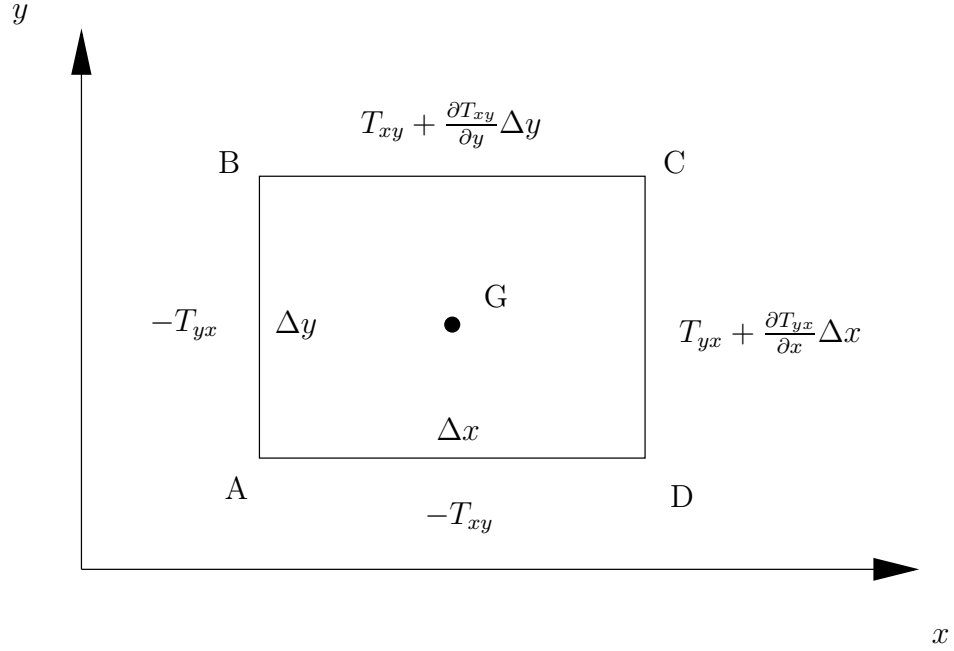
$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= (T_{xx}\mathbf{e}_x + T_{yx}\mathbf{e}_y)n_x + (T_{xy}\mathbf{e}_x + T_{yy}\mathbf{e}_y)n_y \\ &= (T_{xx}n_x + T_{xy}n_y)\mathbf{e}_x + (T_{yx}n_x + T_{yy}n_y)\mathbf{e}_y, \end{aligned} \quad (4.12)$$

ou, considerando as componentes do vetor  $\mathbf{t} = t_x\mathbf{e}_x + t_y\mathbf{e}_y$ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

No caso de um elemento tridimensional no espaço  $(x, y, z)$  a equação acima fica:

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$



**Figura 4.5:** Elemento de um fluido. Simetria de  $\mathbf{T}$ :  $T_{xy} = T_{yx}$ .

ou, em notação de álgebra vetorial:

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}. \quad (4.15)$$

Ou seja, o *vetor tensão* atuando num plano cuja normal é  $\mathbf{n}$ , é dado pelo produto matricial entre o tensor de tensões  $\mathbf{T}$  e o vetor unitário normal  $\mathbf{n}$ .

Uma característica importante do tensor de tensões é que ele é simétrico. Para demonstrar essa propriedade, considere o elemento de fluido da figura 4.5. Apenas as componentes tangenciais  $T_{xy}$ ,  $T_{yx}$ ,  $-T_{xy} + \Delta y \partial T_{xy} / \partial y$  e  $-T_{yx} + \Delta x \partial T_{yx} / \partial x$  produzem torque  $T_z$  em relação ao ponto G:

$$T_z = I\alpha, \quad (4.16)$$

onde  $I$  é o momento de inércia do elemento e  $\alpha$  é sua aceleração angular. A força tangencial sobre a face AD é  $-T_{xy} \times 1 \times \Delta x$  e o torque desta força em relação a G é  $-T_{xy} \times 1 \times \Delta x \Delta y / 2$ . (o torque é positivo quando provoca rotação anti-horária). Repetindo a ideia para as demais faces, tem-se o torque total:

$$T_z = -T_{xy} \Delta y \Delta x + T_{yx} \Delta x \Delta y - \frac{1}{2} \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \Delta y^2 \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} \Delta x^2 \Delta y, \quad (4.17)$$

que, juntamente com o momento de inércia do quadrado:

$$I = \rho \frac{\Delta x \Delta y}{12} (\Delta x^2 + \Delta y^2), \quad (4.18)$$

pode ser substituído em (4.16), dando:

$$T_{xy} - T_{yx} = \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \Delta y - \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{12} \rho (\Delta x^2 + \Delta y^2) \alpha. \quad (4.19)$$

Tomando-se o limite quando  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ , o lado direito da equação (4.19) torna-se desprezível, resultando em:

$$T_{xy} = T_{yx}, \quad (4.20)$$

ou seja, o tensor de tensões  $\mathbf{T}$  é simétrico:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{xy} & T_{yy} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Para o caso de um elemento tridimensional, o processo é análogo e resulta no seguinte tensor de tensões simétrico:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

#### 4.2.2 PRESSÃO

Considere um fluido em repouso (lembre-se que o repouso refere-se ao movimento macroscópico do meio contínuo, e *não* ao movimento das moléculas que compõem o sistema termodinâmico associado a cada ponto ou *partícula de fluido*). Da própria definição de fluido, sabe-se que sob tensões tangenciais não nulas o fluido se deforma continuamente, ou seja, está em movimento. Portanto, no caso de um fluido em repouso as tensões tangenciais são nulas e o tensor de tensões apresentará apenas os termos da diagonal principal, sendo todos os outros nulos:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & 0 \\ 0 & T_{yy} \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

O vetor tensão  $\mathbf{t}$  associado a uma direção normal genérica  $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$  será, pela equação (4.15):

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} T_{xx} & 0 \\ 0 & T_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xx} \cos \theta \\ T_{yy} \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

Repare entretanto que, neste caso, a componente tangencial de  $\mathbf{t}$  deve ser nula, qualquer que seja a orientação do vetor normal  $\mathbf{n}$ . Isso significa que, num fluido em repouso,  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$  devem ser sempre paralelos. A única maneira de atender a essa condição é requerendo:

$$T_{xx} = T_{yy} = -p, \quad (4.25)$$

onde  $p$  é um número positivo, e o sinal de menos aparece para indicar que as tensões em um fluido em repouso são de compressão, ou seja, o vetor tensão  $\mathbf{t}$  em um fluido em repouso tem sempre sentido contrário ao vetor unitário  $\mathbf{n}$ , e módulo igual a  $p$ :

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = -p\mathbf{n}. \quad (4.26)$$

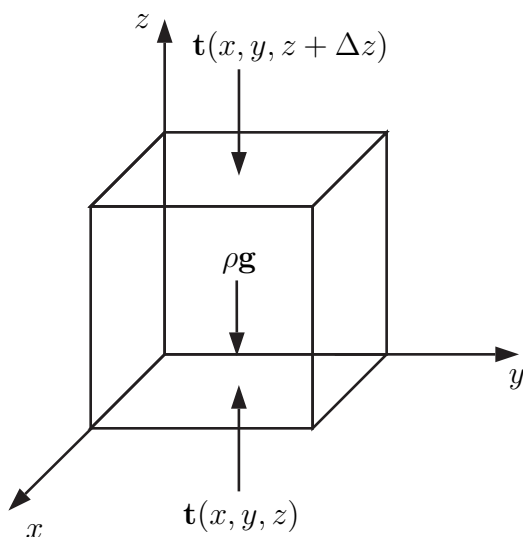
A grandeza *escalar*  $p$  é chamada de *pressão*, e, por hipótese, esta grandeza é a mesma que foi definida no capítulo 2, para um sistema termodinâmico. A equação (4.26) é conhecida como o *princípio de Pascal*<sup>1</sup>: num fluido em equilíbrio as moléculas têm iguais probabilidades de estarem se movimentando em qualquer direção. O módulo da força de superfície por unidade de área, neste caso, é o mesmo em todas as direções e igual à pressão em um sistema termodinâmico  $p$ .

### 4.2.3 TENSÃO SUPERFICIAL

A existência de uma interface visivelmente bem definida entre dois fluidos (por exemplo, um líquido e um gás) tem origem no fato de que normalmente eles têm densidades diferentes (no caso de ar-água, a diferença é de três ordens de magnitude). Tomemos como exemplo típico a interface água-ar em um corpo de água com superfície livre. Por causa da existência dessa interface, as moléculas na superfície estão em ambiente diferente daquelas dentro do líquido. As forças moleculares que atraem as moléculas umas às outras dependem da distância média entre elas. Uma molécula dentro do líquido é atraída igualmente em todas as direções pelas suas vizinhas. Uma molécula na superfície, entretanto, tende a ser *puxada* para o interior do líquido no sentido normal à superfície, pois a força de atração (coesão) molecular é muito menor no lado do gás. Este efeito faz com que o maior número possível de moléculas seja atraída para o interior do líquido e que a superfície livre possua o número de moléculas mínimo necessário para mantê-la. Macroscopicamente, o efeito é comumente chamado de capilaridade, no

---

<sup>1</sup>Blaise Pascal (1623-1662) - Físico-matemático que deu grandes contribuições na área da hidrostática. Entre outras coisas inventou uma máquina de calcular, o barômetro, a prensa hidráulica, e a seringa.



**Figura 4.6:** Elemento de um fluido em repouso.

qual a superfície livre está sempre tentando se contrair através de uma tensão denominada *tensão superficial*.

A tensão superficial é a explicação do porquê as bolhas de gás dentro de um líquido (tal como bolhas de sabão no ar, gotas, etc) tendem a ser esféricas: a esfera é a figura geométrica tridimensional com menor razão área-volume possível.

Quando uma interface entre dois fluidos possui curvatura, a tendência é de haver uma tensão nas partículas da interface tentando esticar esta superfície, esta tensão acaba realizando trabalho contra o diferencial de forças de pressão que existem nos dois lados da interface. A consequência é que a pressão sofre uma descontinuidade ao atravessar a superfície curva.

### 4.3 HIDROSTÁTICA

Considere um elemento de fluido em repouso num referencial inercial conforme o esquema mostrado na figura 4.6. Em cada uma das faces do elemento o vetor tensão  $\mathbf{t}$  tem módulo igual à pressão  $p$  orientado normalmente à face no sentido de compressão, e o elemento está sujeito ao seu peso (força de corpo) na direção vertical. Obviamente, nas direções  $x$  e  $y$  as forças de

superfície nas faces opostas devem se equilibrar. A resultante das forças de superfície na direção  $z$  é:

$$\Delta F_{sz} = p(x, y, z)\Delta x\Delta y - p(x, y, z + \Delta z)\Delta x\Delta y, \quad (4.27)$$

e a força de corpo (gravitacional) é

$$\Delta F_{cz} = -\rho g\Delta x\Delta y\Delta z. \quad (4.28)$$

Uma vez que a resultante total deve ser nula (caso contrário o fluido aceleraria), tem-se:

$$p(x, y, z)\Delta x\Delta y - p(x, y, z + \Delta z)\Delta x\Delta y - \rho g\Delta x\Delta y\Delta z = 0. \quad (4.29)$$

Dividindo (4.29) pelo volume do elemento  $\Delta x\Delta y\Delta z$ :

$$\frac{p(x, y, z + \Delta z) - p(x, y, z)}{\Delta z} + \rho g = 0. \quad (4.30)$$

Tomando-se o limite quando  $\Delta z \rightarrow 0$ , tem-se a *equação diferencial da hidrostática*:

$$\frac{dp}{dz} + \rho g = 0. \quad (4.31)$$

A figura 4.7 apresenta um esquema de um reservatório sujeito à pressão atmosférica  $p_0$ , onde uma certa quantidade de um líquido de massa específica *constante*  $\rho$  (ou seja, o fluido é incompressível) está confinada.

Para se obter a pressão no ponto  $z = -h$ , integra-se a equação (4.31) na vertical entre  $z = 0$  e  $z = -h$ :

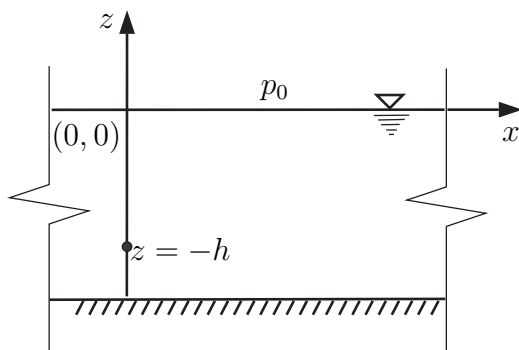
$$dp = -\rho g dz, \quad (4.32)$$

$$\int_{p(z=0)}^{p(-h)} dp = \int_0^{-h} -\rho g dz, \quad (4.33)$$

$$p(-h) - p_0 = -\rho g(-h - 0), \quad (4.34)$$

$$p(-h) = p_0 + \rho gh. \quad (4.35)$$

A equação (4.35) mostra que num fluido incompressível em repouso, a pressão cresce linearmente com a profundidade. Embora esta equação seja chamada de equação *hidrostática*, ela é usada não só para água, mas para a maioria dos fluidos, líquidos ou gasosos. A constante de integração  $p_0$  é o valor da pressão em  $z = 0$  (pressão atmosférica, no caso da figura 4.7). O valor médio da pressão atmosférica ao nível do mar é:  $p_0 = 101325$  Pa. Frequentemente os instrumentos de medição de pressão são capazes de medir



**Figura 4.7:** Fluido em repouso sujeito à pressão hidrostática.

diferenças de pressão em relação à pressão atmosférica  $p_0$ . Por isso, costuma-se chamar a pressão dada por  $p$  na equação (4.35) de *pressão absoluta*, e a pressão dada pela leitura desses instrumentos de *pressão relativa* ( $p_{\text{rel}}$ ), *pressão instrumental*, ou *pressão manométrica* (manômetro é o nome dado a um aparelho que mede pressão). deste modo, tem-se que:

$$p_{\text{rel}} = \rho g h. \quad (4.36)$$

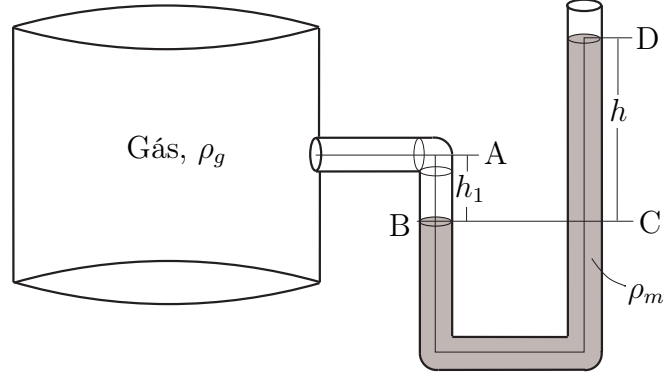
### EXEMPLO

Uma maneira bastante simples de medir pressão em um sistema consiste no manômetro do tipo *tubo U*, que possui uma extremidade ligada ao sistema e outra à atmosfera. Na figura 4.8, o fluido dentro do tubo, denominado fluido manométrico, tem massa específica  $\rho_m$ , e a diferença de níveis no tubo é  $h$ . Determine a pressão relativa e absoluta do sistema que contém o gás.

### Solução

Primeiramente, repare que em qualquer fluido a pressão aumenta com a profundidade, já que em um fluido em equilíbrio, a pressão nada mais é que o efeito do peso do fluido. Portanto, entre os pontos A e B, haverá uma diferença de pressão dada por:

$$\Delta p_{AB} = \rho_g g h_1. \quad (4.37)$$



**Figura 4.8:** Medição de pressão hidrostática. Manômetro em *tubo U*.

Muitas vezes este efeito é pequeno no caso de um sistema gasoso, em comparação com o fluido manométrico, já que  $\rho_g \ll \rho_m$ . Assim, as diferenças de pressão entre pontos do sistema gasoso podem ser desprezadas:  $\Delta p_{AB} \approx 0$ .

Os pontos B e C contêm o fluido manométrico e possuem a mesma pressão pois estão a uma mesma altura (diz-se que estão no mesmo plano isobárico):

$$p_B = p_C. \quad (4.38)$$

Mas  $p_B$  é a pressão do gás em questão. Pela equação da hidrostática:

$$p_C = p_B = p = p_D + \rho_m g h. \quad (4.39)$$

Onde  $p_D$  é igual à pressão atmosférica  $p_0$ .

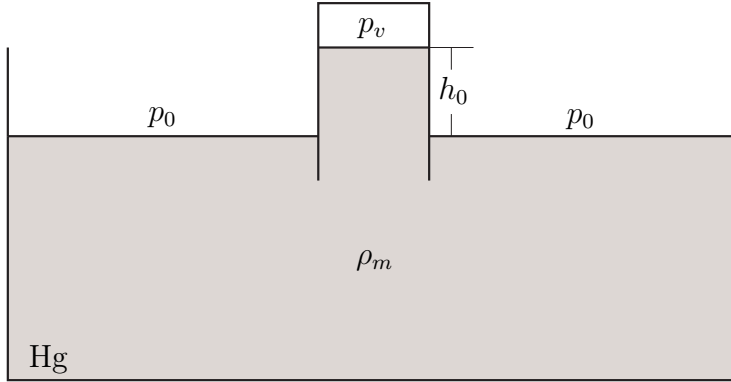
Lembrando que a pressão relativa  $p_r = p - p_0$ :

$$p_r = \rho_m g h. \quad (4.40)$$

■

### EXEMPLO

A pressão atmosférica  $p_0$  depende da localização na vertical e pode ser determinada através do *barômetro de mercúrio*. Observe na figura 4.9 que o reservatório contém mercúrio sujeito à pressão



**Figura 4.9:** Medição de pressão atmosférica. Barômetro de mercúrio.

atmosférica  $p_0$ , exceto no compartimento central onde o mercúrio está isolado e sujeito apenas à pressão do seu próprio vapor  $p_v$ .

### ***Solução***

Aplicando a equação da hidrostática entre a superfície livre do mercúrio sujeita à  $p_0$  e a superfície livre dentro do tubo sujeita a  $p_v$ :

$$p_0 = p_v + \rho_m g h_0. \quad (4.41)$$

Sabe-se que a pressão de vapor do mercúrio é muito pequena e pode ser desprezada:  $p_v \approx 0$ , então, a pressão atmosférica pode ser calculada como:

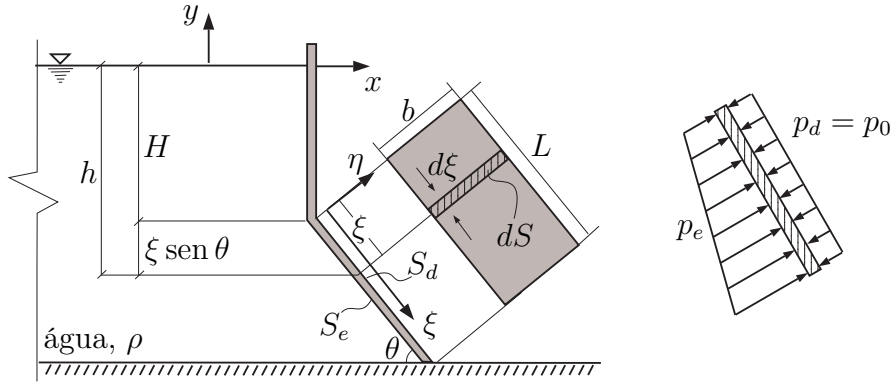
$$p_0 = \rho_m g h_0. \quad (4.42)$$

(Em condições normais:  $h_0 \approx 0,76$  m).



### **EXEMPLO**

Determine a intensidade da força total que o ar e a água exercem sobre a comporta da figura 4.10:



**Figura 4.10:** Determinação da força hidrostática em uma comporta.

### Solução

A força pedida é uma força de superfície decorrente das pressões hidrostáticas nas duas faces da comporta. A intensidade da força de superfície total é dada por (ver detalhe da figura 3.13):

$$|\mathbf{F}_s| = \int_{S_e + S_d} p dS = \int_{S_e} p_e dS - \int_{S_d} p_d dS. \quad (4.43)$$

Adotando um sistema de coordenadas  $\xi$  e  $\eta$  como mostra a figura 3.13, tem-se que a projeção na vertical de  $\xi$  será  $\xi \sin \theta$ . A área do elemento  $dS$  no plano da comporta, de altura  $d\xi$  e largura  $b$  é  $dS = b d\xi$ .

Sabendo que a pressão a uma profundidade  $h$  qualquer abaixo da superfície livre é dada por:

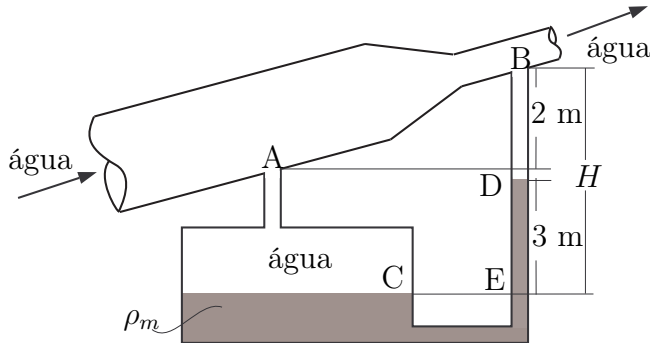
$$p_e = p_0 + \rho g h, \quad (4.44)$$

onde:

$$h = H + \xi \sin \theta, \quad (4.45)$$

então

$$p_e = p_0 + \rho g (H + \xi \sin \theta), \quad (4.46)$$



**Figura 4.11:** Manômetro diferencial para medir mudança de pressão devido a variação da seção transversal de um escoamento em tubo.

logo:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{F}_s| &= \int_0^L [p_0 + \rho g (H + \xi \sin \theta)] b d\xi - \int_0^L p_0 b d\xi \\
 &= \rho g b L \left( H + \frac{L \sin \theta}{2} \right). \quad (4.47)
 \end{aligned}$$

Repare que a contribuição da pressão atmosférica não aparece na força total de superfície sobre a comporta, já que sua atuação nos dois lados da comporta se anula.

Observe ainda que a força de superfície determinada deve ser equilibrada pelo peso e forças nos pontos de fixação da comporta, caso contrário a mesma não estaria em equilíbrio.

■

### EXEMPLO

Um manômetro diferencial é utilizado para medir a variação da pressão causada pela redução na seção transversal de um escoamento em tubo, como mostra a figura 4.11. Calcule a diferença entre as pressões nas seções transversais do tubo onde há escoamento de água passando por A e B, supondo que: (i) a pressão é uniforme em qualquer seção transversal (incluindo as seções passando por A e B) do tubo com água; (ii) no manômetro (fluido abaixo dos pontos A e B) tanto a água quanto o fluido manométrico estão em repouso.

**Solução**

Aplicando a equação da hidrostática dentro do manômetro, entre 3 pares de pontos:

$$p_C = p_A + \rho_a g(H - 2), \quad (4.48)$$

$$p_E = p_D + 3\rho_m g, \quad (4.49)$$

$$p_D = p_B + \rho_a g(H - 3). \quad (4.50)$$

Como os pontos C e E estão a uma mesma altura, ou seja,  $p_C = p_E$ :

$$p_A + \rho_a g(H - 2) = p_D + 3\rho_m g. \quad (4.51)$$

Substituindo (4.50) em (4.51) e rearranjando:

$$p_A - p_B = g(3\rho_m - \rho_a). \quad (4.52)$$

Note que, como  $\rho_m > \rho_a$ ,  $p_A > p_B$ , o que é de se esperar, já que os fluidos tendem a se movimentar para pontos de menos pressão.

**EXEMPLO**

Até agora, em todos os exemplos vistos o fluido foi considerado incompressível, ou seja, sua massa específica é constante. Se a massa específica de um fluido varia linearmente com a profundidade segundo à lei  $\rho = \rho_0 + ch$ , sendo  $\rho_0$  e  $c$  constantes, determine a intensidade da força de superfície devido ao fluido e o ar sobre a parede vertical da figura 4.12.

**Solução**

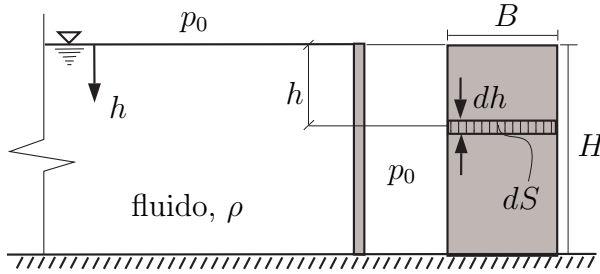
Como a massa específica agora varia com  $h$ , a pressão deve ser calculada a partir da integração da equação diferencial da hidrostática (4.31):

$$dp = \rho g dh, \quad (4.53)$$

$$\int_{p_0}^p dp = \int_0^h \rho g dh, \quad (4.54)$$

o que fornece:

$$p - p_0 = \int_0^h (\rho_0 + ch) g dh = \rho_0 gh + cg \frac{h^2}{2}. \quad (4.55)$$



**Figura 4.12:** Força sobre uma parede vertical exercida por um fluido de massa específica variável.

Seja o elemento de área  $dS$  com dimensões  $dh$  e  $B$ . A intensidade da força que atua no elemento será:

$$|d\mathbf{F}_s| = p dS - p_0 dS, \quad dS = B dh. \quad (4.56)$$

Integrando:

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}_s| &= \int_0^H \left( p_0 + \rho_0 g h + c g \frac{h^2}{2} \right) B dh - p_0 B H \\ &= p_0 B H + \rho_0 g B \frac{H^2}{2} + c g B \frac{H^3}{6} - p_0 B H \\ &= B g \left( \rho_0 \frac{H^2}{2} + c \frac{H^3}{6} \right). \end{aligned} \quad (4.57)$$

■

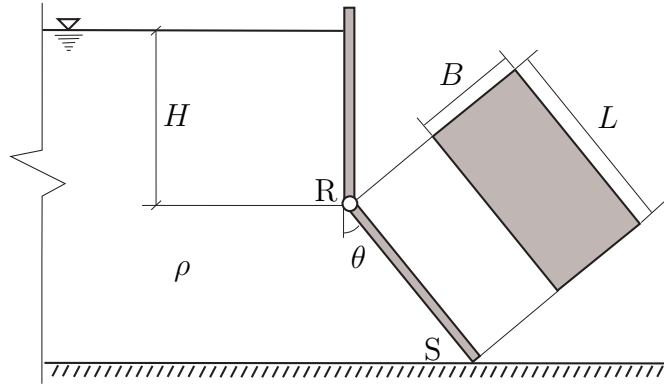
#### 4.4 PROBLEMAS PROPOSTOS

1. A comporta retangular da figura 4.13 tem massa  $m$ . Em R há uma rótula em torno da qual a comporta pode girar e S está livre. O fluido tem massa específica  $\rho$  e a aceleração da gravidade é  $g$ . Determine o máximo valor de  $H$  para o qual a comporta não abre.

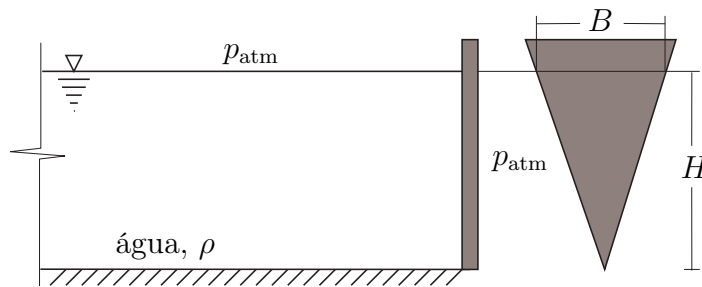
$$\text{Resposta: } H = \frac{m \sin \theta}{\rho g B} - \frac{3}{2L} \cos \theta.$$

2. Calcule a força de superfície devido às pressões da água e do ar na comporta triangular da figura 4.14.

$$\text{Resposta: } F = \frac{6}{1} \rho g B H^2.$$



**Figura 4.13:** Comporta sujeita a pressão hidrostática.



**Figura 4.14:** Determinação das forças de pressão em uma comporta triangular.

3. Considere o leito de um lago seco, com uma camada de lama de espessura  $H$  de profundidade sobre uma superfície horizontal de rocha. Supondo que a massa específica da lama varia com a profundidade  $h$  segundo  $\rho(h) = \rho_0(1 + \alpha h)$ , onde  $\rho_0$  e  $\alpha$  são conhecidos,
- determine a massa total de lama por unidade de área horizontal.
  - determine a pressão sobre a rocha devido ao peso da camada de lama. (Obs.: despreze a pressão atmosférica atuando no topo da camada de lama.)

$$\left(\frac{z}{\epsilon H^{\alpha}} + 1\right) H^{\alpha} \rho_0 = d \quad (a) \quad \left(\frac{z}{\epsilon H^{\alpha}} + 1\right) H^{\alpha} \rho_0 = \text{massa por unidade de área}$$

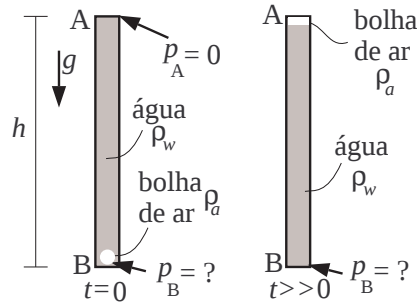
4. A figura 4.15 mostra a seguinte situação: no instante  $t = 0$  uma bolha de ar (*gás ideal*) se encontra no fundo de um tubo de água completamente fechado (não me pergunte como ela foi parar lá). No topo do tubo (ponto A), ainda em  $t = 0$ , não há ar (a água está em contato direto com o tubo) e a pressão lá é  $p_A|_{t=0} = 0$ . Usando apenas o comprimento do tubo  $h$ , a massa específica da água,  $\rho_w$ , e a aceleração da gravidade  $g$ :

- Calcule aproximadamente a pressão dentro da bolha  $P_B$  em  $t = 0$ ;
- Mostre que a situação em  $t = 0$  é de *desequilíbrio*, e que em  $t \gg 0$  (o tempo suficiente para a bolha subir) a bolha ocupará o topo do tubo.
- Calcule a pressão no fundo do tubo (ponto B) para  $t \gg 0$  (situação de equilíbrio). Justifique sua resposta.

Admita que: (i) a massa específica da água  $\rho_w$  é muito maior que a do ar  $\rho_a$ ; (ii) a bolha de ar tem dimensões desprezíveis *em comparação com o tamanho do tubo* e a pressão dentro dela é uniformemente distribuída (se lhe convier suponha uma geometria para a bolha, por exemplo um cubo, mas isso não é *necessário* para resolver o problema); (iii) tanto o ar quanto a água são incompressíveis ( $\rho_w$  e  $\rho_a$  constantes); (iv) o sistema é completamente isolado (não troca calor, massa, trabalho com o exterior), e as trocas de calor entre a bolha de ar e a água são desprezíveis; (v) despreze completamente efeitos de tensão superficiais na superfície da bolha (se você não sabe o que é isso, simplesmente admita que a pressão imediatamente no lado de fora da bolha é igual à pressão dentro da bolha). *Indique nas suas soluções todas as vezes que você precisar usar qualquer das suposições (i)-(v).*

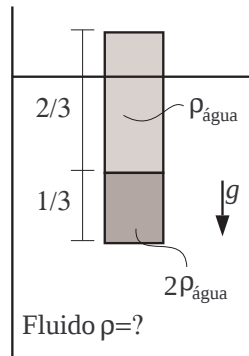
$$P_B(t) = 0 = P_B(t) = \rho_w g h; \quad (c) \quad P_B(t) = \infty = P_B(t)$$

5. Uma barra sólida está em *equilíbrio* e imersa até  $3/4$  de seu volume em um fluido como mostra a figura 4.16. O  $1/3$  inferior da barra tem massa específica  $2\rho_{\text{água}}$ , os  $2/3$  restantes (parte superior) têm massa específica  $\rho_{\text{água}}$ , onde  $\rho_{\text{água}}$  é o valor da massa específica da água. O

**Figura 4.15:** Problema da bolha.

fluido e a barra estão sob a pressão atmosférica. Determine se o fluido em questão é mais pesado, menos pesado, ou tão pesado quanto a água.

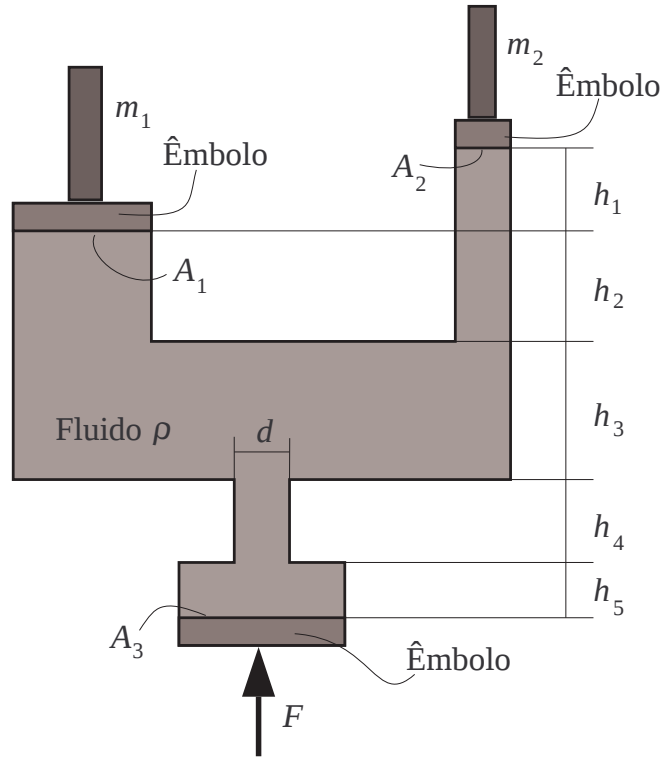
*Resposta:* o fluido tem densidade igual a 16/9 da densidade da água, portanto, maior.

**Figura 4.16:** Problema da barra parcialmente imersa.

6. A figura 4.17 mostra um sistema hidráulico em equilíbrio (o recipiente está fixado num referencial inercial e o fluido está em repouso). As massas  $m_1$  e  $m_2$  estão sobre êmbolos sem atrito e sem massa, de áreas  $A_1$  e  $A_2$ . No fundo, a força  $F$  atua para cima no êmbolo de área  $A_3$ , igualmente sem atrito e sem massa. Em função de  $m_2$ , da massa específica do fluido  $\rho$ , da aceleração da gravidade (apontando para baixo)  $g$ , e das grandezas geométricas que você julgar necessárias ( $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $h_1$ , etc.), determine: (a) a massa  $m_1$ ; (b) a força  $F$ .

*Resposta:* (a)  $m_1 = \frac{A_1}{A_2} m_2 + \frac{A_1}{A_3} F + \rho g h_1$  (b)  $F = \frac{A_3}{A_2} m_2 g + \rho g h_2$

7. A figura 4.18 mostra uma boia em um lago parado sujeito a uma pressão

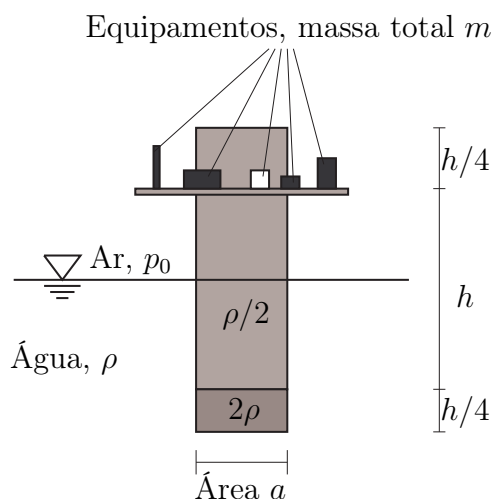


**Figura 4.17:** Sistema hidráulico em equilíbrio.

atmosférica  $p_0$ . A boia carrega sensores e equipamentos de medição na plataforma horizontal da parte superior. A base da boia possui área  $a$ , a parte inferior da boia possui altura  $h/4$  e é feita de material com massa específica igual a  $2\rho$ , e a parte superior até a plataforma possui altura  $h$  e é feita de material com massa específica igual a  $\rho/2$ , a parte da boia acima da plataforma possui altura  $h/4$  e também possui massa específica  $\rho/2$ .  $\rho$  é a massa específica da água. Determine qual a massa  $m$  máxima possível dos equipamentos para os mesmos permaneçam acima do nível da água.

*Resposta:*  $m = \frac{7}{12} \rho a h$ .

8. A figura 4.19 mostra um tubo em U aberto para a atmosfera de diâmetro interno  $D \ll L$  (ver figura), com mercúrio (densidade  $\rho_m$ ). Se um volume  $V$  de água (densidade  $\rho_a$ ) é inserido no lado direito, calcule a nova configuração das alturas de mercúrio nos dois lados depois que o



**Figura 4.18:** Boia suportando equipamentos de medição.

sistema entrar novamente em repouso.

$$Resposta: h = \frac{4V\rho_a}{\pi D^2\rho_m}.$$

9. A figura 4.20 mostra uma calota hemisférica de raio  $R$  imersa à profundidade  $h$  (água em repouso com densidade  $\rho$ ). Determine as componentes horizontal e vertical da força da água sobre a superfície da calota.

$$Resposta: \text{por simetria força horizontal nula; força vertical} = 2\pi R^2(p_{atm} + \rho gh - \frac{3}{2}\rho gR).$$

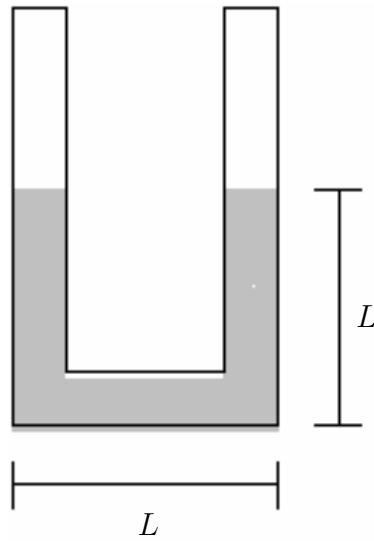
10. A figura 4.21 mostra uma boia prismática/triangular (triângulo equilátero). Considerando as alturas  $a$  e  $3a/2$  conforme a figura, calcule quanto deve ser a densidade  $\rho_b$  do material da boia para que esta configuração ocorra. Use o fato de que, na direção perpendicular ao papel, a boia largura unitária. A massa específica da água é  $\rho$ .

$$Resposta: \rho_b = 8\rho/9.$$

11. A figura 4.22 mostra um tanque com 2 líquidos: água (massa específica  $\rho$ ) e lama (massa específica  $\frac{5}{4}\rho$ ). O sistema está em repouso. Em função da gravidade  $g$ , de  $h$ , e  $\rho$ , calcule a força que os líquidos fazem na parede esquerda (AB). Considere que a largura do tanque na direção perpendicular ao papel é constante e unitária.

$$Resposta: F = \frac{2}{3}p_{atm}h + \frac{161}{21}\rho gh^2.$$

12. A figura 4.23 mostra um tanque com ar, água (densidade  $\rho_a$  conhe-

**Figura 4.19:** Tubo U com mercúrio.

cida), e mercúrio (densidade  $\rho_m$  conhecida). Note que o mercúrio está separado da água por uma parede vertical. Conhecendo a pressão atmosférica  $p_0$ , altura de mercúrio  $d$ , e a pressão  $p_a$  medida no sensor da esquerda, determine (a) a altura  $h$  (ver figura); (b) a pressão  $p_b$  à direita.

$$p_b = p_a + \rho_m g d + \rho_w g h$$

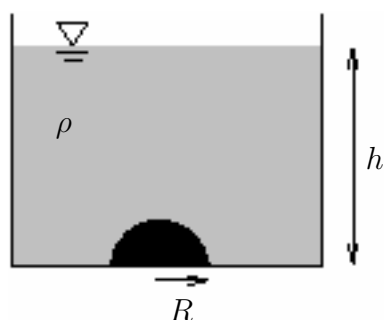
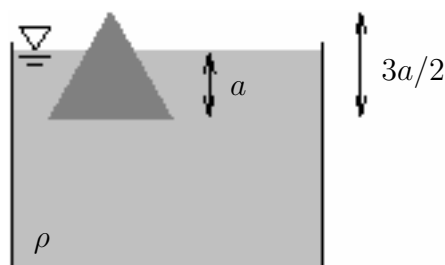
13. A figura 4.24 mostra um sistema com um gás em uma câmara fechada e um tubo em U contendo 2 líquidos (líquido 1 e líquido 2). Calcule a densidade  $\rho_1$  em função dos outros dados da figura.

$$\rho_1 = \frac{p_2 - p_1}{g(h_2 - h_1)}$$

14. A figura 4.25 mostra um reservatório de água onde há um acesso com uma tampa circular e uma placa triangular (triângulo equilátero) no lado direito. Em função dos outros dados mostrados na figura:
- (a) Calcule qual deve ser a menor massa  $m$  dessa tampa para que o peso dela seja suficiente para não haver vazamento de água.
- (b) Calcule a força que a água faz na placa triangular.

$$F = \rho g V = \rho g \left( \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 h \right)$$

15. A figura 4.26 mostra um carro cheio d'água que se acelera livremente (sem atrito) sobre um plano inclinado com inclinação  $\alpha$  em relação à horizontal. Encontre o ângulo  $\beta$  que a superfície livre terá para que o

**Figura 4.20:** Força em calota hemisférica.**Figura 4.21:** Boia triangular.

fluido esteja em repouso em relação ao carro. A aceleração da gravidade é  $g$ .

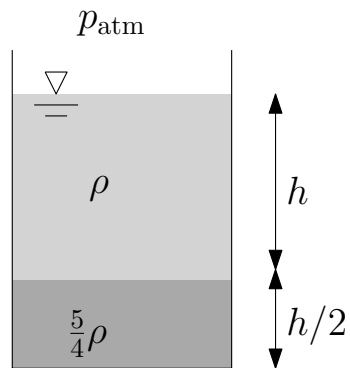
Obs.: resposta intuitiva NÃO VALE. Justifique sua resposta através de argumentos baseados nas leis da física.

Sugestão: use o referencial acelerado do próprio carrinho, em relação ao qual a água está parada, mas não se esqueça de incluir a força fictícia de inércia (lembre-se de seus cursos de física).

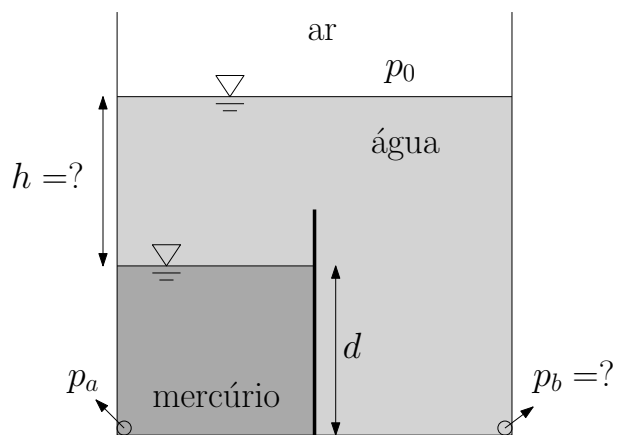
*Resposta:*  $\beta = g$

16. A figura 4.27 mostra um tanque contendo água (massa específica  $\rho$ ) sobre mercúrio (massa específica  $14\rho$ ). Na interface entre os dois fluidos, flutua um bloco sólido de aço (massa específica  $8\rho$ ). Determine a razão entre as distâncias  $a$  e  $b$ .

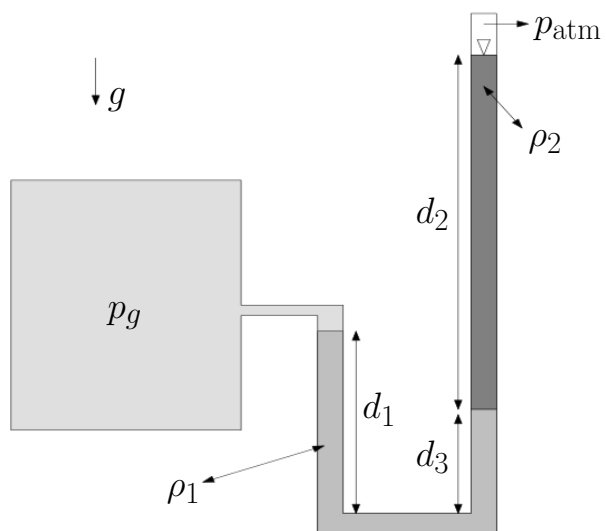
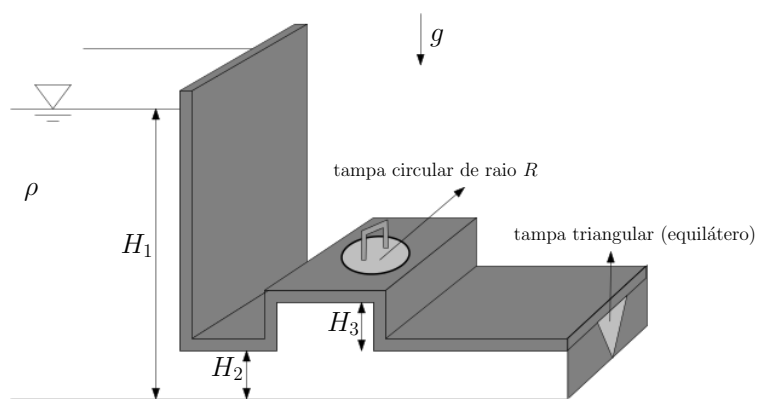
*Resposta:*  $\frac{b}{a} = \frac{7}{6}$

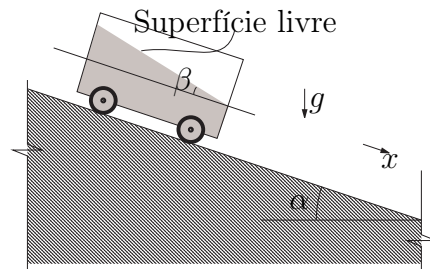


**Figura 4.22:** Pressão de 2 líquidos nas paredes de um tanque.

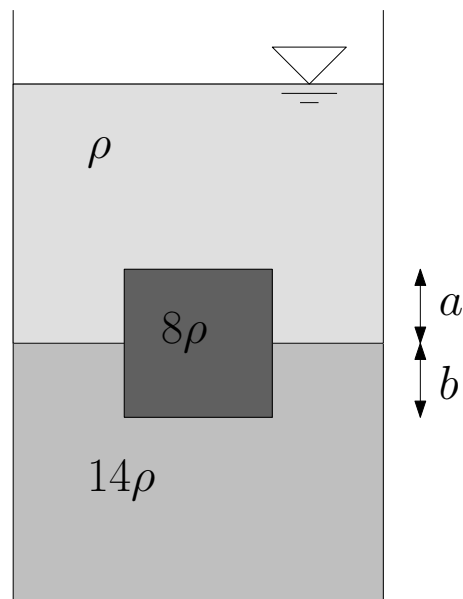


**Figura 4.23:** Pressão hidrostática.

**Figura 4.24:** Tubo em U.**Figura 4.25:** Sistema sob pressão.



**Figura 4.26:** Carro com água descendo a ladeira.



**Figura 4.27:** bloco flutuante.



## CAPÍTULO 5

# MOVIMENTO RELATIVO EM UM FLUIDO: CINEMÁTICA

### 5.1 TAXA DE DEFORMAÇÃO DE UM FLUIDO

O conceito de taxa de deformação de um fluido é vital para se compreender como um fluido pode transportar quantidade de movimento. Nesta seção se apresenta este conceito.

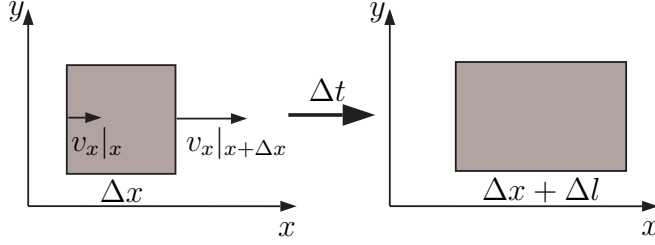
#### 5.1.1 DEFORMAÇÃO LINEAR

Considere um elemento de fluido retangular em um escoamento plano unidirecional com  $v_y = 0$ ,  $v_x \neq 0$ , além disso, considere que  $v_x$  é função de  $x$  apenas, como mostra a figura 5.1. O elemento tem inicialmente tamanho  $\Delta x$  e após  $\Delta t$ , este se deforma devido à variação de  $v_x$  na direção  $x$ . Note que esta deformação, no caso geral, ocorre continuamente com o tempo, de modo que não é prático se falar em deformação e sim em taxa de deformação (ou seja, o quanto o elemento se deforma com o tempo). A taxa de deformação linear do elemento na direção  $x$  é definida como a variação relativa no tamanho do elemento naquela direção:

$$\frac{1}{\Delta x} \frac{d}{dt}(\Delta x) = \frac{1}{\Delta x} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x + \Delta l - \Delta x}{\Delta t}. \quad (5.1)$$

Mas

$$\Delta l = (v_x|_{x+\Delta x} - v_x|_x) \Delta t, \quad (5.2)$$



**Figura 5.1:** Deformação linear de um elemento de fluido em escoamento plano unidirecional.

que substituído em (5.1) resulta em:

$$\frac{1}{\Delta x} \frac{d}{dt}(\Delta x) = \frac{(v_x|_{x+\Delta x} - v_x|_x)}{\Delta x}. \quad (5.3)$$

Para um elemento suficientemente pequeno, o lado direito de (??) é a derivada parcial  $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ , então a taxa de deformação linear em  $x$  é:

$$\frac{1}{\Delta x} \frac{d}{dt}(\Delta x) = \frac{\partial v_x}{\partial x}. \quad (5.4)$$

Analogamente as taxas de deformação linear em  $y$  e  $z$  são:

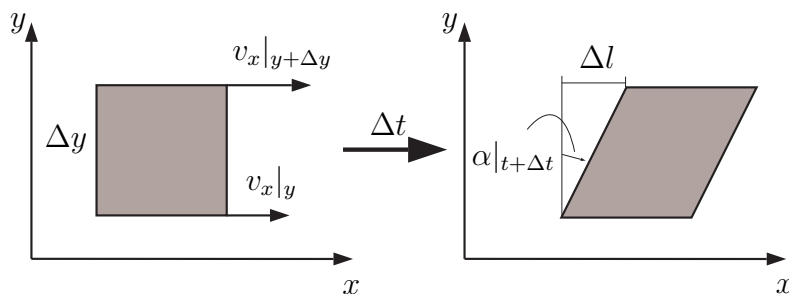
$$\frac{1}{\Delta y} \frac{d}{dt}(\Delta y) = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{\Delta z} \frac{d}{dt}(\Delta z) = \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (5.6)$$

Além da deformação linear, pode haver também a chamada *deformação volumétrica*, dada por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta V} \frac{d}{dt} \Delta V &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \frac{d}{dt}(\Delta x \Delta y \Delta z) \\ &= \frac{1}{\Delta x} \frac{d}{dt}(\Delta x) + \frac{1}{\Delta y} \frac{d}{dt}(\Delta y) + \frac{1}{\Delta z} \frac{d}{dt}(\Delta z) \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= \nabla \cdot \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ . Ou seja, a taxa deformação volumétrica é igual à soma das taxas de deformação linear nas três direções. Note que



**Figura 5.2:** Deformação de cisalhamento de um elemento de fluido em escoamento plano unidirecional.

é possível haver deformação linear sem que haja deformação volumétrica.  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  é o escalar chamado de divergente do vetor velocidade, e é nulo quando o fluido é incompressível (no Capítulo 6 o divergente será apresentado com maior detalhe).

### 5.1.2 DEFORMAÇÃO DE CISALHAMENTO

Ao definir-se fluido no capítulo 1, foi dito que trata-se de um material distribuído de acordo com a hipótese do contínuo, e que se *deforma* indefinidamente enquanto sob uma tensão tangencial (ver figura 1.2 do capítulo 1), ao passo que os sólidos apresentariam uma deformação finita, até que uma força elástica restauradora equilibraria a força provocada pela tensão tangencial. Note que está se supondo que o atrito na base do sólido é suficientemente grande para que o corpo não deslize.

Para introduzir a ideia de deformação de cisalhamento em um fluido com um caso simplificado, considere uma partícula retangular plana (bidimensional) elementar com lados  $\Delta x$  e  $\Delta y$  no interior de uma massa fluida em um escoamento unidimensional ( $v_y = 0$ ). Analisando seu deslocamento relativo, conforme está mostrado na figura 5.2, nota-se que o bordo inferior do elemento tem velocidade  $v_x|_y$ , enquanto que o bordo superior tem velocidade  $v_x|_{y+\Delta y}$ . Portanto, em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , a deformação de cisalhamento é, no caso geral, função do espaço e do tempo, e por isso, mais uma vez, não é útil se falar em deformação para fluidos, mas sim em taxa de deformação.

A taxa de deformação do elemento é definida como a média das taxas de variação dos ângulos que as faces do elemento do fluido fazem com os eixos

coordenados. No caso da figura 5.2, há apenas deformação em uma dessas direções e o ângulo é  $\alpha$ :

$$\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha|_{t+\Delta t} - \alpha|_t}{\Delta t}, \quad (5.8)$$

mas

$$\alpha|_t = 0, \quad \alpha|_{t+\Delta t} = \arctan \frac{\Delta l}{\Delta y} \approx \frac{\Delta l}{\Delta y}, \quad (5.9)$$

e

$$\Delta l = (v_x|_{y+\Delta y} - v_x|_y) \Delta t. \quad (5.10)$$

onde em (5.9) foi usado  $\arctan \frac{\Delta l}{\Delta y} \approx \frac{\Delta l}{\Delta y}$  em vista de que a deformação é pequena em relação ao tamanho do elemento. Substituindo as equações (5.9) e (5.10) na equação (5.8):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(v_x|_{y+\Delta y} - v_x|_y) \frac{\Delta t}{\Delta y}}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(v_x|_{y+\Delta y} - v_x|_y)}{\Delta y} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

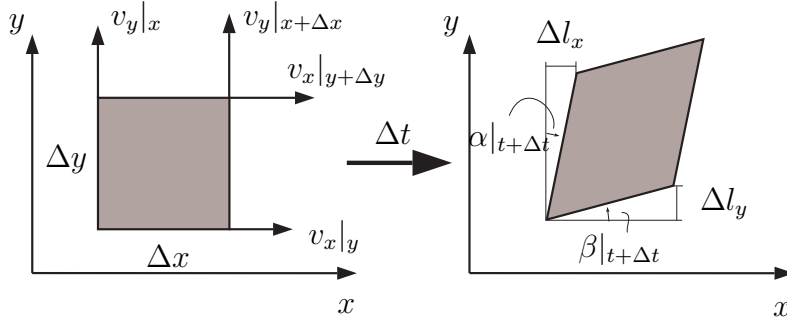
para  $\Delta y$  suficientemente pequeno. Ou seja, a taxa de deformação de um fluido escoando apenas na direção  $x$  e sujeito a cisalhamento apenas na direção  $y$  é igual à metade da taxa de variação da velocidade em  $x$  na coordenada  $y$ .

Considere agora o caso mais geral de um corte no plano  $(x, y)$  em um escoamento tridimensional, tendo o vetor velocidade  $\mathbf{v}$  componentes  $x$  e  $y$  iguais a  $v_x$  e  $v_y$ . A figura 5.3 mostra o elemento em tal configuração. Pela definição de taxa de deformação:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} \right) = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\alpha|_{t+\Delta t} - \alpha|_t}{\Delta t} + \frac{\beta|_{t+\Delta t} - \beta|_t}{\Delta t} \right). \quad (5.12)$$

Desta vez:

$$\begin{aligned} \alpha|_t = \beta|_t &= 0, \\ \alpha|_{t+\Delta t} + \beta|_{t+\Delta t} &= \arctan \frac{\Delta l_x}{\Delta y} + \arctan \frac{\Delta l_y}{\Delta x} \\ &\approx \frac{\Delta l_x}{\Delta y} + \frac{\Delta l_y}{\Delta x}, \end{aligned} \quad (5.13)$$



**Figura 5.3:** Deformação de cisalhamento no plano  $(x, y)$  de um elemento de fluido em escoamento.

onde

$$\Delta l_x = (v_x|_{y+\Delta y} - v_x|_y) \Delta t, \quad (5.14)$$

$$\Delta l_y = (v_y|_{x+\Delta x} - v_y|_x) \Delta t. \quad (5.15)$$

Substituindo as equações (5.15), (5.14), e (5.13) em (5.12), obtém-se:

$$\frac{1}{2} \frac{d(\alpha + \beta)}{dt} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left[ (v_x|_{y+\Delta y} - v_x|_y) \frac{\Delta t}{\Delta y} + (v_y|_{x+\Delta x} - v_y|_x) \frac{\Delta t}{\Delta x} \right]}{\Delta t}. \quad (5.16)$$

Para  $\Delta x$  e  $\Delta y$  suficientemente pequenos:

$$\frac{1}{2} \frac{d(\alpha + \beta)}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \quad (5.17)$$

que é a taxa de deformação no plano  $(x, y)$ . Uma dedução análoga pode ser feita para as taxas de deformação nos planos  $(x, z)$  e  $(y, z)$ .

Finalmente, para facilitar e uniformizar a notação, as taxas de deformação linear e de cisalhamento podem ser combinadas para formar o *tensor taxa de deformação*  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Note que  $\mathbf{D}$  é um tensor simétrico.

## 5.2 ROTAÇÃO DE UM FLUIDO: VORTICIDADE

Considere agora a figura 5.3, porém, imagine que os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  tivessem ambos o mesmo sentido de rotação (na figura 5.3 os ângulos estão em sentidos opostos). Claramente, neste caso, temos o que se assemelharia mais a uma rotação que a uma simples deformação. Assim, definimos a taxa de rotação de forma análoga à taxa de deformação de cisalhamento, porém com um dos ângulos com sinal trocado:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\beta}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} \right) = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\beta|_{t+\Delta t} - \beta|_t}{\Delta t} - \frac{\alpha|_{t+\Delta t} - \alpha|_t}{\Delta t} \right). \quad (5.19)$$

Analogamente ao caso da deformação o que temos é:

$$\frac{1}{2} \frac{d(\beta - \alpha)}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \quad (5.20)$$

que dá, essencialmente, a velocidade angular local da partícula de fluido em torno do eixo  $z$ . Podemos definir esta velocidade como a componente  $z$  de um vetor velocidade angular. Aplicando a mesma ideia para a rotação nos planos  $(x, z)$  e  $(y, z)$ , temos então um vetor velocidade angular:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (5.21)$$

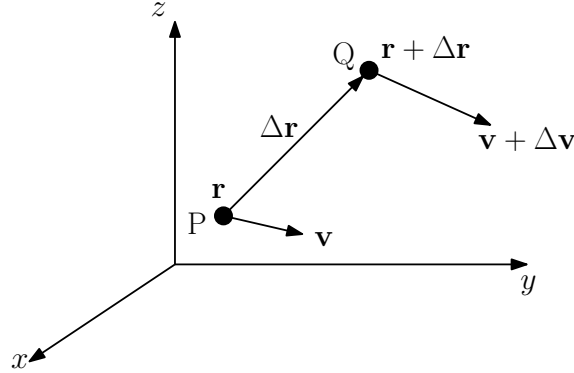
Ao que aparece entre parênteses em 5.21, dá-se o nome de *vorticidade*, ou seja, a vorticidade é um vetor igual a duas vezes a velocidade angular do fluido em um ponto, e portanto mede a taxa de rotação no ponto. Claramente, pode-se perceber que a vorticidade  $\boldsymbol{\omega}$  é igual ao rotacional do campo de velocidades:

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \equiv \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \nabla \times \mathbf{v} \quad (5.22)$$

### 5.2.1 LINHA E TUBO DE VORTICIDADE

Dado um campo vetorial de velocidades  $\mathbf{v}$  de um fluido, é possível calcular o campo de vorticidade  $\boldsymbol{\omega}$  associado a esse campo de velocidades, simplesmente aplicando-se o rotacional de  $\mathbf{v}$ , dado pela equação 5.22. Assim como definimos linha de corrente como as linhas às quais os vetores velocidade são tangentes a elas, podemos, analogamente definir linhas cujos vetores vorticidade são tangentes a elas, ou, *linhas de vorticidade*. Essas linhas são definidas pelas equações:

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}. \quad (5.23)$$



**Figura 5.4:** Movimento relativo.

Analogamente a um tubo de corrente, o tubo de vorticidade é uma superfície gerada por linhas de vorticidade adjacentes. Um exemplo prático aproximado de um tubo de vorticidade é o funil de um tornado ou de um furacão.

Se em uma região do domínio o escoamento é tal que a vorticidade é nula, ou seja,  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = 0$ , tal escoamento é chamado de escoamento *irrotacional* ou *potencial*, naquela região.

### 5.3 MOVIMENTO RELATIVO

Vamos considerar agora o movimento relativo entre dois pontos próximos em um fluido. Sejam dois pontos próximos P e Q, separados por um vetor distância  $\Delta \mathbf{r} \equiv (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ , e cujas velocidades são, respectivamente,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$ . A figura 5.4 ilustra a situação. A velocidade de Q relativa a P,  $\Delta \mathbf{v}$ , pode ser expressa em termos de diferenciais:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v} &= (\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z) = \\ &\left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \Delta z, \right. \\ &\quad \frac{\partial v_y}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v_y}{\partial z} \Delta z, \\ &\quad \left. \frac{\partial v_z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v_z}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v_z}{\partial z} \Delta z \right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

A equação 5.24 pode ser reescrita de forma muito mais conveniente como:

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{G} \Delta \mathbf{r} \quad (5.25)$$

onde a matriz  $\mathbf{G} \equiv \nabla \mathbf{v}$  é chamada *tensor gradiente de velocidade*, e definida por:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

O tensor  $\mathbf{G}$  é, portanto, uma medida local do movimento relativo entre duas partículas vizinhas.

Note que:

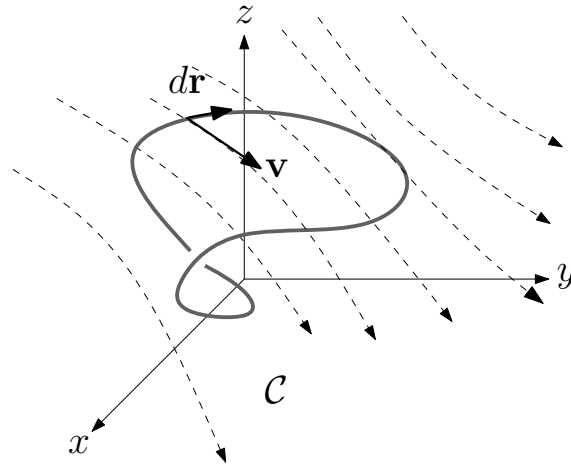
$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (5.27) \end{aligned}$$

A última matriz na equação 5.27 é chamada de *tensor de rotação*  $\mathbf{R}$ , é anti-simétrica, e pode ser escrita em termos das componentes de vorticidade como:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\equiv \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5.28) \end{aligned}$$

A conclusão é que qualquer movimento relativo entre 2 partículas infinitesimalmente próximas é uma combinação (soma) entre deformação pura e rotação pura:

$$\mathbf{G} = \mathbf{D} + \mathbf{R}. \quad (5.29)$$



**Figura 5.5:** Definição de circulação.

## 5.4 CIRCULAÇÃO

Por definição, a circulação  $\Gamma$  é definida como uma integral de linha orientada do produto interno entre o vetor velocidade do fluido e o vetor elemento da linha, ao longo de uma linha fechada:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}. \quad (5.30)$$

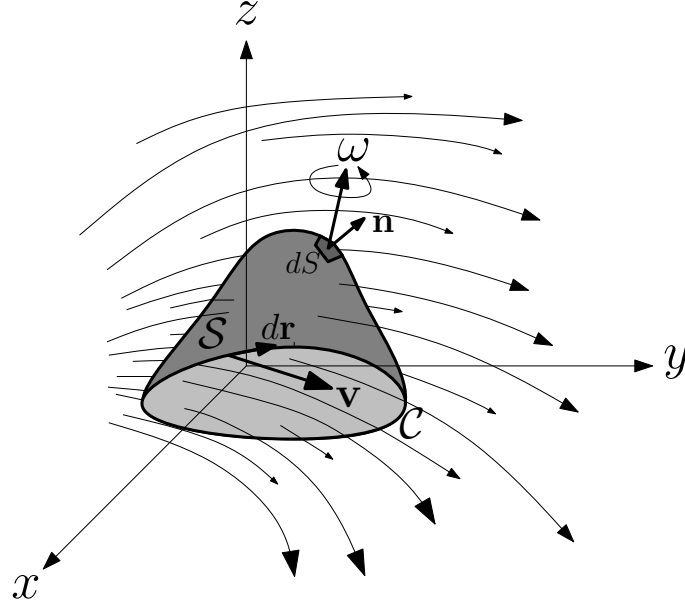
O conceito é análogo ao conceito de trabalho de uma força ao longo de um circuito fechado. Veja a ilustração na figura 5.5. Pelo teorema de Stokes

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}, \quad (5.31)$$

temos uma ligação entre o conceito de circulação e o conceito de vorticidade. Especificamente, para calcular a circulação causada por um campo de velocidades  $\mathbf{v}$ , uma maneira alternativa à integral de linha 5.30, é usar o Teorema de Stokes juntamente com a definição de vorticidade  $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{v}$ :

$$\Gamma = \int_S (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (5.32)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal ao elemento de área  $dS$ , e a integral é o fluxo sobre uma superfície qualquer  $S$  que passa por  $C$ . A figura 5.6 ilustra a conexão entre o fluxo de vorticidade e a circulação.



**Figura 5.6:** Conexão entre a circulação e o fluxo de vorticidade.

### EXEMPLO

Rotação de corpo sólido. Considere um balde com água colocado lentamente em rotação em torno do seu eixo até atingir uma velocidade angular final  $\Omega$ . O efeito viscoso irá então fazer com que o fluido se mova paralelamente às paredes do balde, em círculos concêntricos. Após um período transiente, espera-se que todo o fluido esteja se movendo apenas com velocidade na direção tangencial, e nenhuma variação na direção vertical. Ou seja, o fluido se move como se fosse um corpo sólido. A figura 5.7 ilustra vistas lateral e superior do balde. A velocidade do fluido pode ser expressa em coordenadas polares cilíndricas:

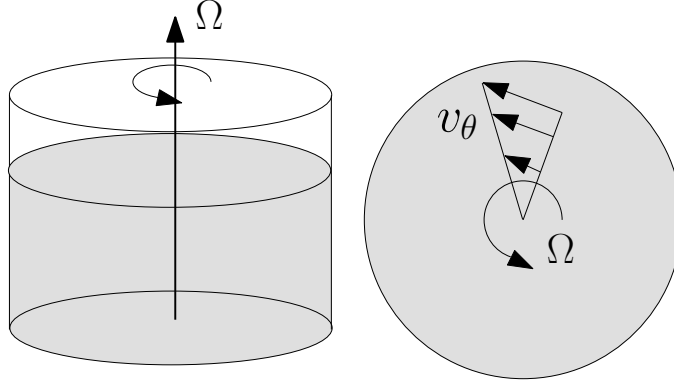
$$v_r = 0, \quad v_\theta = \Omega r. \quad (5.33)$$

Embora seja possível usar coordenadas polares, a vorticidade pode ser calculada em termos de coordenadas cartesianas, já que  $r^2 = x^2 + y^2$ . Então,

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0) = (-\Omega y, \Omega x, 0). \quad (5.34)$$

A vorticidade terá então somente componente  $z$ :

$$\boldsymbol{\omega} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = (0, 0, 2\Omega) \quad (5.35)$$



**Figura 5.7:** Fluido em rotação como se fosse um corpo sólido.

A circulação em torno do eixo de rotação ao longo de uma circunferência de raio  $R$  é dada por:

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} v_\theta R d\theta = 2\pi R(\Omega R) = 2\pi\Omega R^2. \quad (5.36)$$

A circulação pode também ser calculada pelo fluxo de vorticidade através do disco de raio  $R$  circundado pela linha da integral acima:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_0^{2\pi} \int_0^R (0, 0, 2\Omega) \cdot (0, 0, 1) r dr d\theta \\ &= 2\pi 2\Omega \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^R = 2\pi\Omega R^2. \end{aligned} \quad (5.37)$$

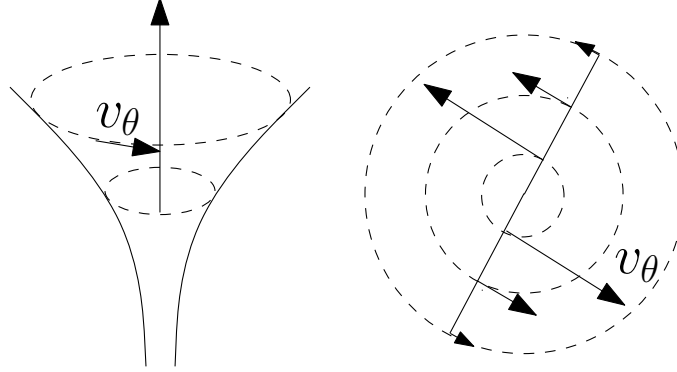
■

#### EXEMPLO

Modelo de furacão. Considere um modelo simplificado de um furacão (ou de um ralo que drena água de uma banheira). A figura 5.8 ilustra vistas lateral e superior do escoamento. A velocidade tangencial do fluido pode ser expressa em coordenadas polares cilíndricas por:

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{c}{r}, \quad (5.38)$$

onde  $c$  é uma constante. A vorticidade pode ser calculada em termos de coordenadas cartesianas, lembrando que  $r^2 = x^2 + y^2$ .



**Figura 5.8:** Fluido em rotação tipo furacão.

Então,

$$\mathbf{v} = \left( \frac{-cy}{x^2 + y^2}, \frac{cx}{x^2 + y^2}, 0 \right). \quad (5.39)$$

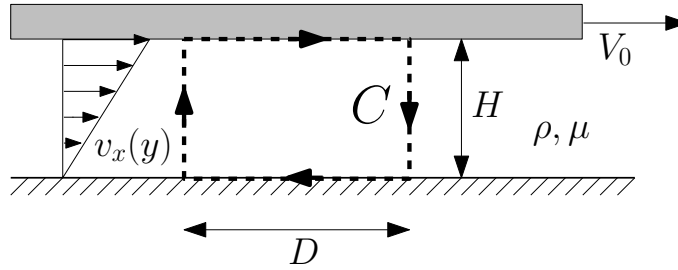
A vorticidade para este campo de velocidades é nula (verifique este resultado). A circulação em torno do eixo de rotação ao longo de uma circunferência de raio  $R$  é dada por:

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} v_\theta R d\theta = 2\pi R \frac{c}{R} = 2\pi c. \quad (5.40)$$

O resultado é aparentemente contraditório, pois o escoamento é irrotacional, porém produz circulação não nula. Entretanto, não há nada de errado com este resultado. Note que a vorticidade de fato é zero em todo o domínio do problema, exceto na origem, onde sequer a velocidade é definida, pois tende a  $\pm\infty$ . Note que a vorticidade tende a  $+\infty$  na origem (há uma descontinuidade infinita na velocidade). Este fato é que faz com que haja circulação em torno da origem: toda a vorticidade está concentrada na origem e o escoamento responde a isso com uma circulação não-nula, mesmo que ele seja irrotacional fora da origem. ■

## 5.5 PROBLEMAS PROPOSTOS

1. Para o campo de velocidades do experimento de Newton mostrado na figura 5.9, calcule:
  - a) o tensor taxa de deformação para um ponto no meio das duas placas;



**Figura 5.9:** Rotação, deformação, e circulação no experimento de Newton.

- b) o tensor de rotação para um ponto no meio das duas placas;
- c) a circulação ao longo do contorno  $C$  (ver figura) usando a integral de linha;
- d) a circulação ao longo do contorno  $C$  (ver figura) usando a integral de superfície (teorema de Stokes).

*Resposta:* (a,b)  $D_{xy} = D_{yx} = -R_{xy} = -R_{yx} = R_{xx} = R_{yy} = 0$ , demaiss componentes nulos; (c,d)  $\Gamma = V_0 D$ .

2. Prove que, no caso de rotação como corpo rígido, o fluido não se deforma, ou seja, todos os elementos do tensor taxa de deformação são nulos.
3. Prove que, no modelo de furacão, a velocidade  $(v_r, v_\theta, v_z) = (0, c/r, 0)$ , quando escrita em coordenadas cartesianas dá:

$$\mathbf{v} = \left( \frac{-cy}{x^2 + y^2}, \frac{cx}{x^2 + y^2}, 0 \right), \quad (5.41)$$

4. Usando coordenadas cartesianas, e uma integral de linha em torno do eixo de rotação, prove que, no modelo de furacão, a circulação em torno do eixo de rotação é igual a  $2\pi c$ .
5. Usando coordenadas cartesianas, prove que, no modelo de furacão, a vorticidade é zero em todos os pontos, exceto na origem, onde a vorticidade é infinita.
6. Sabendo que em coordenadas polares cilíndricas a componente vertical da vorticidade é definida por

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}, \quad (5.42)$$

calcule  $\omega_z$  diretamente em coordenadas polares a partir de (a)  $(v_r, v_\theta, v_z) = (0, c/r, 0)$  (modelo de furacão); e (b)  $(v_r, v_\theta, v_z) = (0, \Omega r, 0)$  (rotação como de um corpo rígido).

*Resposta:* (a)  $\omega_z = 0$  em todos os pontos exceto na origem, onde  $\omega_z = \infty$ ; (b)  $\omega_z = \Omega$ .

## CAPÍTULO 6

# FLUXOS DIFUSIVOS: EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

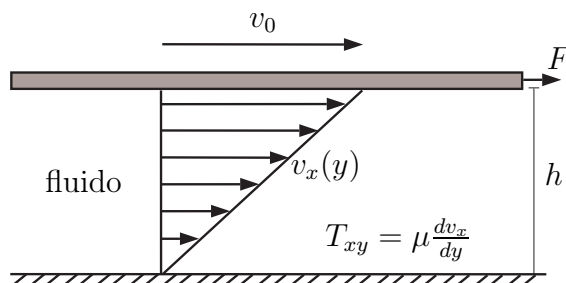
Neste capítulo serão apresentadas as chamadas equações ou leis constitutivas para a transferência de quantidade de movimento, massa, e calor. As equações constitutivas são, por assim dizer, o elo entre as propriedades moleculares e as propriedades macroscópicas do meio contínuo. Estas equações não são propriamente leis fundamentais como as leis de conservação, e sim equações empíricas que carregam como único princípio fundamental a segunda lei da termodinâmica.

### 6.1 TRANSFERÊNCIA DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO

No capítulo anterior foram obtidas as taxa de deformação de um fluido em função do campo de velocidades do mesmo. Resta agora estabelecer a relação dessas taxas com as tensões surgidas no fluido. Em fenômenos de transferência e em mecânica dos fluidos, esta relação chama-se *equação* ou *lei constitutiva* para a quantidade de movimento. Esta equação pode ser obtida empiricamente através de experiências de laboratório, ou através de modelação matemática da estrutura molecular da matéria. Neste texto, supõe-se que as equações constitutivas são proposições empíricas obtidas experimentalmente, válidas para um conjunto de materiais.

No caso da transferência de quantidade de movimento, a equação constitutiva estabelece uma relação entre tensão tangencial e a taxa de deformação devido a esta tensão.

A equação constitutiva da transferência de quantidade de movimento, por



**Figura 6.1:** O experimento de Newton de transferência de quantidade de movimento.

esta ser uma grandeza vetorial, é bem mais complexa que as de massa e de calor. Por isso ela será apresentada primeiramente no contexto clássico do experimento de Newton: um escoamento cisalhante unidirecional.

### *O experimento de Newton*

Imagine um fluido de espessura  $h$  confinado entre um fundo rígido e uma placa móvel na fronteira superior, como mostra a figura 6.1. Exercendo-se uma força  $F$  constante na placa superior, a placa se move com velocidade  $v_0$ , e aparece uma tensão tangencial  $T_{xy}$  na parte superior do fluido:

$$T_{xy} = \frac{F}{A} \quad , \quad (6.1)$$

onde  $A$  é a área da placa.

Observa-se então que a massa fluida entra em escoamento no sentido do movimento da placa. Entretanto, nem todas as partículas de fluido se movem com a mesma velocidade. Estabelece-se um perfil de velocidades, ou seja, uma distribuição espacial de velocidades  $v_x(y)$ , sendo  $v_x(0) = 0$  e  $v_x(h) = v_0$  (estas são as chamadas condições de não-deslizamento, pois implicam que as partículas de fluido em contato com uma fronteira sólida têm a velocidade da fronteira).

A distribuição de velocidades ocorre devido à transferência de quantidade de movimento da placa para o fluido, e entre camadas de fluido adjacentes. O mecanismo se dá da seguinte forma. Inicialmente o fluido e a placa estão em repouso. Quando a placa superior entra em movimento, ela arrasta consigo as partículas que estão aderidas a ela, e estas por sua vez, transferem parte

de sua quantidade de movimento para as que estão imediatamente abaixo, e assim por diante para as camadas abaixo. Note que, como o fundo é fixo, este tende a *frear* a camada de fluido imediatamente acima. A transferência de quantidade de movimento deve ser entendida como existindo nos dois sentidos, ou seja, partículas de fluido com maior velocidade que o seu entorno tendem a aumentar a velocidade do seu entorno, enquanto que partículas com menor velocidade tendem a diminuir a velocidade do seu entorno (a transferência neste caso é *negativa*, por assim dizer).

Estas transferências de quantidade de movimento se dão devido a interações a nível microscópico entre moléculas que estão próximas umas das outras, e têm a ver com o fato de que as moléculas em uma camada de fluido (mesmo este estando macroscopicamente em repouso) estão em constante agitação e se há uma velocidade média (lembre-se da ideia da velocidade do centro de massa de um sistema visto no capítulo 2) maior que a das moléculas de uma camada vizinha, haverá uma transferência de quantidade de movimento do fluido devido aos choques aleatórios entre as moléculas dessas camadas, e ao fato de que estas camadas irão *trocar* moléculas com quantidades de movimento médias diferentes entre si.

Repare que a variação da velocidade em  $y$ ,  $dv_x/dy$ , é a taxa de deformação, e que esta é, portanto, um indicador da taxa de transferência de quantidade de movimento, ou fluxo específico difusivo de quantidade de movimento.

Newton<sup>1</sup> observou empiricamente que, para muitos fluidos (os chamados *fluidos newtonianos*, conforme explicado na próxima seção), há uma proporcionalidade entre a tensão tangencial e a taxa de deformação, e que a constante de proporcionalidade é uma propriedade intrínseca do material, à qual denominou *viscosidade absoluta* ou *viscosidade dinâmica*,  $\mu$ . Assim:

$$T_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} . \quad (6.2)$$

Por razões práticas, se trabalha também com a chamada *viscosidade cinemática*, definida por:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} , \quad (6.3)$$

dando a (6.2) a forma:

$$T_{xy} = \rho \nu \frac{\partial v_x}{\partial y} . \quad (6.4)$$

A unidade SI da viscosidade dinâmica é  $[\mu] = \text{Pa s}$ , e da viscosidade cinemática é  $[\nu] = \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ .

---

<sup>1</sup>Sir Isaac Newton (1642-1727) - Filósofo, matemático, físico - inventou o cálculo diferencial e integral, criou a mecânica (newtoniana), e descobriu a lei da gravitação. É, ao lado de René Descartes, o responsável pelo paradigma científico sob o qual vive-se hoje.

Neste ponto o leitor atento deve estar se perguntando se não deveria haver processos térmicos ocorrendo sempre que ocorrem transferências de quantidade de movimento por tensões viscosas. Ainda com relação ao exemplo da placa posta em movimento sobre um fluido, para manter a placa com uma velocidade constante é necessário que haja uma força sobre a placa, e essa força realiza trabalho, que alimenta de energia o interior do fluido. Como o interior do fluido tem energia mecânica constante (já que a velocidade da placa se mantém constante), este constante *input* de energia que vem do mecanismo que puxa a placa (seja ele qual for) está sendo perdido, ou melhor, está sendo transformado em energia interna do fluido. De fato, *sempre* que há deformação em um fluido, há perda de energia mecânica para energia interna.

Obviamente, em um fluido em repouso não há deformação, muito embora haja um campo de tensões dado pelo campo de pressão:

$$\mathbf{T}_{\text{repouso}} = -p\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. Por isso é conveniente separar o tensor de tensões em duas partes: a parte hidrostática, que não é capaz de deformar o fluido, e a parte dinâmica  $\mathbf{T}'$ :

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}'. \quad (6.6)$$

A equação (6.2) ou (6.4) é a equação constitutiva de transferência de quantidade de movimento para um fluido em escoamento cisalhante em uma única direção. No caso geral, onde há taxa de deformação linear, volumétrica, e de cisalhamento nas três dimensões, a proporcionalidade entre tensões dinâmicas  $\mathbf{T}'$  e as taxas de deformação é mais complexa e dada pela seguinte relação:

$$\mathbf{T}' = -\frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, \quad (6.7)$$

onde  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  corresponde à deformação volumétrica e  $\mathbf{D}$  é o tensor taxa de deformação dado por (5.18). (na equação acima estão incluídas suposições que estão além do escopo deste texto introdutório: a isotropia nas relações entre tensões e deformações do fluido, e a hipótese de Stokes<sup>2</sup>, que em última instância diz que o valor médio das tensões *normais*  $(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz})/3$ , tem módulo igual à pressão termodinâmica  $p$ . Para uma exposição mais detalhada, ver Kundu (1990) ou Batchelor (1967).

---

<sup>2</sup>Sir George Gabriel Stokes (1819-1903) - Excepcional físico-matemático cuja obra na área de mecânica dos fluidos e dos sólidos é inestimável.

A equação constitutiva geral para a transferência de quantidade de movimento é dada pela relação entre o tensor de tensões  $\mathbf{T}$  e o tensor taxas de deformação  $\mathbf{D}$  é:

$$\mathbf{T} = - \left[ p + \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}. \quad (6.8)$$

Em muitos casos (especialmente de líquidos), o fluido pode ser considerado incompressível ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ). Nesses casos a equação constitutiva (6.8) se reduz a:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}. \quad (6.9)$$

### EXEMPLO

Seja o seguinte campo de velocidades em um plano horizontal:

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = v_\infty \left( \frac{y}{L} \mathbf{e}_x + \frac{x}{L} \mathbf{e}_y \right). \quad (6.10)$$

Conhecendo-se o campo de pressões  $p(x, y)$ , determine o tensor de tensões  $\mathbf{T}$ .

### Solução

O tensor de tensões é dado pela equação (6.8):

$$\mathbf{T} = - \left[ p + \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}. \quad (6.11)$$

A parte da tensão relacionada à deformação volumétrica é nula, já que

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (6.12)$$

O tensor taxas de deformação é dado por::

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Multiplicando o tensor acima por  $2\mu$  e substituindo  $v_x = v_\infty \frac{y}{L}$ ,  $v_y = v_\infty \frac{x}{L}$ , e  $v_z = 0$ :

$$2\mu \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2\mu v_\infty}{L} & 0 \\ \frac{2\mu v_\infty}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Note que a última coluna e a última linha da matriz de deformações são nulas, o que é de se esperar, já que se trata de um escoamento bidimensional  $(x, y)$ . O tensor de tensões, incluindo a pressão será dado portanto por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -p(x, y) & \frac{2\mu v_\infty}{L} & 0 \\ \frac{2\mu v_\infty}{L} & -p(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

■

### EXEMPLO

A distribuição de velocidades para um escoamento em um tubo circular é:

$$v(r) = v_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (6.16)$$

onde  $R$  é o raio do tubo. Se a viscosidade dinâmica do fluido é  $\mu$ , determine a força por unidade de comprimento que as paredes do tubo exercem sobre o escoamento.

### Solução

A força que a parede do tubo exerce sobre o fluido será devido à tensão de cisalhamento na fronteira entre o tubo e o fluido. A tensão de cisalhamento dentro do fluido é dada por:

$$\begin{aligned} T_{xr} &= \mu \frac{\partial v}{\partial r} = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left\{ v_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \right\} \\ &= \mu v_0 \left[ -2 \left( \frac{r}{R} \right) \frac{1}{R} \right] = -\frac{2\mu v_0 r}{R^2}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

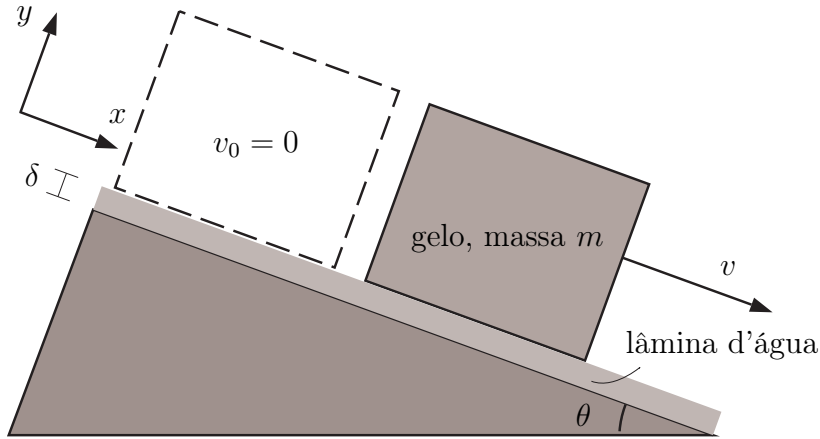
Na parede do tubo,  $r = R$  e a tensão é:

$$T_{xr} = \frac{-2\mu v_0}{R}. \quad (6.18)$$

A força por unidade de comprimento de tubo será igual à tensão  $T_{xr}$  em  $r = R$  vezes a perímetro da seção do tubo:

$$F = T_{xr} \times (2\pi R) = -4\pi\mu v_0. \quad (6.19)$$

■



**Figura 6.2:** Bloco de gelo deslizando em um plano inclinado.

### EXEMPLO

Um bloco de gelo de massa  $m$  desliza em um plano inclinado com velocidade  $v$  a partir do repouso, sobre uma lâmina de água de espessura  $\delta$ , como mostra a figura 6.2. A viscosidade da água é  $\mu$ , e a área da base do bloco é  $A$ . Supondo uma distribuição linear (na direção normal ao plano inclinado) de velocidades na lâmina de água, obtenha:

- A equação diferencial para a velocidade do bloco.
- A velocidade final do bloco.

### Solução

(a) A equação do movimento para bloco de gelo com velocidade  $v$  é dada pela segunda lei de Newton:

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \theta - F_a, \quad (6.20)$$

onde  $F_a$  é a força de atrito da água sobre o gelo. Esta força de atrito é devido à viscosidade da água, e pode ser calculada

conhecendo-se a tensão cisalhante existente no topo da lâmina:

$$T_{xy} = \mu \frac{\partial v_a}{\partial y}, \quad (6.21)$$

onde  $v_a$  é a velocidade da água. Como a distribuição da velocidade  $v_a$  em  $y$  é linear, e esta deve ser nula no plano inclinado e igual a  $v$  na superfície de contato com o gelo, então:

$$\frac{\partial v_a}{\partial y} = \frac{v}{\delta}, \quad (6.22)$$

de modo que

$$F_a = \mu A \frac{v}{\delta}, \quad (6.23)$$

e a equação (6.20) fica:

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{\mu A}{\delta} v = mg \sin \theta. \quad (6.24)$$

(b) Definindo:

$$v_1 = \frac{m \delta g \sin \theta}{\mu A}, \quad (6.25)$$

a equação (6.24) pode ser resolvida como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (v - v_1) + \frac{\mu A}{m \delta} (v - v_1) &= 0, \\ \frac{d(v - v_1)}{(v - v_1)} &= -\frac{\mu A}{m \delta} dt, \\ \ln(v - v_1) &= -\frac{\mu A}{m \delta} t + \ln v_2, \\ v - v_1 &= v_2 \exp\left(-\frac{\mu A}{m \delta} t\right), \\ v &= v_1 + v_2 \exp\left(-\frac{\mu A}{m \delta} t\right). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Como em  $t = 0$  a velocidade é nula:

$$v_2 = -v_1 = -\frac{m \delta g \sin \theta}{\mu A}, \quad (6.27)$$

então

$$v = \frac{m \delta g \sin \theta}{\mu A} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\mu A}{m \delta} t\right) \right]. \quad (6.28)$$

A velocidade final do bloco se dá quanto  $t \rightarrow \infty$  e o termo exponencial tende a zero:

$$v_f = \frac{m\delta g \sin\theta}{\mu A}. \quad (6.29)$$

■

### 6.1.1 FLUIDOS NEWTONIANOS E NÃO-NEWTONIANOS

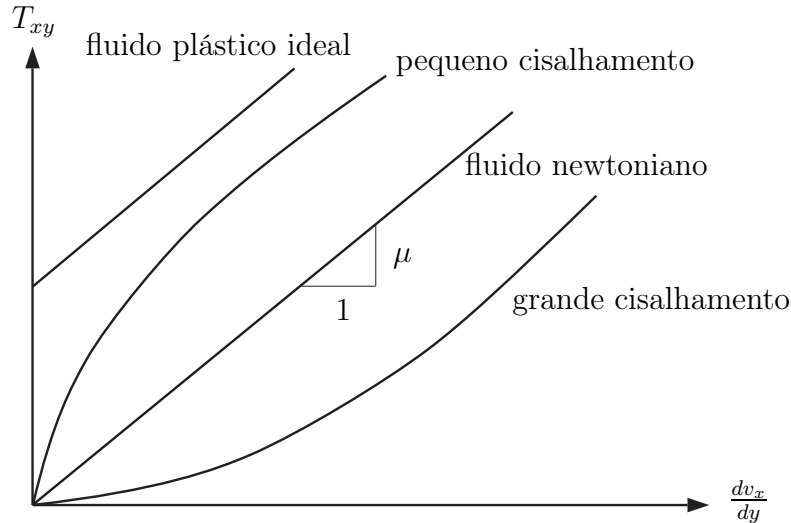
A viscosidade de um fluido é a medida de sua resistência à deformação. Ao se submeter água e glicerina à mesma tensão  $T_{xy}$  durante um intervalo de tempo  $\Delta t$ , a água resistirá menos (e portanto se deformará mais) que a glicerina, pois esta tem maior viscosidade.

Todo fluido que obedece às equações constitutivas dadas na seção anterior é chamado fluido newtoniano. Os fluidos newtonianos constituem a maioria dos gases e líquidos existentes em condições normais e de interesse em engenharia e ciências da terra. Alguns exemplos de fluidos newtonianos são: água, ar, glicerina, vários tipos de óleo, etc.. Fluidos que não obedecem a tais relações são chamados de fluidos não-newtonianos, e podem apresentar diversos tipos de equações constitutivas diferentes das dos fluidos newtonianos. A figura 6.3 mostra curvas relacionando tensão e taxa de deformação para vários tipos de fluido.

### 6.1.2 A VISCOSIDADE COMO FUNÇÃO DA TEMPERATURA

A viscosidade de qualquer fluido varia sensivelmente com a temperatura. Como foi dito anteriormente, a viscosidade pondera a transmissão de quantidade de movimento no interior de uma massa fluida. No caso dos líquidos, como se sabe, as forças de coesão molecular são fortes se comparadas com as dos gases, e com o aumento da temperatura, o espaçamento médio entre as moléculas aumenta, e essas forças se enfraquecem, diminuindo o atrito entre as camadas de fluido em movimento relativo. Portanto, é de se esperar que, em líquidos, a viscosidade diminua com o aumento da temperatura.

No caso dos gases, as forças de coesão intermolecular são desprezíveis (devido ao grande espaçamento entre as moléculas) e o comportamento do material em relação à viscosidade é avaliado frente aos movimentos aleatórios das moléculas gasosas. Este movimento aumenta consideravelmente com o aumento da temperatura (na realidade o aumento da temperatura é exatamente uma manifestação desse aumento da agitação das moléculas), intensificando o choque entre as partículas, o que acarreta um aumento da tensão viscosa e da viscosidade.



**Figura 6.3:** Tensão  $\times$  taxa de deformação para vários tipos de fluido.

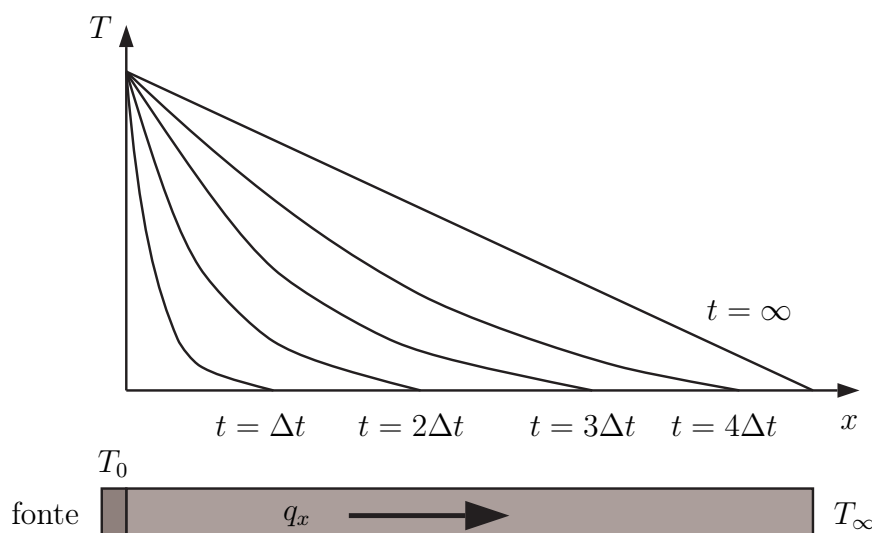
## 6.2 TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Assim como em fluidos há transferência de quantidade de movimento quando há *gradientes* de velocidade (na realidade taxas de deformação espaciais), em qualquer meio contínuo há transferência de energia térmica (calor) por condução sempre que há gradientes de temperatura. A equação constitutiva que relaciona gradiente de temperatura e fluxo de calor por condução é conhecida como *lei de Fourier*.

### 6.2.1 LEI DE FOURIER PARA A CONDUÇÃO DE CALOR

Primeiramente, é preciso se explicitar que pode haver transferência de calor por advecção, ou seja, um fluido mais quente em escoamento pode transferir calor de uma região do espaço a outra simplesmente por efeito da translação das partículas. A lei de Fourier trata apenas da transferência de calor por *condução*, ou seja, pela difusão desta propriedade causada pelo contato entre pontos com diferentes temperaturas (agitação molecular).

Para introduzir as ideias de transferência de calor por condução pura, é mais fácil considerar um sólido em vez de um fluido. Considere uma barra longa e esbelta constituída de um material homogêneo e isotrópico, estando inicialmente toda ela à mesma temperatura. Se em uma extremidade for



**Figura 6.4:** Condução de calor em uma barra.

colocada uma fonte de calor, obviamente esta extremidade da barra ficará mais quente que o seu restante. Esta situação caracteriza um *desequilíbrio* térmico, que ocasionará um fluxo de calor no sentido oposto ao gradiente de temperatura, ou seja, da extremidade mais quente para a mais fria.

Usando o mesmo raciocínio do caso de transferência de quantidade de movimento, suponha que a barra seja formada por uma sequência de lâminas transversais (perpendiculares à direção de sua maior dimensão) imaginárias. A lâmina junto à fonte de calor estará mais quente que sua vizinha, que, por sua vez, estará mais quente que a próxima, etc. (figura 6.4). Assim como no caso da quantidade de movimento, lâminas vizinhas irão trocar calor devido a haver entre elas trocas e choques de moléculas com maior agitação (maior energia interna, portanto maior temperatura) com moléculas com menor agitação. Em sólidos como metais há também grande contribuição na condução de calor devido à transferência de elétrons livres.

A transferência de calor por condução no sentido oposto ao gradiente de temperatura é expressa através do *vetor fluxo de calor*  $\mathbf{q}$ . Em muitos materiais, a relação entre o fluxo de calor e o gradiente de temperatura (lembrando mais uma vez que a temperatura se relaciona com a energia

interna em um ponto) é linear. No caso de uma barra na direção  $x$ :

$$q_x = -K \frac{dT}{dx} , \quad (6.30)$$

onde  $K$  é a chamada *condutividade térmica*. No caso tridimensional:

$$\mathbf{q} = -K \nabla T. \quad (6.31)$$

Define-se *difusividade térmica*  $\alpha$  de um material qualquer como:

$$\alpha = \frac{K}{\rho c_p}, \quad (6.32)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do material e  $c_p$  é o calor específico a pressão constante.

A equação (6.31) é a equação constitutiva para transferência de calor por condução. As unidades SI das variáveis e constantes envolvidas são:

$$\begin{aligned} [\mathbf{q}] &= \text{JM}^{-2}\text{s}^{-1}, & [K] &= \text{Jm}^{-1}\text{s}^{-1}\text{K}^{-1}, \\ [c_p] &= \text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}, & [\alpha] &= \text{m}^2\text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Note que a difusividade térmica  $\alpha$  tem a mesma unidade da viscosidade cinemática  $\nu = \mu/\rho$ .

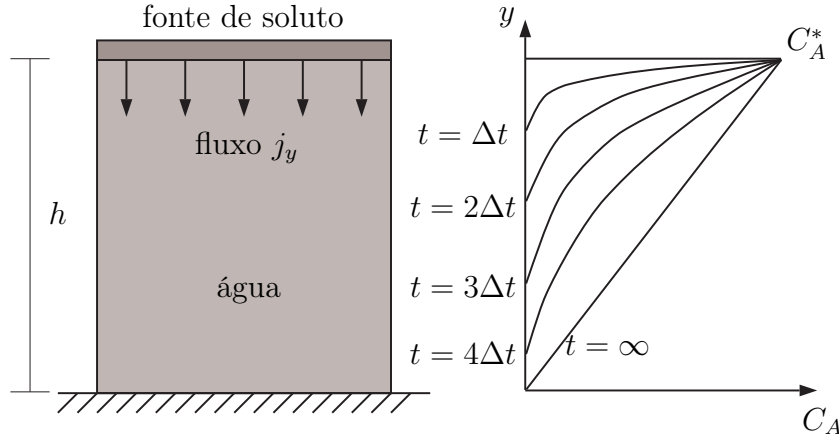
Tanto a condutividade térmica  $K$  quanto a difusividade térmica  $\alpha$  não são constantes para um dado material. São grandezas que variam com diversas propriedades do sistema, inclusive com a temperatura, o que torna a equação (6.31) não-linear e portanto mais complexa. Este assunto será tratado mais adiante onde algumas simplificações permitirão a solução de vários problemas interessantes.

## 6.3 TRANSFERÊNCIA DE MASSA

Finalmente, da mesma forma que nos casos anteriores para transferência de quantidade de movimento (equação de Newton para fluidos viscosos) e de calor (lei de Fourier), pode-se estabelecer uma relação entre o gradiente espacial de concentração  $C_A$  de um soluto em um fluido e a taxa de transferência deste soluto no espaço. A equação constitutiva que fornece esta relação é conhecida como *lei de Fick*.

### 6.3.1 LEI DE FICK PARA DIFUSÃO MOLECULAR

Considere um recipiente com água pura (solvente  $B$ ). Inicialmente não há outra substância no recipiente que não água. Imagine agora que uma camada



**Figura 6.5:** Difusão molecular causando fluxo de massa.

servindo de fonte de algum material solúvel em água (soluto  $A$ ) é colocada em contato com a superfície livre da água como mostra a figura 6.5. Suponha que, por algum mecanismo bio-físico-químico<sup>3</sup>, a concentração do solúvel no fundo seja mantida nula. Como  $A$  é solúvel em água, este se dissolverá *transferindo* parte de sua massa para espaços vazios entre as moléculas da água. Este processo se dá devido à difusão molecular (ver seção 3.3). A concentração do soluto junto à placa será sempre muito alta. Em particular, na interface com uma região onde há ampla disponibilidade de soluto observa-se que a concentração atinge o seu valor de saturação (os espaços disponíveis entre as moléculas de água são totalmente ocupados):

$$C_A = C_A^*, \quad y = h. \quad (6.33)$$

Assim, independentemente das condições no meio fluido, a concentração na interface permanece igual à de saturação. No restante do meio, devido a trocas de moléculas entre camadas adjacentes de fluido de concentrações diferentes, estabelece-se um fluxo de massa na direção de menor concentração e forma-se um perfil contínuo de concentrações similar ao que ocorre com a temperatura, no caso da transferência de calor.

No caso da figura 6.5, o fluxo específico de massa de  $A$  se dá na direção  $y$ . Por definição, o fluxo específico de massa é a massa de  $A$  que atravessa

<sup>3</sup>Por exemplo, pode ser que o soluto seja oxigênio dissolvido, e é consumido por degradação aeróbica ao entrar em contato com a superfície fundo composta por matéria orgânica.

o plano perpendicular ao fluxo (paralelo à placa de açúcar)) por unidade de área por unidade de tempo.

Da mesma forma que nos casos anteriores, a relação entre o fluxo específico difusivo de massa de  $A$ ,  $\mathbf{j}$ , e o gradiente de concentração de  $A$  se dá na forma de uma equação constitutiva, e depende de uma propriedade intrínseca do meio (soluto+solvente) chamada de coeficiente de difusão (ou difusividade) molecular do soluto  $A$  no solvente  $B$ ,  $D_{AB}$ .

A lei de Fick para difusão molecular para o caso unidimensional da figura 6.5 é:

$$j_y = -\rho D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial y} . \quad (6.34)$$

No caso geral de haver uma distribuição tridimensional de concentração, a equação constitutiva de transferência de massa (lei de Fick) é:

$$\mathbf{j} = -\rho D_{AB} \nabla C_A. \quad (6.35)$$

As unidades SI das grandezas envolvidas são:

$$[\mathbf{j}] = \text{kg}_A \text{m}^{-2} \text{s}^{-1}, \quad [C_A] = \text{kg}_A \text{kg}_{AB}^{-1}, \quad [D_{AB}] = \text{m}^2 \text{s}^{-1}.$$

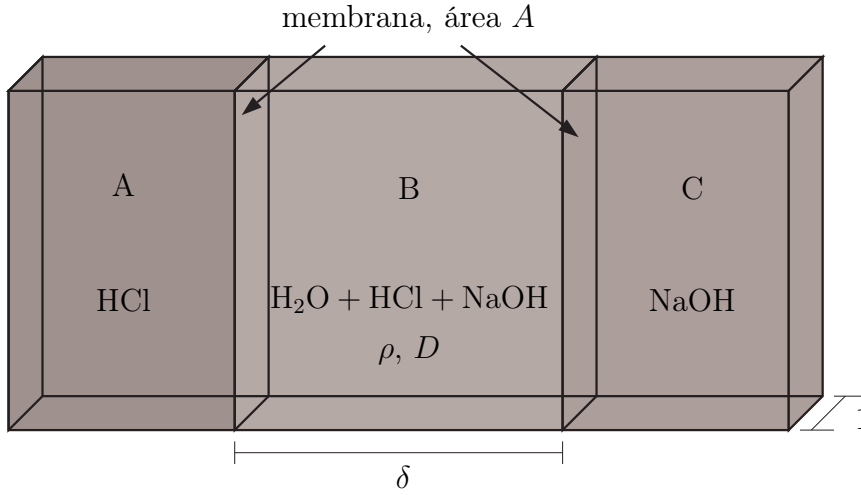
$D_{AB}$  tem a mesma unidade que a viscosidade cinemática  $\nu$  e a difusividade térmica  $\alpha$ .

O coeficiente de difusão molecular depende da pressão, temperatura, e composição química do sistema. Na maioria dos casos a sua determinação é feita por via de experimentos em laboratório.

É de se esperar que este coeficiente seja maior (por volta de três ordens de magnitude) para gases que para líquidos, já que a mobilidade das moléculas é bem maior nos gases. Em sólidos a difusão molecular é ainda menor (por volta de uma ordem de magnitude) que nos líquidos.

### EXEMPLO

Na figura 6.6, os tanques A, B, e C contêm respectivamente HCl, H<sub>2</sub>O, e NaOH. Na interface AB, a concentração de HCl é  $C_0$ . Na interface BC a concentração de HCl é nula, pois o ácido reage com o hidróxido de sódio. Sabendo-se que a difusividade do HCl em água é  $D$ , a área das membranas interfaciais é  $A$  e a massa específica no tanque é  $\rho$ , determine a taxa  $\dot{M}_{\text{HCl}}$ , com que o ácido HCl se difunde através de uma seção transversal em B.



**Figura 6.6:** Fluxo de ácido clorídrico de A para C.

### *Solução*

O fluxo específico de massa será o vetor:

$$\mathbf{j}_{\text{HCl}} = -\rho D \nabla C = -\rho D \frac{0 - C_0}{\delta - 0} \mathbf{e}_x = \rho D \frac{C_0}{\delta} \mathbf{e}_x. \quad (6.36)$$

O fluxo difusivo será:

$$\dot{M}_{\text{HCl}} = j_x A = \rho A D \frac{C_0}{\delta}. \quad (6.37)$$

■

## 6.4 FLUXOS DIFUSIVOS E ADVECTIVOS COMBINADOS

Na seção 3.6 (capítulo 3), foi definido o fluxo advectivo de qualquer grandeza extensiva  $N$  através de uma superfície aberta  $S$  como:

$$\dot{N}_{\text{adv}} = \int_S \eta \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (6.38)$$

onde  $\eta$  é a grandeza intensiva associada a  $N$ . Este fluxo corresponde ao transporte de  $N$  devido ao movimento médio das moléculas de fluido, que se

traduz como a própria velocidade do fluido como um meio contínuo. Sabe-se que, sobreposto a este, há um fluxo de quantidade de movimento, energia, e massa devido à difusão molecular (ver seção 3.3). O fluxo de uma propriedade devido à difusão molecular foi justamente o objeto de estudo deste capítulo (seções 6.1, 6.2, e 6.3).

Na realidade, o fluxo total de uma grandeza  $N$  através de uma superfície é a soma dos fluxos advectivo e difusivo desta grandeza. O fluxo difusivo de massa do soluto  $A$  através de da superfície aberta  $S$  é:

$$\dot{M}_{A\text{dif}} = \int_S (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (6.39)$$

onde  $\mathbf{j}$  é dado pela equação (6.35). O fluxo total de massa de  $A$  através de  $S$  é obtido combinando-se (6.39) com (6.38 para a grandeza massa (equação (3.31)):

$$\dot{M}_A = \dot{M}_{A\text{adv}} + \dot{M}_{A\text{dif}} = \int_S \rho (C_A \mathbf{v} - D_{AB} \nabla C_A) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (6.40)$$

Analogamente, pode-se obter o fluxo total do vetor quantidade de movimento:

$$\dot{\mathbf{P}} = \int_S [\mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})] dS, \quad (6.41)$$

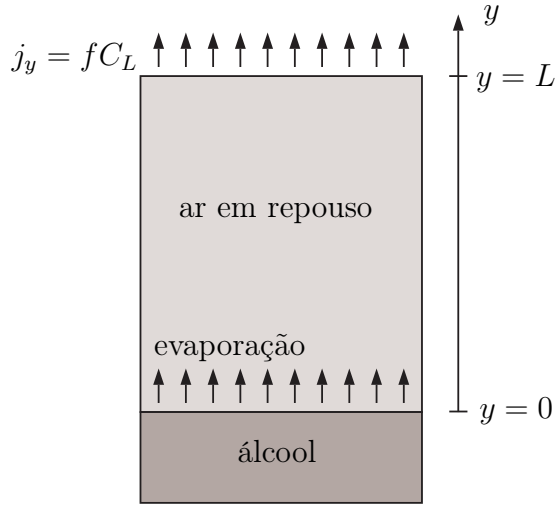
onde,  $\mathbf{T}$  é dada pela equação (6.8), e o produto  $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})$  entre um tensor e um vetor, resultando no vetor tensão, é chamado de uma contração simples.

Finalmente, o fluxo total de energia através de  $S$  é:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \int_S e \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_S (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= \int_S \rho [(e \mathbf{v} - \alpha c_p \nabla T) \cdot \mathbf{n}] dS. \end{aligned} \quad (6.42)$$

## 6.5 A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

Qualitativamente, as equações constitutivas indicam o sentido em que se dá os processos difusivos de transferência de quantidade de movimento, massa, e calor. Note que em todos os casos a segunda lei da termodinâmica é respeitada desde que os valores de  $\mu$ ,  $\alpha$ , e  $D_{AB}$  sejam não-negativos (condições estas necessárias e suficientes), o que obviamente é o caso. Na verdade este é o único (embora crucial) momento em que a segunda lei da termodinâmica é invocada de forma explícita em toda a teoria apresentada neste texto.



**Figura 6.7:** Difusão de álcool no ar em um recipiente.

## 6.6 PROBLEMAS PROPOSTOS

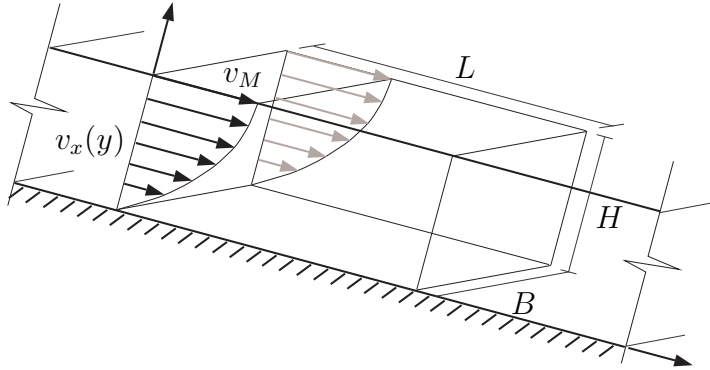
1. A figura 6.7 mostra um recipiente contendo álcool etílico. O álcool evapora para o ar que está totalmente *parado dentro do recipiente*. Na borda superior do recipiente, uma corrente de ar remove constantemente o vapor de álcool à taxa de  $fC_L$  (massa de álcool por unidade de área por unidade de tempo), onde  $C_L$  (desconhecido) é a concentração de álcool em  $y = L$ . Sabendo que a concentração de álcool no ar em  $y = 0$  é  $C_0$ , e que a difusividade molecular do álcool no ar é  $D$ , e supondo que o problema é permanente (não depende do tempo) e unidimensional, obtenha a concentração  $C_L$  em função de  $f$ ,  $L$ ,  $C_0$ ,  $D$ , e da massa específica do ar  $\rho$ .

$$\frac{C_L}{C_0} = \tau_C$$

2. Seja o escoamento de um fluido com viscosidade dinâmica  $\mu$  no canal mostrado na figura 6.8. Admita que o efeito viscoso nas paredes laterais é desprezível. O campo de velocidades é dado por:

$$\mathbf{v} = v_x(y) = 2v_M \left[ \frac{y}{H} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{H} \right)^2 \right]. \quad (6.43)$$

Determine o diagrama de tensões tangenciais na seção transversal e a força sobre o fundo do canal de comprimento  $L$  e largura  $B$ .



**Figura 6.8:** Escoamento em um canal com superfície livre.

$$\frac{H}{2\mu} \frac{dv_x}{dy} = \frac{\rho_2 g H^2}{2\mu} (1 - \frac{y}{H}) \quad \text{Resposta: } v_x = \frac{\rho_2 g H^2}{2\mu} (1 - \frac{y^2}{H^2})$$

3. Suponha que o líquido 1 da figura 4.24 (capítulo anterior) se dilui na interface A entre os 2 líquidos e penetra dissolvido com uma concentração  $C$  no líquido 2. Sabendo que: (i) a difusividade de massa do líquido 1 no líquido 2 é  $D_{12}$  e a densidade da mistura se mantém  $\rho_2$ ; (ii) na superfície livre (interface entre líquido 2 e atmosfera) a concentração  $C = 0$ ; e (iii) na interface A entre os 2 líquidos a concentração é máxima  $C = C_M$ ; (iv) o fluxo de massa através de qualquer seção do tubo com o líquido 2 (comprimento  $d_2$ ) é constante; pergunto: qual é esse fluxo de massa do líquido 1 diluído no líquido 2, em função de  $\rho_2$ , raio do tubo  $R$ ,  $C_M$ ,  $D_{12}$ , e de  $d_2$ .

$$\frac{d_2}{2\pi R^2 D_{12} C_M} = \frac{\rho_2 C_M d_2}{2\pi R^2 D_{12}} \quad \text{Resposta: } \dot{M}_{12} = \frac{\rho_2 C_M d_2}{2\pi R^2 D_{12}}$$

## CAPÍTULO 7

# PRINCÍPIOS DE CONSERVAÇÃO: EQUAÇÕES INTEGRAIS

Neste capítulo são apresentados formalmente três princípios básicos da física: conservação da massa, conservação da quantidade de movimento, e conservação da energia. Essas leis serão aplicadas a problemas de escoamento de fluidos. Embora as leis da física sejam aplicadas a sistemas com identidade fixa, é mais interessante que o comportamento *local* (sem acompanhar o sistema) das grandezas intensivas seja conhecido. Será estabelecido um conjunto de equações integrais de conservação das propriedades físicas em um volume (o *volume de controle*), onde a variação de cada propriedade física (massa específica, velocidade, energia, e concentração de um soluto) no volume se equilibrará com fluxos dessas propriedades na superfície (a *superfície de controle*) no contorno deste volume.

### 7.1 PRINCÍPIOS BÁSICOS DE CONSERVAÇÃO

No capítulo 3 foram apresentadas as relações integrais entre as grandezas extensivas e intensivas (ver tabela 3.1). As equações integrais sobre o volume do sistema relacionando massa com massa específica, quantidade de movimento com velocidade, energia com energia específica, e massa de soluto com

concentração do mesmo, são:

$$M = \int_{V_s} \rho dV, \quad (7.1)$$

$$\mathbf{P} = \int_{V_s} \mathbf{v} \rho dV, \quad (7.2)$$

$$E = \int_{V_s} e \rho dV, \quad (7.3)$$

$$M_A = \int_{V_s} C_A \rho dV, \quad (7.4)$$

respectivamente.

Ora, sabe-se que a massa de um sistema, por definição, deve permanecer constante. Do mesmo modo, a massa de um soluto diluído no sistema permanecerá constante a menos do fluxo difusivo de massa através da superfície do sistema. Quando houver um fluxo difusivo de massa através da superfície, este deverá ser igual em módulo à taxa de variação de massa do soluto dentro do sistema. O fluxo difusivo de massa total através da superfície do sistema ( $S_s$ ) pode ser calculado a partir da integração do vetor fluxo específico de massa  $\mathbf{j}$  sobre  $S_s$ .

$$\dot{J} = - \int_{S_s} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.5)$$

Observe que o sinal negativo indica que o fluxo *para dentro* do sistema seja considerado positivo, já que o vetor  $\mathbf{n}$  aponta para fora, por convenção.

A quantidade de movimento do sistema, segundo à segunda lei de Newton, variará em função da força resultante  $\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_c$  (força de corpo mais força de superfície) sobre ele, onde:

$$\mathbf{F}_c = \int_{V_s} \rho \mathbf{g} dV, \quad (7.6)$$

e

$$\mathbf{F}_s = \int_{S_s} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.7)$$

A energia total do sistema variará em função do fluxo difusivo de calor  $\dot{Q}$  recebido pelo sistema e o trabalho por unidade de tempo  $\dot{W}$  realizado sobre o sistema (primeira lei da termodinâmica). O fluxo difusivo de calor  $\dot{Q}$  é calculado a partir do vetor fluxo específico de calor  $\mathbf{q}$  integrado sobre toda a superfície do sistema:

$$\dot{Q} = - \int_{S_s} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.8)$$

Mais uma vez, fluxo de calor para dentro do sistema é positivo, daí o sinal negativo. Finalmente, o trabalho realizado pelas forças de superfície sobre o sistema por unidade de tempo é:

$$\dot{W} = \int_{S_s} [(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}] dS, \quad (7.9)$$

onde  $\mathbf{v}$  é a velocidade em cada ponto da superfície do sistema. Note que, por  $\mathbf{T}$  ser um tensor,  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$  é um vetor, e não um escalar. Além disso  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$  é uma tensão (força por unidade de área) e  $\mathbf{v} dS$  representa a taxa de variação do volume de um elemento de fluido na fronteira do sistema, de modo que (7.9) é uma generalização da equação (2.26) para o cálculo do trabalho realizado sobre um sistema. O trabalho realizado pelas forças de corpo não precisa ser incluído, uma vez que ele está intrinsecamente contabilizado em termos de energia potencial em (7.3).

A lei da conservação da massa diz que a massa de um sistema não muda com o tempo, e se escreve:

$$0 = \frac{DM}{Dt}, \quad (7.10)$$

onde o operador  $\frac{D}{Dt}$ , chamado de derivada material ou total, é a taxa de variação temporal da grandeza em questão associada a um *sistema*. Ou seja,  $\frac{D}{Dt}$  indica a variação temporal de uma propriedade *extensiva* quando se está *seguindo* ou se movendo com o fluido.

A lei de conservação de massa de um soluto  $A$  diz que a variação de massa de soluto em um sistema deve ser igual ao fluxo difusivo de massa do soluto,  $\dot{J}$ , através das fronteiras do sistema:

$$\dot{J} = \frac{DM_A}{Dt}. \quad (7.11)$$

A lei da conservação da quantidade de movimento diz que a quantidade de movimento de um sistema muda com uma taxa igual ao valor da resultante das forças de corpo  $\mathbf{F}_c$  e de superfície  $\mathbf{F}_s$  atuando no sistema:

$$\mathbf{F}_c + \mathbf{F}_s = \frac{D\mathbf{P}}{Dt}. \quad (7.12)$$

A primeira lei da termodinâmica pode ser escrita como:

$$\dot{Q} + \dot{W} = \frac{DE}{Dt}, \quad (7.13)$$

ou seja, a taxa de variação da energia total do sistema  $\frac{DE}{Dt}$  é igual à soma do fluxo de calor fornecido ao sistema através de sua superfície,  $\dot{Q}$ , e da taxa de

trabalho realizada sobre o sistema,  $\dot{W}$ . Note que esta forma de enunciar a primeira lei é ligeiramente diferente da apresentada no capítulo 2, uma vez que pretende-se obter aqui uma equação instantânea. Aqui, como no capítulo 2,  $\dot{Q}$  é positivo quando calor é fornecido *ao* sistema, e  $\dot{W}$  é positivo quando trabalho é realizado *sobre* o sistema.

As relações (7.10)-(7.13) governam como um sistema com suas propriedades extensivas evoluem no tempo. Os lados esquerdos das equações atuam como forçantes e geralmente são conhecidos ou facilmente determináveis. Os lados direitos são as taxas de variação das propriedades extensivas do sistema. De modo geral, para uma propriedade  $N$ , tem-se  $\frac{DN}{Dt}$ . Como o sistema, por definição, é composto sempre pelas mesmas partículas, a quantidade  $\frac{DN}{Dt}$  irá depender do campo de velocidades pois o sistema poderá ocupar posições diferentes à medida que o tempo passa. Na próxima seção a expressão para  $\frac{DN}{Dt}$  em termos do campo de velocidades é deduzida.

## 7.2 TEOREMA DO TRANSPORTE DE REYNOLDS

Seja  $N(t)$  uma propriedade extensiva qualquer de um sistema no instante  $t$ . A taxa de variação da propriedade  $N$  é dada por:

$$\frac{DN}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}. \quad (7.14)$$

A figura 7.1 ilustra o sistema em 2 instantes consecutivos  $t$  e  $t + \Delta t$ . Em  $t$ , o sistema ocupa um volume  $V_s(t) = V_I + V_{II}$ . Em  $t + \Delta t$ , o mesmo ocupa o volume  $V_s(t + \Delta t) = V_{II} + V_{III}$ . O volume ocupado pelo sistema no instante  $t$  será denominado *volume de controle*

$$V_c = V_s(t) = V_I + V_{II}. \quad (7.15)$$

O volume do sistema em  $t + \Delta t$  está relacionado com  $V_c$  por:

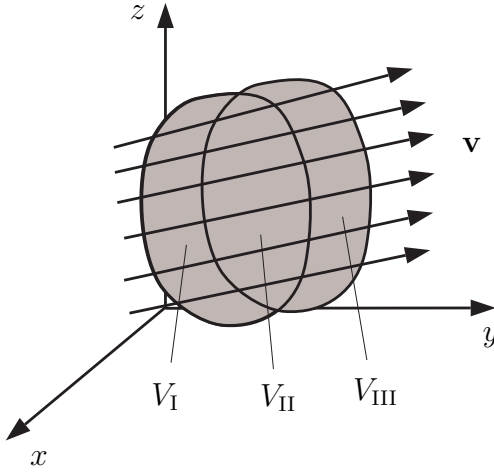
$$V_s(t + \Delta t) = V_{II} + V_{III} = V_c + V_{III} - V_I. \quad (7.16)$$

Usando a relação geral entre grandezas extensivas  $N$  e intensivas  $\eta$ ,

$$N = \int_{V_s} \eta \rho dV, \quad (7.17)$$

vem:

$$N(t) = \int_{V_s(t)} \eta \rho dV = \left[ \int_{V_c} \eta \rho dV \right]_t, \quad (7.18)$$



**Figura 7.1:** Sistema fluido entre dois instantes.

onde o sub-índice no colchete indica o tempo em que a quantidade dentro dos colchetes são calculadas. Para calcular  $N(t + \Delta t)$ , usa-se (7.15) e (7.16):

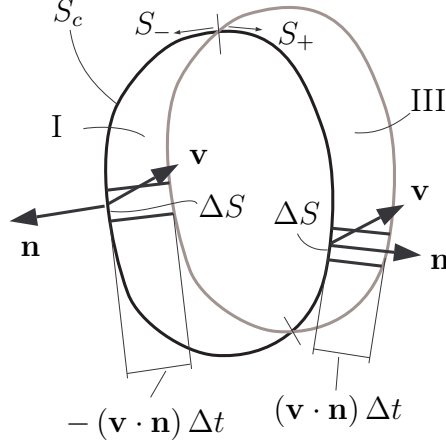
$$\begin{aligned} N(t + \Delta t) &= \int_{V_s(t+\Delta t)} \eta \rho dV \\ &= \left[ \int_{V_c} \eta \rho dV + \int_{V_{III}} \eta \rho dV - \int_{V_I} \eta \rho dV \right]_{t+\Delta t}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Substituindo (7.18) e (7.19) em (7.14) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{DN}{Dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[ \int_{V_c} \eta \rho dV + \int_{V_{III}} \eta \rho dV - \int_{V_I} \eta \rho dV \right]_{t+\Delta t} \right. \\ &\quad \left. - \left[ \int_{V_c} \eta \rho dV \right]_t \right\}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Rearranjando a expressão acima tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{DN}{Dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[ \int_{V_c} \eta \rho dV \right]_{t+\Delta t} - \left[ \int_{V_c} \eta \rho dV \right]_t \right\} \\ &\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[ \int_{V_{III}} \eta \rho dV \right]_{t+\Delta t} - \left[ \int_{V_I} \eta \rho dV \right]_{t+\Delta t} \right\}. \end{aligned} \quad (7.21)$$



**Figura 7.2:** Elementos de integração nas regiões I e III correspondendo a um sistema nos instantes  $t$  e  $t + \Delta t$ .

O primeiro limite da equação (7.21) é simplesmente igual à derivada parcial da quantidade entre colchetes:

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[ \int_{V_c} \eta \rho dV \right]_{t+\Delta t} - \left[ \int_{V_c} \eta \rho dV \right]_t \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \eta \rho dV. \end{aligned} \quad (7.22)$$

A ideia é a de transformar as integrais nas regiões I e III em integrais no instante  $t$  na superfície  $S_c$ . Para se avaliar o segundo limite da equação (7.21), é preciso calcular separadamente as integrais pois as regiões de integração são diferentes. Considere as regiões I e III em um corte bi-dimensional (para facilitar a visualização) como na figura 7.2. Observe que pode-se tomar como elementos de volume da região III prismas elementares cuja base está sobre a superfície do volume de controle (*superfície de controle*,  $S_c$ ) e cujo topo encontra-se na superfície do sistema em  $t + \Delta t$ . O volume de cada prisma  $\Delta V$  é o produto da área da base,  $\Delta S$ , pela altura  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \Delta t$ :

$$\Delta V = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \Delta t \Delta S. \quad (7.23)$$

Como dentro do elemento o produto  $\eta \rho$  pode ser considerado constante (pois

o elemento é pequeno), a integral sobre o volume  $V_{III}$  na equação (7.21) fica:

$$\left[ \int_{V_{III}} \eta \rho dV \right]_{t+\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \int_{S_+} \eta \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.24)$$

onde  $S_+$  é a parcela da superfície de controle que contribui para a superfície da região III.

Analogamente, pode-se calcular a integral sobre a região I usando como elementos de volume prismas cuja base está sobre  $S_c$ , e cujo topo está na superfície do sistema em  $t + \Delta t$ . Desta vez o produto  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$  deverá ter um sinal negativo, já que, por convenção, o vetor normal unitário  $\mathbf{n}$  está apontando para fora do prisma (o oposto do caso da integral na região III). O volume de cada elemento será:

$$\Delta V = -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \Delta t \Delta S, \quad (7.25)$$

e a integral sobre  $V_I$  será:

$$\left[ \int_{V_I} \eta \rho dV \right]_{t+\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\Delta t \int_{S_-} \eta \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.26)$$

onde  $S_-$  é a parcela da superfície de controle que contribui para a superfície da região I. Naturalmente, a superfície de controle total é:

$$S_c = S_+ \cup S_-. \quad (7.27)$$

Usando (7.24), (7.26), e (7.27) o segundo limite da equação (7.21) é portanto:

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[ \int_{V_{III}} \eta \rho dV \right]_{t+\Delta t} - \left[ \int_{V_I} \eta \rho dV \right]_{t+\Delta t} \right\} \\ &= \int_{S_c} \eta \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Levando (7.22) e (7.28) em (7.21) tem-se a seguinte expressão envolvendo apenas integrais na região ocupada por  $V_c$ :

$$\frac{DN}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \eta \rho dV + \int_{S_c} \eta \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.29)$$

que é a expressão para se calcular a taxa de variação instantânea de uma propriedade extensiva  $N$  de um sistema que ocupa o volume  $V_c$  nesse instante.

A equação (7.29) é o Teorema do transporte de Reynolds, que é a equação integral de balanço da propriedade extensiva  $N$  para um volume de controle.

Como a região  $V_c$  é arbitrária, em geral se escolhe uma que seja conveniente para o problema em questão, de forma a facilitar os cálculos das integrais envolvidas. Para um problema particular a ideia é a de se definir um volume de controle, e usar as leis da física (7.10)-(7.13) combinadas com a relação (7.29) substituindo-se  $N$  e  $\eta$  pelas propriedades extensivas em questão, e considerando que, instantaneamente, o sistema ocupa aquele volume de controle. Nas próximas seções, cada uma das leis (7.10)-(7.13) substituirá  $\frac{DN}{Dt}$  na equação (7.29) para formar as equações integrais de conservação de massa, massa de um soluto, quantidade de movimento, e energia, para um volume de controle.

### 7.3 BALANÇO DE MASSA

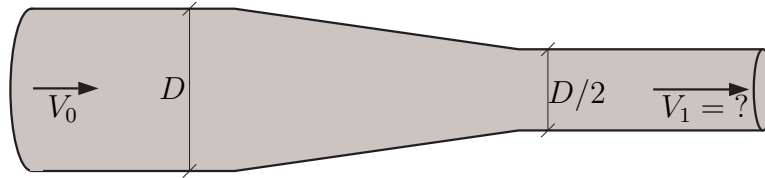
Conforme já foi discutido na seção 3.3, efeitos difusivos não alteram a massa total de um sistema, que permanece constante (equação (7.10)). A grandeza intensiva  $\eta$  associada à massa total de um sistema é simplesmente 1, de modo que reunindo (7.10) e (7.29) com  $\eta = 1$ , tem-se:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.30)$$

A equação (7.30) é chamada de balanço integral de massa, e diz que, em um dado instante, se há variação temporal de massa dentro de um volume de controle  $V_c$ , esta deve ser balanceada pelo fluxo de massa através da superfície de controle  $S_c$ .

#### EXEMPLO

A redução da seção transversal da tubulação circular da figura 7.3 é tal que o diâmetro reduz-se de  $D$  para  $D/2$ . O escoamento



**Figura 7.3:** Transição numa tubulação circular.

de um fluido dá-se da esquerda para a direita e é permanente e uniformemente distribuído nas seções transversais antes e depois da transição. O fluido de massa específica  $\rho$  é incompressível. Conhecendo a velocidade  $V_0$  antes da redução, calcule a velocidade  $V_1$  depois da redução.

### SOLUÇÃO

O volume de controle escolhido é formado pela própria tubulação e por uma seção transversal antes da transição (seção 0) e uma seção transversal depois da transição (seção 1). A equação de conservação da massa (7.30) é a lei da conservação a ser usada. Como por hipótese o escoamento é permanente, então:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV = 0. \quad (7.31)$$

O balanço de massa então se reduz ao fluxo de massa sobre toda a superfície de controle:

$$\int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0. \quad (7.32)$$

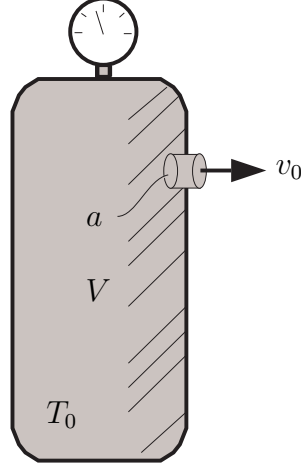
Como o fluido não penetra as paredes do tubo, então  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  em toda a superfície de controle, exceto nas seções 0 e 1, onde  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -V_0$  e  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = V_1$ , respectivamente (note que estes valores são constantes nas seções transversais, e que na seção 0 o valor é negativo pelo fato de que os vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{n}$  têm sentidos opostos). Além disso,  $\rho$ , sendo constante, pode sair da integral. chamando as superfícies das seções 0 e 1 de  $S_0$  e  $S_1$ , a equação fica então:

$$\begin{aligned} \int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= \int_{S_0} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S_1} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= -\rho V_0 \int_{S_0} dS + \rho V_1 \int_{S_1} dS \\ &= \rho \left[ -V_0 \frac{\pi D^2}{4} + V_1 \frac{\pi (D/2)^2}{4} \right] = 0, \quad (7.33) \end{aligned}$$

(acima, se usou o fato de que  $\int_{S_0} dS$  e  $\int_{S_1} dS$  são as áreas das seções transversais das seções 0 e 1, respectivamente) donde:

$$V_1 = 4V_0. \quad (7.34)$$





**Figura 7.4:** Problema do extintor de incêndio.

### EXEMPLO

Um extintor de incêndio como mostra a figura 7.4 tem volume  $V$  e contém  $\text{CO}_2$  à temperatura ambiente  $T_0$ . Abrindo-se a válvula de saída, cuja seção tem área  $a$ , o gás escapa com velocidade  $v_0$ . Determine a taxa  $\frac{\partial p}{\partial t}$  com que a pressão  $p$  cai no instante em que a válvula é aberta, supondo que a expansão do gás através da válvula é isotérmica.

### SOLUÇÃO

O volume de controle escolhido aqui é o próprio extintor. Repare que este é um problema transiente (ou não-permanente), uma vez que a massa total de gás dentro do volume de controle varia com o tempo. Além disso, como o gás se expande dentro do volume de controle devido à despressurização, o escoamento é necessariamente compressível. A equação de conservação da massa é dada por (7.30). Supondo que a cada instante a distribuição da massa específica é uniforme no extintor, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} (\rho V) = V \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (7.35)$$

Acima usou-se o fato de que o volume do extintor,  $V$ , é constante. Usando a equação de estado de um gás ideal,

$$\rho = \frac{p}{RT}, \quad (7.36)$$

na expressão acima, tem-se que o termo transiente é:

$$V \frac{\partial \rho}{\partial t} = V \frac{1}{RT_0} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (7.37)$$

onde foi usado  $T = T_0$  constante.

No termo advectivo de (7.30), a única superfície onde há fluxo ( $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ ) é a seção transversal da válvula. Como lá  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_0$  (constante):

$$\int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \rho_0 v_0 \int_{S_c} dS = \rho_0 v_0 a. \quad (7.38)$$

Note que acima foi usado  $\rho_0$ , e não  $\rho$  (massa específica dentro do volume de controle).  $\rho_0$  pode ser calculada pela equação de estado para um gás ideal nas condições da saída do gás pela válvula, ou seja, temperatura  $T_0$  e pressão atmosférica  $p_0$  ambientes:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0}, \quad (7.39)$$

O fluxo total na superfície de controle fica portanto:

$$\int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{p_0}{RT_0} v_0 a, \quad (7.40)$$

e a equação de conservação da massa fica:

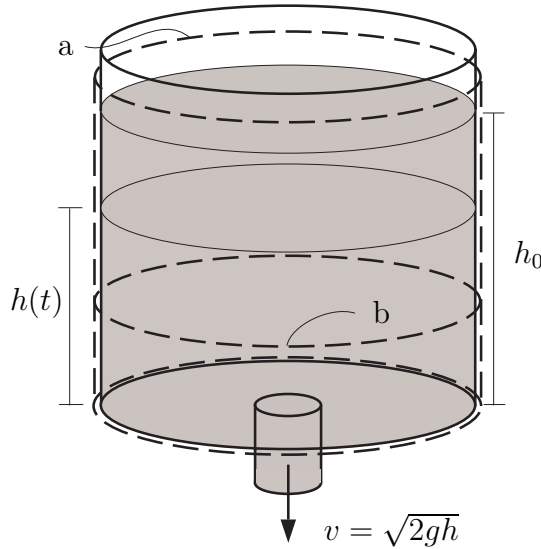
$$V \frac{1}{RT_0} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p_0}{RT_0} v_0 a = 0. \quad (7.41)$$

Portanto:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{p_0 v_0 a}{V}, \quad (7.42)$$

um valor negativo, como era de se esperar.

■



**Figura 7.5:** Cilindro com orifício no fundo.

### EXEMPLO

Considere um tanque de água cilíndrico com área da base igual a  $A$ , e com um orifício de área  $a$  no fundo, como mostra a figura 7.5. Se a velocidade da água através do orifício é conhecida e igual a  $v = \sqrt{2gh}$  e a altura inicial da água no tanque for  $h_0$ , determine a altura da água como função do tempo  $h(t)$ .

### SOLUÇÃO

Este exemplo mostrará que é possível escolher mais que um volume de controle para se resolver o mesmo problema. Além disso, que dependendo da escolha do volume de controle (VC), o problema pode ser permanente ou transiente! Inicialmente, considere o VC que vai até a linha tracejada marcada na figura 7.5 por (a), acima do nível de água inicial. O escoamento pode ser suposto incompressível com massa específica  $\rho$ . Novamente a equação que será utilizada para se resolver o problema é a equação integral de conservação da massa (7.30) Note que o problema é transiente, já que a massa dentro do volume de controle é variável com o tempo,

portanto primeiro termo de (7.30) não pode ser desprezado. Este termo é dado por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} (\rho V) = \rho \frac{dV}{dt} = \rho A \frac{dh}{dt}, \quad (7.43)$$

onde  $V(t) = Ah(t)$  é o *volume de água* no volume de controle que é função apenas do tempo, e portanto a derivada parcial é igual à derivada ordinária. A integral de superfície (fluxo advectivo) da equação (7.30) tem apenas contribuição no orifício, pois somente lá  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ . Esta integral fica simplesmente:

$$\int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \rho \sqrt{2gh} a. \quad (7.44)$$

Juntando o termo transiente com o fluxo advectivo, a equação (7.30) fica:

$$\rho A \frac{dh}{dt} + \rho \sqrt{2gh} a = 0. \quad (7.45)$$

A expressão acima é uma equação diferencial ordinária, linear, homogênea, de primeira ordem. A solução pode ser obtida separando-se as variáveis:

$$h^{-1/2} dh + \frac{a}{A} \sqrt{2g} dt = 0. \quad (7.46)$$

Integrando a expressão acima:

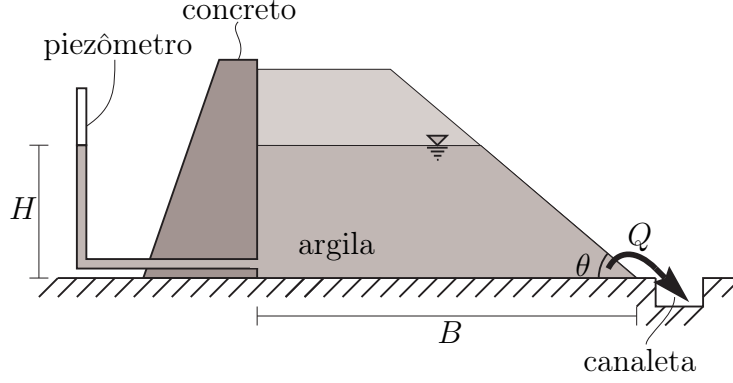
$$\begin{aligned} & \int_{h_0}^h h^{-1/2} dh + \frac{a}{A} \sqrt{2g} \int_0^t dt \\ &= 2 \left[ (h(t))^{1/2} - h_0^{1/2} \right] + \frac{a}{A} \sqrt{2g} t \\ &= 0. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Portanto:

$$h(t) = \left[ \sqrt{h_0} - \frac{a\sqrt{2g}}{2A} t \right]^2. \quad (7.48)$$

Neste problema, poderia-se alternativamente escolher o volume de controle que *corta* o fluido (abaixo de  $h(t)$ ), marcado por (b). Neste caso, enquanto a superfície livre não alcançar o topo do volume de controle, a massa de água no volume de controle é constante, e portanto, sob o aspecto da conservação da massa, o problema é permanente. A equação da conservação da massa se reduz a:

$$\int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0. \quad (7.49)$$



**Figura 7.6:** Aterro de coleta de águas pluviais (escoamento em um meio poroso).

Repare que agora há fluxo de massa através do topo do volume de controle. Pode-se admitir que a velocidade que atravessa esta superfície é uniformemente distribuída na superfície e igual a  $v_0 = -\frac{dh}{dt}$ , de modo que o balanço de massa no VC se dará pelas integrais de superfície no topo e no orifício do fundo:

$$\begin{aligned} \int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= \int_{S_{\text{topo}}} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S_{\text{fundo}}} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= -\rho v_0 A + \rho v a = 0. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Substituindo  $v = \sqrt{2gh}$  e  $v_0 = -\frac{dh}{dt}$  acima, obtém-se:

$$\rho A \frac{dh}{dt} + \rho \sqrt{2gh} a = 0, \quad (7.51)$$

que, obviamente, é a mesma equação diferencial para  $h(t)$  que foi obtida anteriormente (7.45).

■

#### EXEMPLO

A figura 7.6 mostra um aterro destinado a coletar águas de chuva e conduzi-las a uma canaleta. Este tipo de armazenamento de água dentro de um meio poroso pode ser útil em regiões áridas, para reduzir perdas por evaporação. Admitindo que a vazão  $Q$  que

eflui é proporcional ao nível da água dentro do aterro,  $Q = kLH$ , onde  $L$  é o comprimento do aterro, e  $k$  é conhecido empiricamente, e que a porosidade do solo é  $n$ , determine o nível  $H$  em função do tempo, sabendo que  $H(0) = H_0$ .

### SOLUÇÃO

O volume de controle escolhido é o próprio de aterro e a equação utilizada para se resolver este problema será a equação da conservação da massa (7.30). Note que necessariamente o problema é transiente, já que a variável que se quer resolver  $H(t)$  está relacionada com o volume de água no aterro, e este é variável dentro do volume de controle. Por definição, o volume de água dentro do aterro é igual ao produto do volume total da região molhada (até o nível  $H$ ) com a porosidade  $n$ . O volume ocupado pelo aterro até o nível da água  $H$  é dado por  $V = \left(B - \frac{H}{2 \tan \theta}\right) HL$ , de modo que o volume de água é dado por:

$$V_A = n \left( B - \frac{H}{2 \tan \theta} \right) HL. \quad (7.52)$$

Admitindo que a massa específica da água  $\rho$  é constante, o termo transiente de (7.30) fica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho n \left( B - \frac{H}{2 \tan \theta} \right) HL \right] \\ &= \rho n L \left( B \frac{dH}{dt} - \frac{H}{\tan \theta} \frac{dH}{dt} \right). \end{aligned} \quad (7.53)$$

Observe o uso de derivadas ordinárias para  $H$ , uma vez que o tempo é a única variável da qual  $H$  depende. Desprezando o pequeno fluxo dentro do piezômetro, a única região da superfície de controle onde há fluxo ( $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ ) é próximo à canaleta, onde a integral de superfície é dada pela própria vazão  $Q = \int_{S_c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS$  multiplicada pela massa específica  $\rho$ :

$$\int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \rho Q = \rho k L H. \quad (7.54)$$

A equação da conservação da massa fica:

$$\rho n L \left( B \frac{dH}{dt} - \frac{H}{\tan \theta} \frac{dH}{dt} \right) + \rho k L H = 0. \quad (7.55)$$

Rearranjando e separando as variáveis  $H$  e  $t$ , tem-se:

$$nB \frac{dH}{H} - \frac{n}{\tan \theta} dH + k dt = 0. \quad (7.56)$$

Integrando a equação acima, tem-se:

$$\begin{aligned} nB \int_{H_0}^H \frac{dH}{H} - \frac{n}{\tan \theta} \int_{H_0}^H dH + k \int_0^t dt &= \\ nB \ln \left( \frac{H}{H_0} \right) - \frac{n}{\tan \theta} (H - H_0) + kt &= 0. \end{aligned} \quad (7.57)$$

Repare que a equação acima não permite uma expressão explícita para  $H$ . Este tipo de equação é chamada de *transcendental* e  $H$  só pode ser avaliado numericamente de forma iterativa.

■

## 7.4 BALANÇO DE MASSA DE UM SOLUTO

A lei integral da conservação de massa de um soluto  $A$  (na ausência de reações químicas!) em uma região do espaço (volume de controle) é expressa pela equação (7.11),  $\frac{DM_A}{Dt}$  é dado por (7.29) com  $N = M_A$  e  $\eta = C_A$ . A equação fica:

$$\dot{J} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} C_A \rho dV + \int_{S_c} C_A \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.58)$$

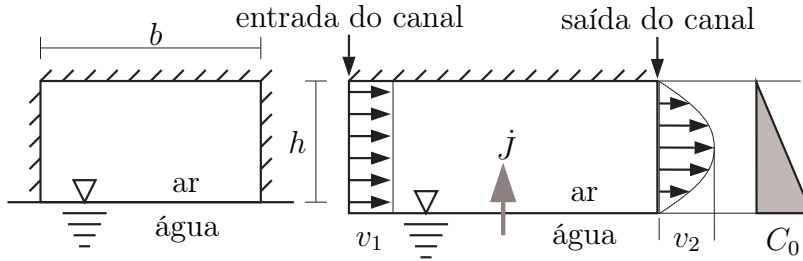
### EXEMPLO

Ar seco com massa específica  $\rho$  e velocidade  $v_1$  entra em um duto de seção retangular  $h \times b$ , cujo fundo é um reservatório de água como mostra a figura 7.7. Na saída, as distribuições de velocidade e concentração de vapor de água são dadas por:

$$v(y) = 4v_2 \frac{y(h-y)}{h^2}, \quad C(y) = C_0 \frac{(h-y)}{h}. \quad (7.59)$$

Desprezando as variações de velocidade nas laterais,

- Calcule a velocidade máxima na saída (seção 2)  $v_2$  em função de  $v_1$ .
- Calcule o fluxo de massa de vapor de água que evapora do reservatório,  $\dot{J}$ , em função de  $C_0$ ,  $\rho$ ,  $v_2$ ,  $b$ , e  $h$ .



**Figura 7.7:** Canal de vento fechado sobre um reservatório.

### SOLUÇÃO

(a) Este item diz respeito à velocidade do *fluido*, e portanto deve ser solucionado considerando-se a conservação da massa do fluido (7.30). Como o escoamento é permanente, o termo transiente é nulo. O termo devido aos fluxos advectivos têm componentes na entrada ( $S_1$ ) e na saída ( $S_2$ ) do duto, portanto:

$$\begin{aligned} \int_{SC} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= \int_{S_1} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S_2} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= -\rho v_1 b h + \int_0^h 4v_2 \rho \frac{y(h-y)}{h^2} b dy = 0, \end{aligned} \quad (7.60)$$

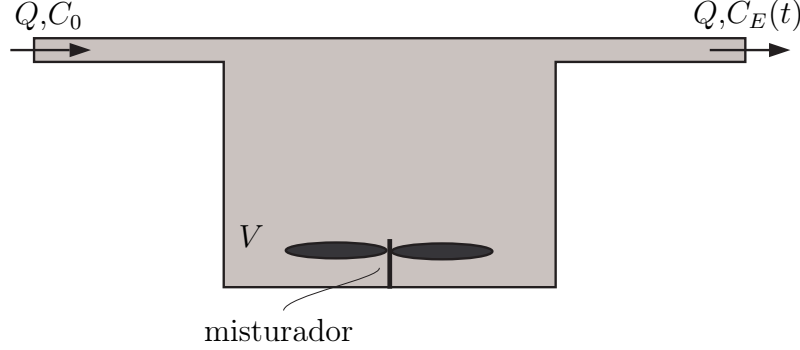
donde, após a integração, obtém-se:

$$v_2 = \frac{3v_1}{2}. \quad (7.61)$$

Repare que  $\dot{J}$  não contribui para o balanço de massa do fluido.

(b) A equação de balanço de massa de um soluto (no caso, vapor de água) é dada por (7.58). Como o problema é permanente, o termo transiente ( $\partial/\partial t$ ) é nulo. A integral sobre a superfície de controle (fluxo advectivo) é:

$$\begin{aligned} \int_{S_c} C_A \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= \int_{S_1} C_A \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &+ \int_{S_2} C_A \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \end{aligned} \quad (7.62)$$



**Figura 7.8:** Fluxo de fenol em um tanque.

Como por hipótese o ar está seco na entrada do duto ( $S_1$ ), a integral naquela superfície é nula ( $C_A = 0$ ), e a integral de superfície em  $S_2$  irá equilibrar o fluxo difusivo de massa do soluto:

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \int_{S_2} C_A \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{\rho 4 C_0 v_2 b}{h^3} \int_0^h y(h-y)^2 dy \\ &= \frac{1}{3} \rho C_0 v_2 b h. \end{aligned} \quad (7.63)$$

■

### EXEMPLO

A figura 7.8, mostra um tanque industrial contendo inicialmente água pura ( $\rho$  constante), conectado a tubos de circulação. Em  $t = 0$ , uma vazão volumétrica  $Q$  começa a transitar no tanque trazendo água com uma concentração mássica  $C_0$  de fenol. Considere que um misturador mantém a concentração de fenol dentro do tanque homogênea e igual à concentração de saída,  $C_E(t)$ . Sendo  $V$  o volume (constante) de fluido no tanque, e desprezando a difusão molecular do fenol, obtenha  $C_E(t)$ .

### SOLUÇÃO

O volume de controle a ser utilizado é obviamente o tanque em si. A única informação que a equação do balanço de massa de fluido

(7.30) nos fornece é a de que a vazão de entrada deve ser igual à vazão de saída,  $Q$  (repare que para a conservação da massa de fluido, o problema é permanente). Para se calcular uma fórmula para  $C_E(t)$ , deve ser empregada a lei de conservação de massa de um soluto, dada pela equação (7.58). O termo  $\dot{J}$  é dado como desprezível. O termo transiente pode ser calculado imediatamente, já que  $C_A = C_E(t)$  e  $\rho$  são, por suposição, uniformes no volume de controle:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} C_A \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} [\rho C_E(t) V] = \rho V \frac{dC_E}{dt} \quad (7.64)$$

Repare que, como o tempo é a única variável independente, a derivada parcial pode ser substituída pela derivada ordinária. A integral de superfície da equação (7.58) só tem contribuições nas seções que comunicam o tanque com os tubos de circulação. Sendo  $S_1$  e  $S_2$  as seções da entrada e saída do tanque, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{S_c} C_A \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= \int_{S_1} C_A \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &+ \int_{S_2} C_A \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= \rho C_0 \int_{S_1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \rho C_E(t) \int_{S_2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= -\rho C_0 Q + \rho C_E(t) Q. \end{aligned} \quad (7.65)$$

A equação de balanço de massa de fenol, (7.58) com  $\dot{J} = 0$ , torna-se:

$$V \frac{dC_E}{dt} + Q (C_E(t) - C_0) = 0. \quad (7.66)$$

A equação acima pode ser convenientemente rearranjada:

$$V \frac{d}{dt} (C_0 - C_E(t)) + Q (C_0 - C_E(t)) = 0. \quad (7.67)$$

Separando as variáveis:

$$\frac{d(C_0 - C_E(t))}{(C_0 - C_E(t))} = -\frac{Q}{V} dt. \quad (7.68)$$

Integrando:

$$\ln (C_0 - C_E(t)) = -\frac{Q}{V} t + \ln c, \quad (7.69)$$

onde  $\ln c$  é a constante de integração. Exponenciando a expressão acima:

$$(C_0 - C_E(t)) = ce^{-(Q/V)t}. \quad (7.70)$$

Como  $C_E = 0$  em  $t = 0$ , então  $c = C_0$ . Finalmente:

$$C_E(t) = C_0 (1 - e^{-(Q/V)t}). \quad (7.71)$$

■

## 7.5 BALANÇO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Em um dado instante em que um *sistema* ocupa um volume de controle (VC) em um referencial inercial, a força que o restante do universo faz sobre o sistema é  $\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_c$ , onde  $\mathbf{F}_s$  e  $\mathbf{F}_c$  são as forças de superfície e de corpo atuando no sistema naquele instante (ver seções 4.1, 4.2, e 6.1). Esta força é a responsável pela variação da quantidade de movimento do sistema,  $\frac{D\mathbf{P}}{Dt}$ , de acordo com a equação (7.12), que é o princípio da conservação da quantidade de movimento de um sistema. Utilizando (7.29) com  $N = \mathbf{P}$  e  $\eta = \mathbf{v}$ , tem-se:

$$\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_c = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \mathbf{v} \rho dV + \int_{S_c} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.72)$$

A equação (7.72) é a equação integral do balanço da quantidade de movimento em um volume de controle. Observe que, como a quantidade de movimento é um vetor, (7.72) são na realidade três equações. No sistema de coordenadas cartesiano as três componentes  $(x, y, z)$  de (7.72) são:

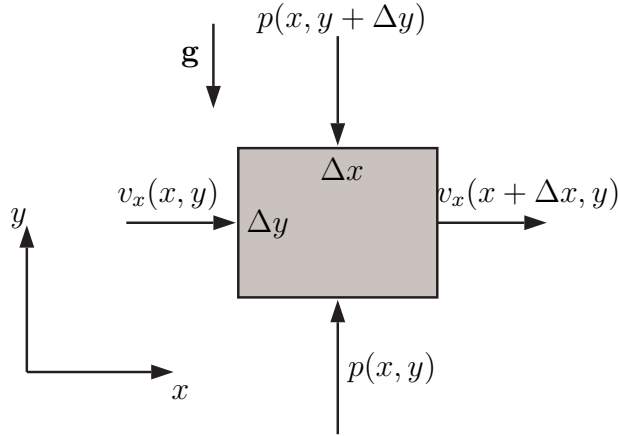
$$F_{sx} + F_{cx} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} v_x \rho dV + \int_{S_c} v_x \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.73)$$

$$F_{sy} + F_{cy} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} v_y \rho dV + \int_{S_c} v_y \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.74)$$

$$F_{sz} + F_{cz} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} v_z \rho dV + \int_{S_c} v_z \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.75)$$

### EXEMPLO

Utilizando as equações (7.72) para um escoamento permanente, unidimensional na direção  $x$  com  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x$ , com a aceleração da gravidade atuando no sentido  $-y$  perpendicular a  $x$ , e com o tensor de tensões dado apenas pelo campo de pressão  $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$

**Figura 7.9:** Escoamento paralelo hidrostático.

( $\mathbf{I}$  é a matriz identidade), ou seja, desprezando termos viscosos, mostre que:

- (a)  $\partial v_x / \partial x = 0$ ,
- (b)  $\partial p / \partial x = 0$ ,
- (c)  $\partial p / \partial y = -\rho g$ .

### SOLUÇÃO

Considere o elemento de fluido que ocupa um volume de controle mostrado na figura 7.9 (neste exemplo, como em muitos outros, a direção  $z$  perpendicular ao papel será desprezada por conveniência). As equações relevantes para este sistema são as da conservação da massa e da quantidade de movimento nas direções  $x$  e  $y$ :

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.76)$$

$$F_{sx} + F_{cx} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} v_x \rho dV + \int_{S_c} v_x \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.77)$$

$$F_{sy} + F_{cy} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} v_y \rho dV + \int_{S_c} v_y \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.78)$$

Uma vez que o escoamento é permanente, todos os termos transientes ( $\frac{\partial}{\partial t}$ ) são nulos.

(a) Como só existe escoamento na direção  $x$ , a equação da continuidade se reduz ao balanço entre os fluxos nas fronteiras laterais do volume de controle. Tomando o limite no qual a altura do elemento  $\Delta y$  tende a zero, a velocidade  $v_x$  pode ser considerada constante entre  $y$  e  $y + \Delta y$ , então:

$$\int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = -v_x(x, y) \rho \Delta y + v_x(x + \Delta x, y) \rho \Delta y = 0. \quad (7.79)$$

Dividindo a equação acima por  $\Delta x \Delta y$ , e tomando agora o limite quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , tem-se:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad (7.80)$$

como queríamos demonstrar.

(b) O lado esquerdo da equação integral da conservação da componente  $x$  da quantidade de movimento reduz-se à contribuição das forças de superfície devido à pressão atuando nas faces verticais do volume de controle, já que só há força de corpo na direção  $y$ . Então, tomando  $\Delta y \rightarrow 0$  admitindo que a pressão é uniforme ao longo de  $\Delta y$  tem-se:

$$F_{sx} = p(x, y) \Delta y - p(x + \Delta x, y) \Delta y. \quad (7.81)$$

O lado direito da equação se reduz ao fluxo advectivo de quantidade de movimento nas faces laterais do volume de controle:

$$\int_{S_c} v_x \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = -v_x^2(x, y) \rho \Delta y + v_x^2(x + \Delta x, y) \rho \Delta y. \quad (7.82)$$

Combinando o termos acima na equação de conservação, tem-se:

$$\begin{aligned} p(x, y) \Delta y - p(x + \Delta x, y) \Delta y = \\ -v_x^2(x, y) \rho \Delta y + v_x^2(x + \Delta x, y) \rho \Delta y. \end{aligned} \quad (7.83)$$

Dividindo a equação acima por  $\Delta x \Delta y$ , e tomando agora o limite quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , a equação acima se torna:

$$\frac{\partial v_x^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \quad (7.84)$$

$$2v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (7.85)$$

Como  $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$  (ver item (a)),

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (7.86)$$

(c) Resta agora a aplicação da equação dinâmica (como também é conhecida a equação da conservação da quantidade de movimento) na direção  $y$ . Nesta equação, o lado direito é nulo, pois não há escoamento na direção vertical, ou seja,  $v_y = 0$ . Similarmente à componente  $x$ , as forças de superfícies  $F_{sy}$  são dadas pelo balanço de forças devido à pressão:

$$F_{sy} = p(x, y)\Delta x - p(x, y + \Delta y)\Delta x. \quad (7.87)$$

A única força de corpo é o peso do fluido dentro do volume de controle:

$$F_{cy} = -\rho g \Delta x \Delta y. \quad (7.88)$$

Tomando  $F_{sy} + F_{cy} = 0$ , tem-se:

$$p(x, y)\Delta x - p(x, y + \Delta y)\Delta x - \rho g \Delta x \Delta y = 0. \quad (7.89)$$

Dividindo a equação acima pelo volume de controle e tomando o limite quando  $\Delta y \rightarrow 0$ :

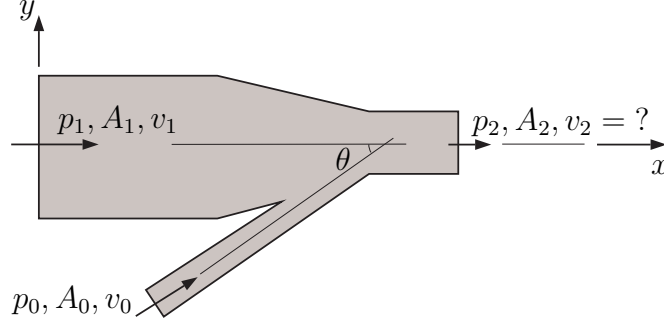
$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g, \quad (7.90)$$

que mostra que um escoamento atendendo às condições dadas tem um comportamento hidrostático.

■

### EXEMPLO

A figura 7.10 ilustra o escoamento permanente de um fluido incompressível através de uma junção de tubulações. A figura está mostrada em planta, portanto não há componente gravitacional no plano  $(x, y)$ . Considerando dados  $\rho$ ,  $v_0$ ,  $v_1$ ,  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ , e as pressões nas seções 0, 1, e 2, dadas por  $p_0$ ,  $p_1$ , e  $p_2$ , calcule o vetor força da água sobre este trecho de tubulação. (Admita que as velocidades e pressões são uniformes nas seções.)



**Figura 7.10:** Força de um fluido em uma junção.

### SOLUÇÃO

As equações para a solução deste problema são as de balanço de massa e de quantidade de movimento em  $x$  e  $y$ :

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.91)$$

$$F_{sx} + F_{cx} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} v_x \rho dV + \int_{S_c} v_x \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.92)$$

$$F_{sy} + F_{cy} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} v_y \rho dV + \int_{S_c} v_y \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.93)$$

Sendo o escoamento permanente, tem-se que todos os termos com  $\frac{\partial}{\partial t}$  são nulos. Tomando como volume de controle o próprio contorno da tubulação. A equação de conservação de massa reduz-se ao balanço de fluxos nas seções 1, 2, e 3, e fornece a velocidade  $v_2$ :

$$\int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \rho (-v_0 A_0 - v_1 A_1 + v_2 A_2) = 0, \quad (7.94)$$

$$v_2 = \frac{v_0 A_0 + v_1 A_1}{A_2}. \quad (7.95)$$

A equação dinâmica na direção  $x$  torna-se:

$$\begin{aligned} F_{sx} &= \int_{S_c} v_x \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= -v_0 \cos \theta \rho v_0 A_0 - v_1 \rho v_1 A_1 + v_2 \rho v_2 A_2, \end{aligned} \quad (7.96)$$

e na direção  $y$  dá:

$$F_{sy} = \int_{S_c} v_y \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = -v_0 \sin \theta \rho v_0 A_0. \quad (7.97)$$

As forças de superfície atuando sobre a superfície de controle são a combinação das forças devido às pressões nas seções com as forças  $(F_x, F_y)$  do conduto sobre o fluido:

$$F_{sx} = p_0 A_0 \cos \theta + p_1 A_1 - p_2 A_2 + F_x, \quad (7.98)$$

$$F_{sy} = p_0 A_0 \sin \theta + F_y, \quad (7.99)$$

que substituídas nas equações dinâmicas fornecem:

$$F_x = -\rho v_0^2 \cos \theta A_0 - \rho v_1^2 A_1 + \rho v_2^2 A_2 + p_2 A_2 - p_1 A_1 - p_0 A_0 \cos \theta, \quad (7.100)$$

$$F_y = -\rho v_0^2 A_0 \sin \theta - p_0 A_0 \sin \theta. \quad (7.101)$$

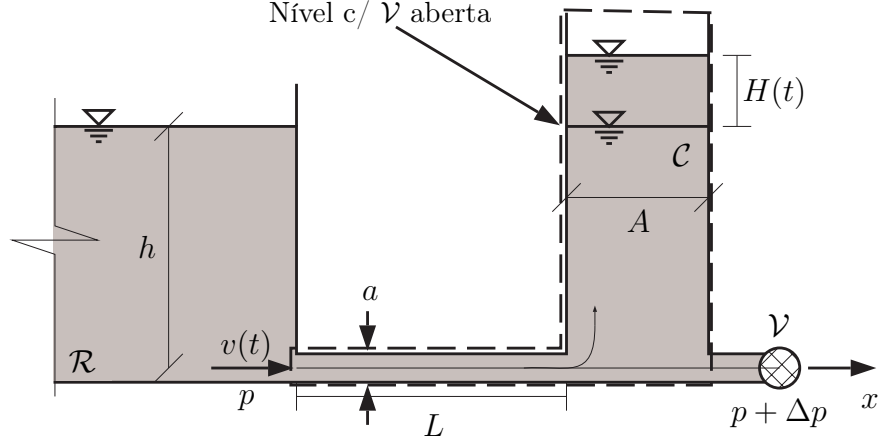
A força da água sobre a junção dos condutos é a reação a  $(F_x, F_y)$ :

$$\mathbf{F} = -(F_x, F_y). \quad (7.102)$$

■

## EXEMPLO

Na figura 7.11, água dentro de uma tubulação  $\mathcal{T}$  escoava com velocidade  $v_0$  através da válvula  $\mathcal{V}$ . O súbito fechamento da válvula em  $t = 0$  causa uma sobrepressão na tubulação. A função do grande tanque  $\mathcal{C}$  (denominado de chaminé de equilíbrio) imediatamente antes da válvula é absorver este efeito para proteger a tubulação. A água dentro do tanque passa a oscilar, o mesmo acontecendo com a velocidade  $v$  na tubulação entre o reservatório  $\mathcal{R}$  (repare que o volume do reservatório é enorme e o seu nível pode ser considerado não afetado pelo sistema) e o tanque  $\mathcal{C}$  que, no caso *ideal* (sem atrito) varia entre  $\pm v_0$ . A área seccional da tubulação é  $a$ , e a da base do tanque é  $A$ . Obtenha a equação diferencial que governa a evolução de  $H(t)$ . Resolva esta equação para o caso simplificado em que  $v \ll \sqrt{gH}$ .



**Figura 7.11:** Oscilação num tanque devido ao fechamento abrupto de uma válvula.

### SOLUÇÃO

As equações adequadas para a solução deste problema são, mais uma vez, a equação da conservação da massa (7.30) e as equações da conservação da quantidade de movimento (7.72). O volume de controle escolhido (tracejado) é a tubulação  $\mathcal{T}$  mais a chaminé de equilíbrio  $\mathcal{C}$ :

$$V_c = \mathcal{T} \cup \mathcal{C}. \quad (7.103)$$

Obviamente, este é um problema transiente. Uma vez que o tanque  $\mathcal{C}$  está em contato com a atmosfera e a água pode se mover livremente dentro dele, o fluido pode ser encarado como incompressível ( $\rho$  constante). A massa dentro de  $V_c$  pode ser escrita como:

$$\int_{V_c} \rho dV = \rho (V_{\mathcal{T}} + V_{\mathcal{C}}), \quad (7.104)$$

onde  $V_{\mathcal{T}}$  e  $V_{\mathcal{C}}$  são os *volumes de água* dentro da tubulação e dentro da chaminé de equilíbrio  $V_c$ . Estes volumes são:

$$V_{\mathcal{T}} = \text{constante}; \quad V_{\mathcal{C}} = A(H(t) + h). \quad (7.105)$$

O termo transiente da equação de conservação da massa (7.30) é portanto:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \rho [V_{\mathcal{T}} + A(H(t) + h)] = \rho A \frac{dH}{dt}. \quad (7.106)$$

A única parte da superfície de controle onde há fluxo é a fronteira entre a tubulação e o reservatório, de modo que:

$$\int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = -\rho av(t). \quad (7.107)$$

A equação da conservação da massa fica:

$$\rho A \frac{dH}{dt} - \rho av(t) = 0. \quad (7.108)$$

Repare que a equação acima não é a resposta do problema, já que há duas variáveis dependentes ( $H$  e  $v$ ). Resta estabelecer uma relação entre estas variáveis para se obter uma equação diferencial para  $H(t)$  somente. Para isso, as equações dinâmicas serão usadas.

As forças de corpo na direção  $x$  são evidentemente nulas. As forças de superfícies naquela direção são decorrentes das pressões na fronteira  $\mathcal{R}-\mathcal{T}$  (entrada da tubulação) e na válvula  $\mathcal{V}$ . A pressão na entrada da tubulação  $p$  é:

$$p = p_{\text{atm}} + \rho gh. \quad (7.109)$$

Na válvula, existe um efeito de sobrepressão compensado pelo desnível  $H$  do tanque:

$$p + \Delta p = p_{\text{atm}} + \rho g(H(t) + h). \quad (7.110)$$

A força de superfície resultante em  $x$  é então:

$$F_{sx} = pa - (p + \Delta p)a = -\rho gaH(t) \quad (7.111)$$

Para calcular a quantidade de movimento  $x$  dentro do  $V_c$ ,  $\int_{V_c} \mathbf{v} \rho dV$ , pode-se admitir que a velocidade do escoamento é significativa apenas dentro da tubulação  $\mathcal{T}$ , sendo desprezíveis no tanque  $\mathcal{C}$ :

$$\int_{V_c} v_x \rho dV = v \rho a L, \quad (7.112)$$

de modo que o termo transiente é:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} v_x \rho dV = \rho a L \frac{dv}{dt}, \quad (7.113)$$

onde  $L$  é o comprimento da tubulação. Assim como o fluxo de massa, o fluxo de quantidade de movimento  $x$  existe apenas na entrada da tubulação:

$$\int_{S_c} v_x \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = -\rho v^2 a. \quad (7.114)$$

A equação dinâmica em  $x$  torna-se, assim:

$$-\rho g H a = \rho a L \frac{dv}{dt} - \rho v^2 a. \quad (7.115)$$

Pela equação da conservação da massa obtida anteriormente:

$$v = \frac{A}{a} \frac{dH}{dt} \quad (7.116)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{A}{a} \frac{d^2 H}{dt^2} \quad (7.117)$$

Substituindo as expressões acima na equação dinâmica já obtida e dividindo-a por  $\rho$ , obtém-se uma equação diferencial para  $H(t)$ :

$$L \frac{A}{a} \frac{d^2 H}{dt^2} - \left( \frac{A}{a} \frac{dH}{dt} \right)^2 + gH = 0. \quad (7.118)$$

A equação acima é não-linear devido ao termo  $(\rho v^2 a)$  proveniente do fluxo de quantidade de movimento na tubulação. Admitindo que  $v \ll \sqrt{gH}$ , este termo pode ser desprezado em comparação com os outros, e a equação diferencial para  $H(t)$  pode ser linearizada:

$$\frac{d^2 H}{dt^2} + \frac{ag}{AL} H = 0. \quad (7.119)$$

A equação acima governa uma oscilação senoidal e tem solução geral:

$$H(t) = H_1 \cos \sqrt{\frac{ag}{AL}} t + H_2 \sin \sqrt{\frac{ag}{AL}} t. \quad (7.120)$$

Usando  $H(t=0) = 0$ , tem-se que  $H_1 = 0$ . Conhecendo-se a velocidade inicial no tubo  $v_0$ , tem-se, pela equação da continuidade que:

$$\frac{dH(t=0)}{dt} = \frac{a}{A} v_0, \quad (7.121)$$

donde por substituição na derivada da expressão para  $H(t)$  acima, tem-se:

$$H_2 = \sqrt{\frac{aL}{Ag}} v_0. \quad (7.122)$$

■

## 7.6 BALANÇO DE ENERGIA

Dentre as equações integrais de balanço, a equação de balanço de energia é a única que será apresentada de uma forma ligeiramente diferente, devido às dificuldades de se incluir o termo do trabalho  $\dot{W}$  dado por (7.9). Primeiramente,  $\dot{W}$  será expresso numa forma conveniente para seu uso sistemático. Na seção 6.1, o tensor de tensões foi obtido como:

$$\mathbf{T} = - \left[ p + \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}, \quad (7.123)$$

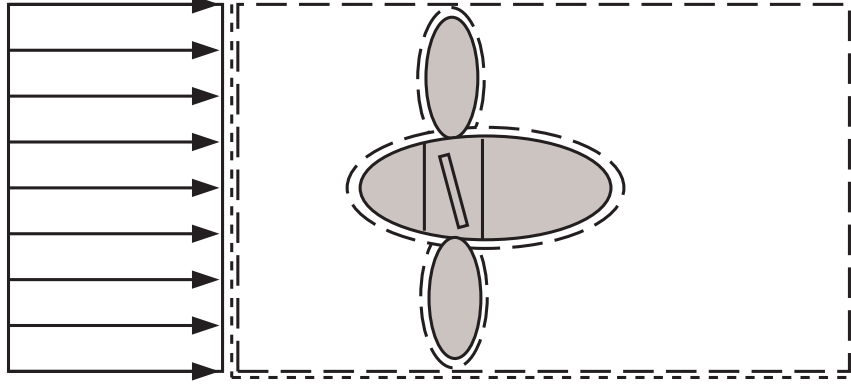
onde  $p$  é a pressão no fluido,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica, e  $\mathbf{D}$  é o tensor taxa de deformação. Levando (7.123) em (7.9):

$$\dot{W} = \int_{S_s} \left\{ \left[ \left( -\frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} - p \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \right) \cdot \mathbf{n} \right] \cdot \mathbf{v} \right\} dS. \quad (7.124)$$

Percebendo que  $\mathbf{I} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}$ , e aplicando a propriedade distributiva do produto interno:

$$\dot{W} = - \int_{S_s} p (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS - \int_{S_s} \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS + 2 \int_{S_s} \mu [(\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}] dS. \quad (7.125)$$

A segunda e terceira integrais de (7.125) representam a dissipação de energia mecânica do sistema por efeito da viscosidade (tensão viscosa) associada com o movimento da fronteira do sistema (note que numa fronteira sólida em repouso,  $\mathbf{v} = 0$ , e este termo é nulo). Frequentemente, os efeitos desta dissipação viscosa sobre o escoamento de fluidos com viscosidade relativamente baixa (caso da água) são desprezíveis. No decorrer deste texto, essa dissipação será denominada  $\dot{W}_\mu$ , e será desprezada sistematicamente, a menos que se indique o contrário. A primeira integral de (7.125) representa a taxa de trabalho reversível realizado pelo resto do universo sobre a superfície do sistema. Este termo, em geral, é bastante importante.



**Figura 7.12:** Ilustração da inclusão do trabalho de eixo.

A equação integral de balanço de energia é dada por (7.29) com  $N = E$  e  $\eta = e$ :

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} e \rho dV + \int_{S_c} e \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.126)$$

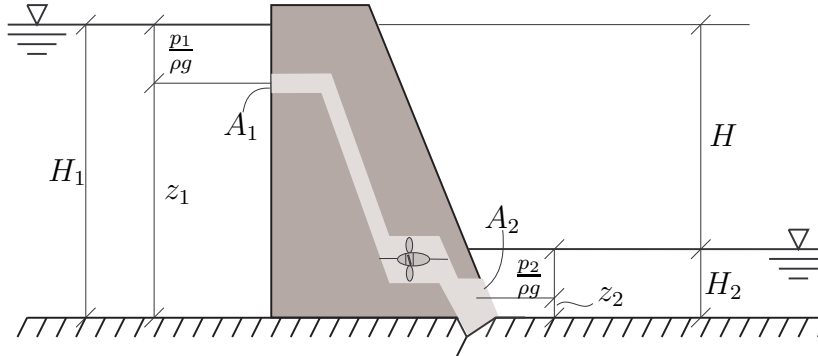
combinada com (7.13), e (7.125) com  $N = E$  e  $\eta = e$ :

$$\dot{Q} + \dot{W}_\mu - \int_{S_s} p (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} e \rho dV + \int_{S_c} e \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.127)$$

Como no instante considerado a superfície do sistema e a superfície de controle coincidem, pode-se agrupar as integrais sobre estas superfícies em uma única integral, e a equação de balanço integral de energia fica:

$$\dot{Q} + \dot{W}_\mu = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} e \rho dV + \int_{S_c} \left( e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.128)$$

A equação (7.128) está *quase* completa para ser usada. Para mostrar por quê, considere a turbina sujeita a um escoamento como está mostrado na figura 7.12. Ao se considerar um volume de controle excluindo a turbina (linha tracejada), a complexidade do problema aumenta muito, devido à presença de uma superfície de controle demasiadamente complexa. Por isso, é conveniente se usar o volume de controle contendo a turbina (linha pontilhada), mas, para isso, é preciso que se inclua um termo de trabalho de eixo  $x$  realizado pela turbina sobre o fluido. Assim, denominando  $\dot{W}_x$  a potência adicionada por



**Figura 7.13:** Transformação de energia hidráulica em energia elétrica.

um eixo ao sistema dentro do volume de controle, tem-se finalmente:

$$\dot{Q} + \dot{W}_\mu + \dot{W}_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} e \rho dV + \int_{S_c} \left( e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.129)$$

### EXEMPLO

A figura 7.13 mostra um corte da barragem de uma usina hidrelétrica, contendo a casa de força com uma turbina. O desnível entre o reservatório e o canal de restituição de vazões é  $H$ . Pela turbina, transita uma vazão volumétrica (unidade  $\text{L}^3 \text{T}^{-1}$ )  $Q_v$ . Desprezando os efeitos de viscosidade na tomada d'água (seção 1) e no canal de restituição (seção 2), admitindo regime de escoamento permanente, e admitindo que a energia cinética nas seções 1 e 2 podem ser desprezadas, determine a potência  $P$  da turbina em função de  $\rho$ ,  $Q_v$ ,  $g$ ,  $H$ .

### SOLUÇÃO

As equações adequadas para a solução deste problema são a da conservação da massa (7.30) e a da conservação da energia (7.129). Admitindo que o fluido seja incompressível, usando o fato de que o regime é permanente, e escolhendo como volume de controle o volume de fluido entre as seções 1 e 2 (parte clara da barragem na figura), contendo a casa de máquinas, a equação

(7.30) torna-se apenas:

$$-v_1 A_1 + v_2 A_2 = -Q_v + v_2 A_2 = 0, \quad (7.130)$$

onde  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $A_1$ , e  $A_2$  são as velocidades e áreas nas seções 1 e 2.

Na equação da energia (7.129) os termos de dissipação viscosa e de trocas de calor com o ambiente,  $\dot{W}_\mu$  e  $\dot{Q}$  serão desprezados, assim como o termo transiente. Então:

$$\begin{aligned} \dot{W}_x &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} e \rho dV + \int_{S_c} \left( e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= \int_{S_1} \left( e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &+ \int_{S_2} \left( e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \end{aligned} \quad (7.131)$$

Admitindo que as seções  $S_1$  e  $S_2$  são pequenas e que portanto a energia específica  $e$  e a pressão  $p$  são homogêneas nestas seções, estas quantidades podem ser fatoradas das integrais de superfície, e o cálculo das mesmas se tornam triviais:

$$\dot{W}_x = \rho \left[ \left( e_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) (-v_1 A_1) + \left( e_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) (v_2 A_2) \right]. \quad (7.132)$$

As energias específicas são dadas pelas somas das energias específicas internas  $u$ , cinéticas  $v^2/2$ , e potenciais  $gz$ :

$$e_1 = u_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1, \quad (7.133)$$

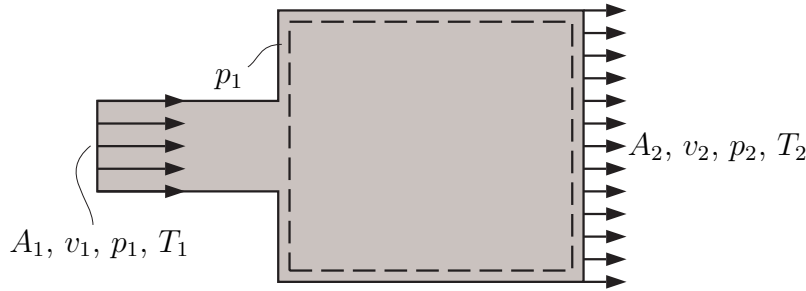
$$e_2 = u_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2. \quad (7.134)$$

Desprezando  $v^2/2$  e lembrando que  $Q_v = v_1 A_1 = v_2 A_2$ , tem-se:

$$\dot{W}_x = \left[ - \left( u_1 + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) + \left( u_2 + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) \right] \rho Q_v. \quad (7.135)$$

Baseado na suposição de que as energias cinéticas  $v^2/2$  são pequenas, é possível calcular as pressões  $p_1$  e  $p_2$  hidrostaticamente (ver próxima seção: Equação de Bernoulli). Assim:

$$\frac{p_1}{\rho} = gh_1, \quad \frac{p_2}{\rho} = gh_2. \quad (7.136)$$



**Figura 7.14:** Escoamento de um gás através de uma expansão súbita.

A expressão para  $\dot{W}_x$  fica:

$$\begin{aligned}\dot{W}_x &= [-u_1 - gz_1 - gh_1 + u_2 + gz_2 + gh_2] \rho Q_v \\ &= [-(u_1 + gH_1) + (u_2 + gH_2)] \rho Q_v \\ &= \rho Q_v g (H_2 - H_1) + \rho Q_v (u_2 - u_1). \quad (7.137)\end{aligned}$$

A energia interna específica  $u$  é função da massa específica  $\rho$  e da temperatura  $T$  (ver capítulo 2). Assim, admitindo que o processo é isotérmico (a temperatura da água é a mesma nas seções 1 e 2), e tem-se que  $u_1 = u_2$ , donde:

$$\dot{W}_x = -\rho Q_v g H. \quad (7.138)$$

A potência fornecida pela turbina é o recíproco da taxa de trabalho fornecida pelo seu eixo ao sistema ocupando o volume de controle:

$$P = \rho Q_v g H. \quad (7.139)$$

■

### EXEMPLO

A figura 7.14 mostra um gás ideal escoando através do alargamento de uma tubulação. As condições na seção 1 de área  $A_1$  são: pressão  $p_1$ , velocidade  $v_1$ , temperatura  $T_1$ . A seção 2 tem área  $A_2$ . Determine, em função das condições na seção 1, de  $A_2$ , e do calor específico a pressão constante do gás  $c_p$ : a taxa de transferência de calor  $\dot{Q}$  através das paredes do alargamento, e as condições  $p_2$ ,  $v_2$ ,  $T_2$  após o alargamento (suponha que o escoamento é incompressível).

**SOLUÇÃO**

O volume de controle escolhido está indicado pela linha tracejada na figura 7.14. As equações a serem utilizadas são as da conservação da massa, quantidade de movimento em  $x$ , e energia, dadas por:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.140)$$

$$F_{sx} + F_{cx} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} v_x \rho dV + \int_{S_c} v_x \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.141)$$

$$\dot{Q} + \dot{W}_\mu + \dot{W}_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} e \rho dV + \int_{S_c} \left( e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.142)$$

Repare que o problema possui 4 incógnitas e que há apenas 3 equações de conservação. A equação adicional que pode ser usada é a equação de estado:

$$p = \rho RT. \quad (7.143)$$

Primeiramente, o problema é permanente, de modo que as derivadas temporais são nulas. A massa específica (constante) pode ser calculada em função das condições na seção 1 por:

$$\rho = \frac{p_1}{RT_1}. \quad (7.144)$$

Supondo uniformidade das condições do fluido nas seções 1 e 2, a equação da conservação de massa fornece:

$$0 = -\rho v_1 A_1 + \rho v_2 A_2, \quad (7.145)$$

ou:

$$v_2 = \beta v_1, \quad \beta = \frac{A_1}{A_2}. \quad (7.146)$$

Não há forças de corpo na direção  $x$ . Repare que a pressão  $p_1$  não cai imediatamente após a expansão do duto, e que o valor de  $p$  próximo às paredes da expansão deve necessariamente ser  $p = p_1$ . As paredes verticais por sua vez reagem à essa força de pressão e a força total na direção  $x$  fica:

$$F_{sx} = (p_1 - p_2) A_2. \quad (7.147)$$

A equação dinâmica escreve-se:

$$\begin{aligned}(p_1 - p_2) A_2 &= -\rho v_1^2 A_1 + \rho v_2^2 A_2 \\ &= \rho (v_2 - v_1) v_2 A_2,\end{aligned}\quad (7.148)$$

onde foi usado que  $v_1 A_1 = v_2 A_2$ . Dividindo por  $A_2$  e usando novamente a equação da continuidade:

$$p_2 = p_1 + (\beta - \beta^2) \rho v_1^2. \quad (7.149)$$

A temperatura na seção 2 vem da equação de estado:

$$T_2 = \frac{p_2}{\rho R}. \quad (7.150)$$

Finalmente, resta calcular a taxa em que calor é trocado através da superfície de controle. Não há trabalho de eixo ( $\dot{W}_x$ ) neste caso e o trabalho devido à viscosidade ( $\dot{W}_\mu$ ) pode ser desprezado. Assim, a equação do balanço de energia fica:

$$\dot{Q} = - \left( e_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) \rho v_1 A_1 + \left( e_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) \rho v_2 A_2, \quad (7.151)$$

onde  $z_1$  e  $z_2$  são as alturas das seções 1 e 2 em relação a um nível equipotencial de referência,  $u_1$  e  $u_2$  são as energias específicas internas nas seções 1 e 2. Utilizando a equação de estado e da conservação da massa:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \rho v_1 A_1 \left[ (u_2 - u_1) + g(z_2 - z_1) \right. \\ &\quad \left. + R(T_2 - T_1) + \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) \right].\end{aligned}\quad (7.152)$$

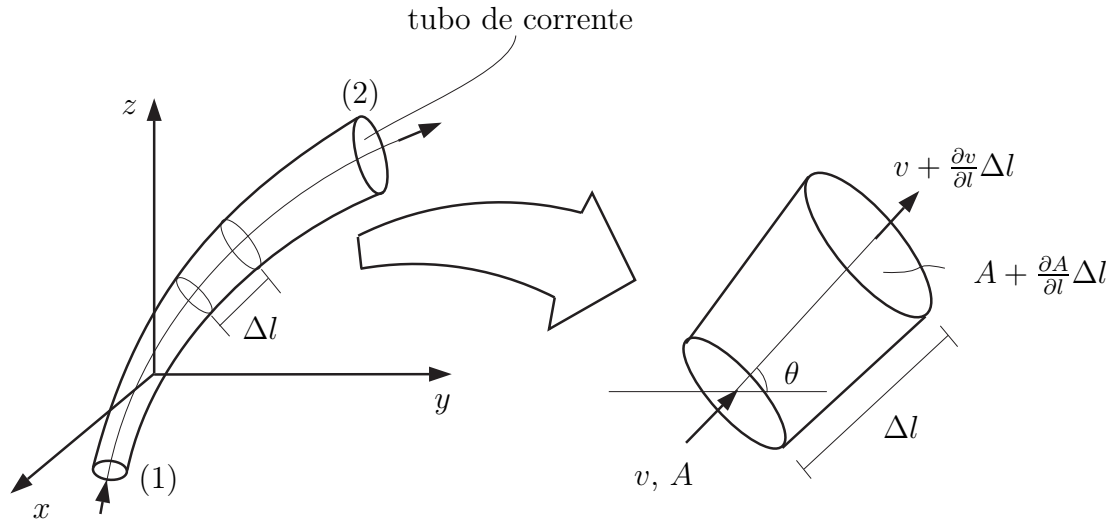
Mas, admitindo que  $z_1 = z_2$ , e tomando para o caso de um gás ideal:

$$u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1), \quad c_p = c_v + R, \quad (7.153)$$

tem-se:

$$\dot{Q} = \rho v_1 A_1 \left[ c_p (T_2 - T_1) + \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) \right]. \quad (7.154)$$

■



**Figura 7.15:** Equação de Bernoulli em um tubo de corrente.

## 7.7 A EQUAÇÃO DE BERNOULLI

A equação do balanço de quantidade de movimento pode ser reduzida a uma forma bastante conveniente, chamada *equação de Bernoulli*. A dedução envolve o balanço de quantidade de movimento em um elemento de fluido e sua integração ao longo de uma linha de corrente (ou linha de fluxo). O resultado pode ser interpretado como um balanço de energia mecânica, o que mostra que o balanço de energia mecânica (em um sistema conservativo, ou seja, desprovido de dissipação de energia) e o balanço de quantidade de movimento são equivalentes.

Considere um escoamento com as seguintes características:

1. escoamento permanente;
2. efeitos de viscosidade desprezíveis;
3. compressibilidade desprezível;

Define-se um volume de controle elementar de comprimento  $\Delta l$  ao longo de uma linha de fluxo e supondo que não há escoamento através das paredes deste volume (tal volume é chamado de *tubo de corrente* ou *tubo de fluxo*), conforme mostra a figura 7.15. Considere agora a equação da conservação da massa e de quantidade de movimento na direção  $l$  (ou seja na direção

tangente à linha de corrente):

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.155)$$

$$F_{sl} + F_{cl} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} v_l \rho dV + \int_{S_c} v_l \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.156)$$

Por definição, não há fluxo através das paredes laterais do tubo de corrente. Em geral a área da seção transversal do tubo de corrente é dependente de  $l$ . Considerando que as velocidades são aproximadamente uniformes em qualquer seção transversal do tubo, e que o comprimento do tubo  $\Delta l$  é suficientemente pequeno, de forma que pode-se expressar a pressão, velocidade, e a área na saída do elemento de comprimento  $\Delta l$  como os dois primeiros termos da série de Taylor destas variáveis em torno dos seus valores na entrada do elemento, a equação de conservação da massa em regime permanente fornece:

$$\begin{aligned} 0 &= -\rho v A + \rho \left( v + \frac{\partial v}{\partial l} \Delta l \right) \left( A + \frac{\partial A}{\partial l} \Delta l \right) \\ &= \rho \left( A \frac{\partial v}{\partial l} + v \frac{\partial A}{\partial l} \right) \Delta l + \rho \frac{\partial v}{\partial l} \frac{\partial A}{\partial l} \Delta l^2 \\ &= \rho \frac{\partial}{\partial l} (v A) \Delta l + \rho \frac{\partial v}{\partial l} \frac{\partial A}{\partial l} \Delta l^2. \end{aligned} \quad (7.157)$$

Dividindo a expressão acima por  $\Delta l$  e tomando o limite quando  $\Delta l \rightarrow 0$ :

$$\rho \frac{\partial}{\partial l} (v A) = 0. \quad (7.158)$$

Na equação dinâmica (7.156), a resultante das forças de superfícies na direção  $l$  sobre o volume de controle é:

$$\begin{aligned} F_{sl} &= p A - \left( p + \frac{\partial p}{\partial l} \Delta l \right) \left( A + \frac{\partial A}{\partial l} \Delta l \right) \\ &\quad + \left( p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial l} \Delta l \right) \frac{\partial A}{\partial l} \Delta l. \end{aligned} \quad (7.159)$$

O último termo do lado direito da equação acima é a pequena contribuição da pressão nas paredes laterais do tubo (tomada como atuando na posição  $\Delta l/2$ ). Rearranjando os termos escreve-se:

$$F_{sl} = -A \frac{\partial p}{\partial l} \Delta l - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial l} \frac{\partial A}{\partial l} \Delta l^2 \approx -A \frac{\partial p}{\partial l} \Delta l. \quad (7.160)$$

Repare que como  $\Delta l \ll 1$  o termo quadrático pôde ser desprezado em comparação com o termo linear.

A força de corpo em  $l$  é a projeção do peso do sistema naquela direção:

$$\begin{aligned}
 F_{cl} &= - \left( A + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial l} \Delta l \right) \Delta l \rho g \sin \theta \\
 &= - \left( A + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial l} \Delta l \right) \rho g \Delta z \\
 &= - \left( A + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial l} \Delta l \right) \rho g \frac{\partial z}{\partial l} \Delta l \\
 &\approx - \rho g A \frac{\partial z}{\partial l} \Delta l,
 \end{aligned} \tag{7.161}$$

onde foi usado  $\sin \theta = \frac{\Delta z}{\Delta l}$ , e, novamente, o termo quadrático em  $\Delta l$  foi desprezado. O fluxo de quantidade de movimento na direção  $l$  através da superfície de controle é:

$$\begin{aligned}
 \int_{S_c} v_l \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= -\rho v^2 A + \rho \left( v + \frac{\partial v}{\partial l} \Delta l \right)^2 \left( A + \frac{\partial A}{\partial l} \Delta l \right) \\
 &\approx \frac{\partial}{\partial l} (\rho v^2 A) \Delta l.
 \end{aligned} \tag{7.162}$$

Reunindo (7.160), (7.161), e (7.162):

$$-A \frac{\partial p}{\partial l} \Delta l - \rho g A \frac{\partial z}{\partial l} \Delta l = \frac{\partial}{\partial l} (\rho v^2 A) \Delta l. \tag{7.163}$$

Combinando os termos em 7.156 e dividindo a equação por  $\Delta l$  tem-se (repare que tomando o limite quando  $\Delta l \rightarrow 0$  anularia os termos não lineares em  $\Delta l$  mesmo se estes não tivessem sido desprezados nas expressões anteriores):

$$-A \frac{\partial p}{\partial l} - \rho A g \frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} (\rho v^2 A). \tag{7.164}$$

Mas

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial l} (\rho v^2 A) &= \rho \frac{\partial (vA)}{\partial l} v + \rho v A \frac{\partial v}{\partial l} \\
 &= \rho v A \frac{\partial v}{\partial l} = \rho A \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{2} v^2 \right),
 \end{aligned} \tag{7.165}$$

onde foi usado  $\frac{\partial}{\partial l} (vA) = 0$ , pela equação da conservação da massa. Dividindo a equação acima por  $A$ :

$$\frac{\partial}{\partial l} \left( p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = 0, \tag{7.166}$$

ou:

$$p + \rho gz + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante.} \quad (7.167)$$

A equação (7.167) é conhecida como *equação de Bernoulli*. De acordo com ela, ao longo de uma linha de corrente, a soma do trabalho realizado pela pressão, da energia potencial gravitacional, e da energia cinética (no caso, por unidade de volume) permanece constante, se: (i) o escoamento for permanente; e (ii) os termos viscosos puderem ser desprezados. A equação de Bernoulli é extremamente útil para se aplicar a escoamentos onde não há fonte ou perdas consideráveis de energia mecânica.

## 7.8 A EQUAÇÃO DE BERNOULLI E O BALANÇO DE ENERGIA

Considere a figura 7.15. Aplicando as equações do balanço de massa (7.30) e energia (7.128) ao volume de controle entre as seções (1) e (2), admitindo que o trabalho das forças viscosas nas laterais do tubo é desprezível, tem-se:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2. \quad (7.168)$$

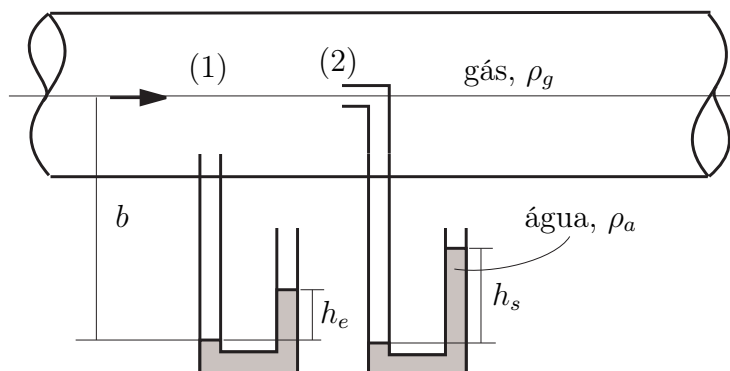
e:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= - \left( u_1 + \frac{1}{2}v_1^2 + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) \rho v_1 A_1 \\ &\quad + \left( u_2 + \frac{1}{2}v_2^2 + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) \rho v_2 A_2 \\ &= \left[ \left( \frac{1}{2}v_2^2 + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) - \left( \frac{1}{2}v_1^2 + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) \right] \rho v_1 A_1 \\ &\quad + (u_2 - u_1) \rho v_1 A_1. \end{aligned} \quad (7.169)$$

Se as hipóteses da equação de Bernoulli valem, o termo entre colchetes é nulo, e a equação da energia se torna:

$$\dot{Q} = (u_2 - u_1) \rho v_1 A_1, \quad (7.170)$$

ou seja, quando não há fonte ou dissipação de energia mecânica em um escoamento permanente, a energia térmica e a energia mecânica ficam desacopladas. O calor  $Q$  trocado com o ambiente apenas muda a energia interna (temperatura) do sistema, e não sua energia mecânica.

**Figura 7.16:** Tubo de Pitot.**EXEMPLO**

A figura 7.16 mostra um esquema para se medir a velocidade de um fluido conhecido por *tubo de Pitot*. Dois manômetros, contendo água (massa específica  $\rho_a$ ) são inseridos numa tubulação contendo gás (massa específica  $\rho_g$ ) em escoamento. A entrada do primeiro manômetro é perpendicular ao escoamento, enquanto que a do segundo é de frente para o mesmo. As leituras nos dois manômetros são  $h_e$  e  $h_s$  respectivamente. Em função de  $\rho_g$ ,  $\rho_a$ ,  $g$ , e das alturas manométricas  $h_e$  e  $h_s$ , determine a pressão e a velocidade do gás dentro do tubo (considere que as mesmas são uniformes dentro do tubo, e que o regime é permanente).

**SOLUÇÃO**

O primeiro manômetro mede a chamada *pressão estática* do escoamento, isto é a pressão real do fluido. Na entrada do segundo manômetro (2) a velocidade do gás é nula, e a pressão lida é denominada *pressão de estagnação*, que é maior que a pressão estática pois envolve o trabalho que o manômetro realiza para desacelerar o fluido naquele ponto. A diferença entre a pressão de estagnação e a pressão estática é denominada *pressão dinâmica*. A pressão estática  $p_e$  é dada pela leitura do manômetro (1):

$$p_e + \rho_g g b = p_{\text{atm}} + \rho_a g h_e. \quad (7.171)$$

Desprezando o peso do gás dentro do manômetro:

$$p_e = p_{\text{atm}} + \rho_a g h_e. \quad (7.172)$$

Analogamente, a pressão de estagnação é:

$$p_s = p_{\text{atm}} + \rho_a g h_s. \quad (7.173)$$

Aplicando a equação de Bernoulli entre (1) e (2):

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2, \quad (7.174)$$

com  $p_1 = p_e$ ,  $v_1 = v = ?$ ,  $z_1 = 0$ ,  $p_2 = p_s$ ,  $v_2 = 0$ , e  $z_2 = 0$ :

$$p_e + \frac{1}{2} \rho_g v^2 = p_s. \quad (7.175)$$

Então:

$$v = \sqrt{2 \frac{\rho_a}{\rho_g} g (h_s - h_e)}. \quad (7.176)$$

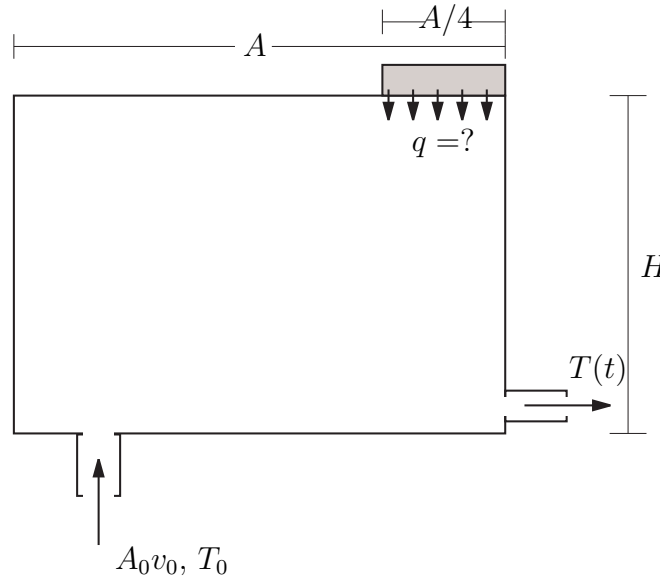
■

## 7.9 PROBLEMAS PROPOSTOS

1. A figura 7.17 mostra uma câmara (volume  $A \times H$ ) onde entra ar numa seção de área  $A_0$ , a temperatura  $T_0$ , com velocidade uniforme  $v_0$ . A temperatura na câmara é uniforme e é igual à temperatura na saída do recipiente. O calor específico a volume constante  $c_v$  e a massa específica do gás  $\rho$  são constantes. Na parte superior direita (área  $A/4$ ) da câmara há uma fonte de calor que fornece um fluxo específico  $q$ . Determine qual o fluxo de calor  $q$  necessário para manter a temperatura  $T(t)$  na câmara constante e igual a  $5T_0$ . Utilizando o resultado acima para  $q$ , ache a solução transiente para  $T(t)$  (temperatura dentro e na saída do recipiente) considerando que inicialmente  $T(t = 0) = T_0$ . Dados:  $T_0$ ,  $Q_0$ ,  $c_v$ ,  $\rho$ ,  $A$ .

$$\left( t \frac{H V}{v_a v_v} - \right) dx \partial_0 L v - \partial_0 L v = L \cdot V / \partial_0 L^a v_0 \partial_0 V d \Gamma = b : Resposta$$

2. A figura 7.18 mostra um aparato conhecido por *tubo venturi*, para medir a vazão de um tubo. O aparato consiste de um afunilamento do tubo (seção 2, área  $A_2$ ) e do uso de dois manômetros para se medir a pressão nas seções 1 (área  $A_1$ ) e 2. Admita que os fluxos de energia potencial nas seções 1 e 2 do tubo são idênticos, que o regime do



**Figura 7.17:** Aquecimento de ar circulando recipiente.

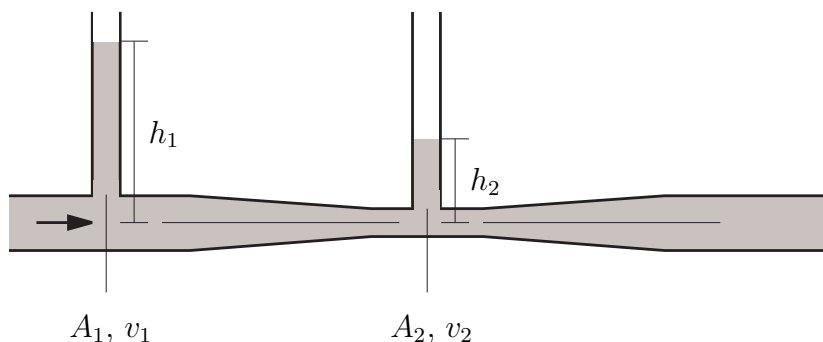
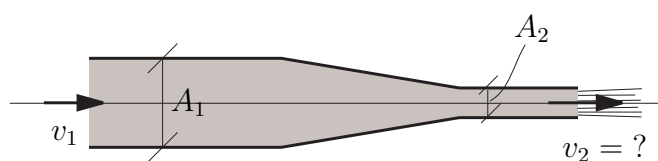
escoamento é permanente, que todas as propriedades do fluido e do escoamento são homogêneas em cada seção transversal do tubo, e que dissipações viscosas são desprezíveis. Em função de  $A_1$ ,  $A_2$ , das alturas manométricas  $h_1$  e  $h_2$ , e da massa específica do fluido  $\rho$ , determine as velocidades na seção 1 e na seção 2.

$$\frac{z_2(z_2/1_2)-1}{(z_2-1_2)g} \sqrt{\frac{z_2}{1_2}} = z_2 \frac{z_2(z_2/1_2)-1}{(z_2-1_2)g} \sqrt{\frac{z_2}{1_2}} = 1_2 \text{ Resposta}$$

3. A figura 7.19 mostra uma contração em uma tubulação que despeja água na atmosfera em forma de um jato após a contração (pense na ponta de uma mangueira do corpo de bombeiros). Admitindo que as propriedades do fluido são uniformes nas seções transversais, que o escoamento é permanente, que a dissipação viscosa pode ser desprezada, e que o sistema não se envolve em processos de trocas de calor. calcule a força  $F$  que o fluido faz na tubulação em função da massa específica do fluido  $\rho$ , da velocidade antes da contração  $v_1$ , da aceleração da gravidade  $g$ , das áreas antes e depois da contração  $A_1$  e  $A_2$ . Para simplificar, suponha que a pressão ao longo dessa redução é próxima à pressão atmosférica  $p_0$ .

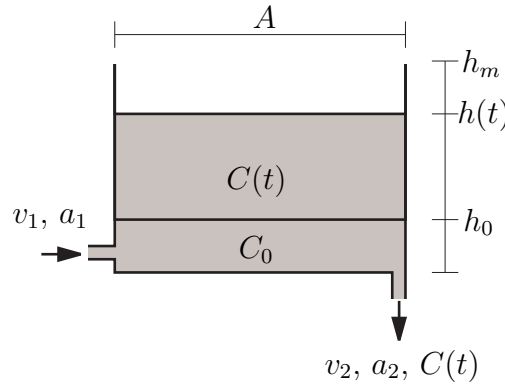
$$\frac{z_2}{1_2} \sqrt{\frac{z_2}{1_2}} = v_1 \sqrt{\frac{z_2}{1_2}}; F = \rho v_1^2 A_1 (1 - A_1/A_2) \text{ Resposta}$$

4. A figura 7.20 mostra um tanque de base com área  $A$  e altura  $h_m$  inicial-

**Figura 7.18:** Tubo venturi.**Figura 7.19:** Força devido a uma contração de um tubo.

mente contendo água até o nível  $h_0$  e com uma concentração inicial de cloro  $C_0$ . Para que se faça a retirada do cloro ao mesmo tempo que se encha o tanque, abre-se a válvula da seção 1 (área  $a_1$ ) e injeta-se *água pura* no tanque com velocidade  $v_1$ . Enquanto isso, abre-se também a válvula da seção 2 (área  $a_2$ ) e controla-se a velocidade de saída  $v_2$  para que esta propicie uma vazão igual à metade da vazão de entrada. Admita que o cloro e a água se misturam imediatamente, de forma que a concentração de cloro na saída é igual à concentração de cloro dentro do tanque  $C(t)$ . Admita também que não há fluxo difusivo envolvido no problema ( $\dot{J} = 0$ ). Em função de  $A$ ,  $v_1$ ,  $a_1$ ,  $h_0$ ,  $h_m$ ,  $C_0$ , e da massa específica da mistura água cloro (considere-a constante)  $\rho$ , encontre: (a) o tempo para que o tanque atinja  $h_m$ ; (b) a solução  $C(t)$ ; (c) o tempo para que a concentração se reduza à metade de  $C_0$ .

$$\frac{v_1 a_1}{(1-\frac{v_1 a_1}{v_2 a_2})} = t \quad (c) \quad \frac{v_1 a_1}{(1-\frac{v_1 a_1}{v_2 a_2})} + 0 \quad (b) \quad \frac{v_1 a_1}{(1-\frac{v_1 a_1}{v_2 a_2})} = t \quad (a) \quad \frac{v_1 a_1}{(1-\frac{v_1 a_1}{v_2 a_2})} = t$$



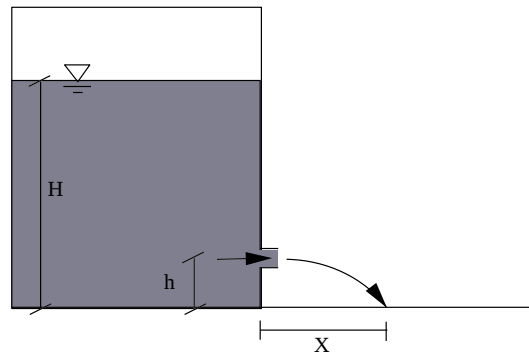
**Figura 7.20:** Entra água pura – Sai água com cloro.

5. A figura 7.21 mostra um sistema em regime permanente onde entra água (com massa específica uniforme  $\rho$ ) na seção 1 e sai pela seção 2. As áreas das seções são  $A_1$  e  $A_2$  respectivamente. A pressão na seção 2 é  $p_2$ , enquanto que na seção 1 a pressão é desconhecida. Considere que as propriedades do escoamento (pressão, velocidade, energia cinética e potencial, etc.) podem ser consideradas uniformes em cada seção. Despreze a pressão atmosférica agindo no sistema. Sabendo que a força horizontal máxima que o apoio da tubulação suporta fazer antes de quebrar é  $F$ , calcule a velocidade máxima  $v_1$  de entrada do fluido pela seção 1 para a qual a haste não quebra em função de  $F$ ,  $p_2$ ,  $\Delta h$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ . (obs.: não se preocupe com a força vertical no apoio, ou seja, ignore as forças na direção vertical.)

$$\frac{(\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{1}{2}v_3^2 + \frac{1}{2}v_4^2)}{(q \nabla b d^2 v_1 + z d^2 v_2 - z d^2 v_3 - z d^2 v_4)} \Lambda = v_1 : v_1 \text{ s o d s e } \mathcal{H}$$

6. A figura 7.22 mostra um tanque esférico (raio  $R$ ) onde entra água (massa específica  $\rho$ , incompressível) pura na seção 1. No fundo, há uma fonte de um soluto A alimentando a água na esfera a um fluxo específico igual a  $\mathbf{j}_A$  através da área  $a$ . Admita que esta massa do soluto se mistura imediatamente com a água e que a massa específica da solução permanece igual à da água pura. A solução água+soluta então sai pela área  $A_2$ . Em função dos dados e a partir das equações integrais da conservação: (a) determine a velocidade  $v_2$  da solução na saída; (b) qual é a solução em regime permanente (equilíbrio) do problema? (c) determine uma equação diferencial para a concentração  $C_A$  do soluto como função do tempo, que descreva o regime transiente; (d) Resolva

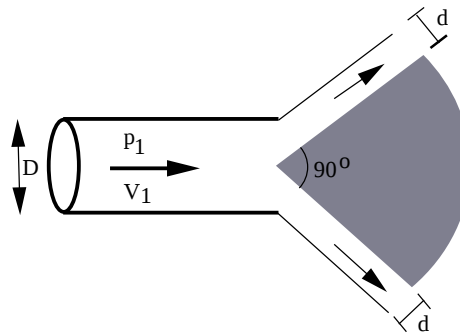


**Figura 7.23:** Tanque furado.

velocidade  $V_1$ . Na saída, a pressão pode ser considerada igual a  $p_1$ , o ar se choca com um cone com ângulo de  $90^\circ$  formando uma lâmina de altura  $d$ .

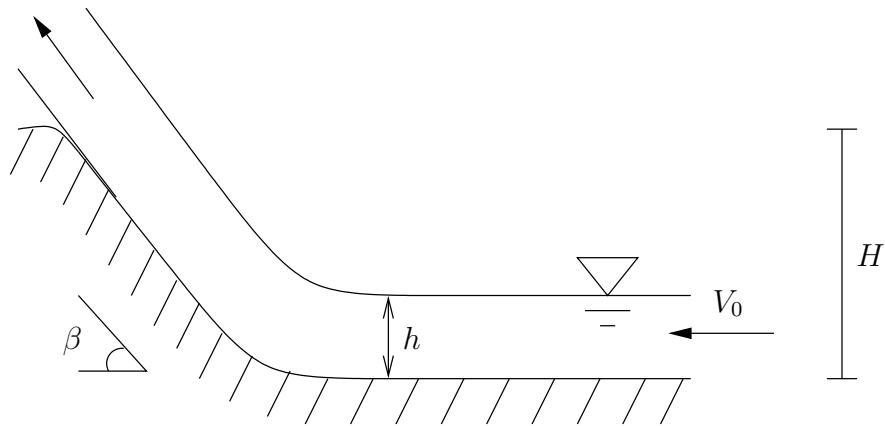
Estime a força para o cone com altura  $h$ .

$$\int_C \left[ (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) / \tau \mathbf{C} - \rho / \tau \mathbf{C} \right] \frac{1}{\tau} d\tau = \mathbf{F} \quad \text{Resposta}$$

**Figura 7.24:** Força do ar sobre um cone.

9. A figura 7.25 mostra uma tubulação com escoamento permanente de água de massa específica  $\rho$ . A tubulação está em planta (portanto, ignore a força da gravidade). Nessa tubulação há uma redução de diâmetro (de  $D$  para  $d$ ), e logo após, há uma curva (o diâmetro se mantém igual a  $d$  nessa curva) de  $180^\circ$ . A velocidade e a pressão são uniformes na área da seção e conhecidas na entrada do tubo ( $V_1$  e  $p_1$ ). Desprezando qualquer perda de energia por dissipação: (a) utilizando a conservação da massa e a equação de Bernoulli, calcule a velocidade e a pressão na saída do tubo; (b) utilizando a conservação da quantidade



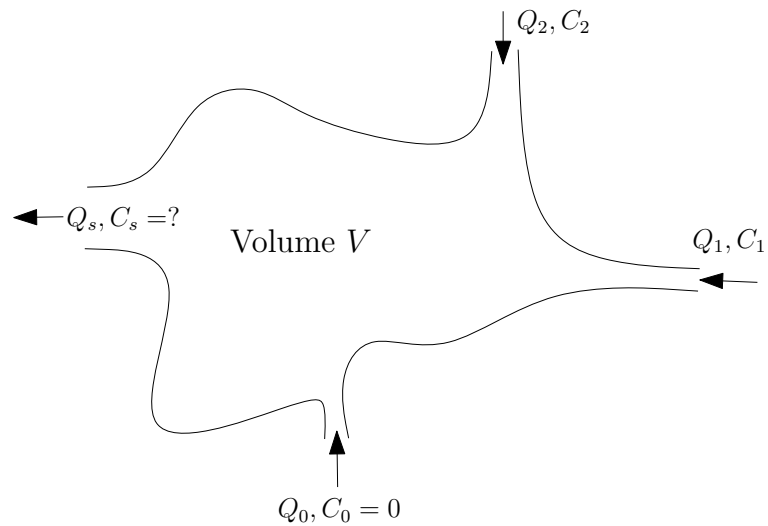


**Figura 7.26:** Força da água numa rampa.

- (b) Encontre uma equação diferencial para a concentração  $C_s(t)$ .  
 (c) Determine o menor  $Q_0$  para que a concentração na lagoa não ultrapasse um valor máximo denotado por  $C_M$  (esse valor é conhecido).

Obs.: Despreze fluxos difusivos ( $\dot{J} = 0$ ).

$\cdot \mathcal{D} + \mathcal{I} \mathcal{D} - \mathcal{N} \mathcal{D} / (\mathcal{E} \mathcal{D} \mathcal{E} \mathcal{D} + \mathcal{I} \mathcal{D} \mathcal{I} \mathcal{D}) < \mathcal{O} \mathcal{D} \text{ (o) } \mathcal{E} \mathcal{D} \mathcal{E} \mathcal{D} + \mathcal{I} \mathcal{D} \mathcal{I} \mathcal{D} = \mathcal{S} \mathcal{D} (\mathcal{E} \mathcal{D} + \mathcal{I} \mathcal{D} + \mathcal{O} \mathcal{D}) + \mathcal{S} \mathcal{D} \mathcal{A} \text{ (q) } \mathcal{E} \mathcal{D} + \mathcal{I} \mathcal{D} + \mathcal{O} \mathcal{D} = \mathcal{S} \mathcal{D} \text{ (v) } \mathcal{E} \mathcal{D}$



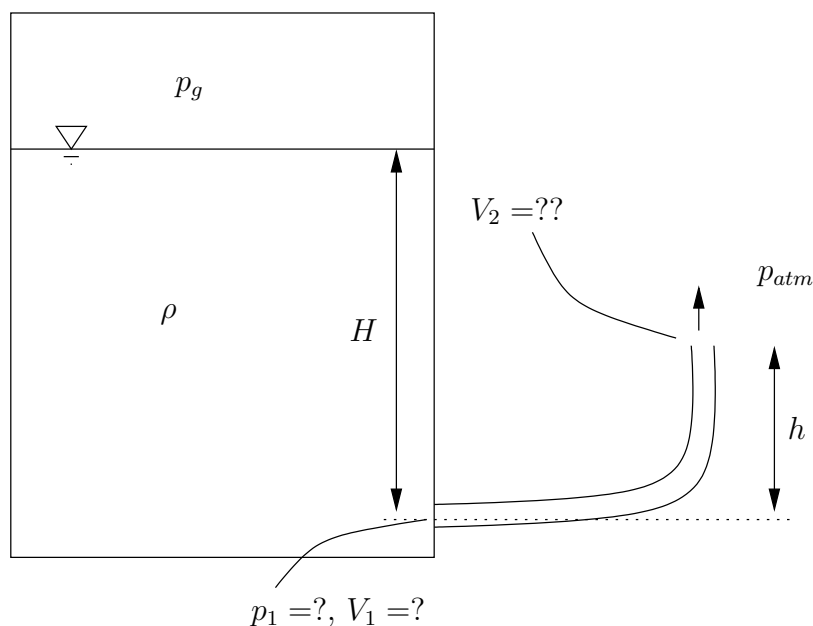
**Figura 7.27:** Lagoa com poluente.

12. A figura 7.28 mostra um sistema em que água (densidade  $\rho$ , profundi-

dade  $H$ ) sob pressão  $p_g$  de um gás de um tanque sai por uma tubulação de diâmetro constante que se curva para cima até uma altura  $h$ , onde a pressão é a atmosférica  $p_{atm}$ . Conhecendo essas variáveis (mais, obviamente, a aceleração gravitacional  $g$ ), e supondo escoamento permanente, determine:

- (a) A velocidade  $V_2$  da saída do tubo.
- (b) A velocidade  $V_1$  na entrada do tubo.
- (c) A pressão  $p_1$  na entrada do tubo.

Resposta: (a)  $V_2 = \sqrt{2g(H + h)}$  (b)  $V_1 = \sqrt{2gH}$  (c)  $p_1 = p_g - \rho g H$



**Figura 7.28:** Tanque com jato de água.



## CAPÍTULO 8

# PRINCÍPIOS DE CONSERVAÇÃO: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

### 8.1 INTRODUÇÃO

No capítulo 7 foram desenvolvidas as equações integrais de balanço de massa, quantidade de movimento e energia, para um volume de controle. O conjunto de equações integrais obtido atende às necessidades de solução de um grande número de problemas práticos de transferência dessas quantidades. Em muitos casos, entretanto, é desejável que se conheça as grandezas intensivas como função do espaço e do tempo. Este conhecimento mais detalhado da solução do problema se dá através das soluções de equações diferenciais parciais governando as propriedades do escoamento em cada ponto do espaço.

Neste capítulo serão deduzidas equações diferenciais que atendem aos mesmos princípios físicos já apresentados no capítulo 7. Este conjunto de equações diferenciais deverá ser capaz de descrever a evolução temporal das variáveis de interesse em Mecânica dos Fluidos e Fenômenos de Transferência em todos os pontos do domínio espacial, para uma vasta gama de problemas. As fronteiras do domínio do problema serão tratadas nas chamadas *condições de contorno*, que, juntamente com as condições iniciais, complementam as equações diferenciais na especificação completa do problema. Obviamente, qualquer solução particular de interesse terá que satisfazer simultaneamente tanto às equações diferenciais quanto às condições iniciais e de contorno. Na maioria dos casos práticos em engenharia esses *problemas de valor de contorno* não possuem solução analítica completa e, por isso, recorre-se com frequência a simplificações ou a métodos de solução numé-

rica (onde aproxima-se as equações diferenciais por equações algébricas) das equações. Este texto introdutório se concentrará nos casos em que é possível simplificar o problema suficientemente para obter-se soluções analíticas para os problemas.

A dedução das equações diferenciais de conservação pode ser feita diretamente a partir da aplicação das leis da física e das equações constitutivas (capítulo 6) em partículas de fluido elementares, ou a partir das equações integrais para um volume de controle já deduzidas no capítulo 7. A última opção será a utilizada neste texto. Na próxima seção faz-se uma breve revisão das equações integrais (capítulo 7) e equações constitutivas (fluxos difusivos - capítulo 6) para posteriormente chegar-se à análise diferencial.

## 8.2 FLUXOS DIFUSIVOS E EQUAÇÕES INTEGRAIS

As equações ou leis constitutivas de Fick, Fourier, e Newton, apresentadas no capítulo 6, regem os processos de transferência difusiva de massa, energia, e quantidade de movimento. Elas são, respectivamente:

$$\mathbf{j} = -\rho D_{AB} \nabla C_A; \quad (8.1)$$

$$\mathbf{q} = -\rho c_p \alpha \nabla T; \quad (8.2)$$

$$\mathbf{T} = \left[ -p + \frac{2}{3} \rho \nu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \mathbf{I} + 2\rho \nu \mathbf{D}. \quad (8.3)$$

Abaixo está uma lista com as definições dos parâmetros e variáveis presentes nas equações acima e suas unidades SI:

- $\mathbf{j}$  – vetor fluxo específico de massa ( $\text{kg}_A \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ );
- $\rho$  – massa específica ( $\text{kg m}^{-3}$ );
- $D_{AB}$  – difusividade molecular do soluto A no solvente B ( $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$ );
- $\nabla C_A$  – vetor gradiente da concentração do soluto A ( $\text{kg}_A \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-1}$ );
- $\mathbf{q}$  – vetor fluxo difusivo específico de calor ( $\text{J m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ );
- $c_p$  – calor específico a pressão constante ( $\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ );
- $\alpha$  – difusividade térmica ( $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$ );
- $\nabla T$  – vetor gradiente de temperatura ( $\text{K m}^{-1}$ );
- $\mathbf{T}$  – tensor de tensões (Pa);
- $\nu$  – viscosidade cinemática ( $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$ );
- $\nabla \cdot \mathbf{v}$  – divergente da velocidade ( $\text{s}^{-1}$ );
- $\mathbf{D}$  – tensor taxa de deformação ( $\text{s}^{-1}$ ).

A ideia agora é a de acoplar as equações constitutivas (8.1)-(8.3) às equações integrais de conservação apresentadas no capítulo 7. O fluxo difusivo

não afeta o balanço de massa em um volume de controle, que é:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0. \quad (8.4)$$

A equação de conservação da massa de um soluto para um volume de controle pode ser expressa combinando-se (7.5) com (7.58), lembrando que o sistema de (7.5) é o que está ocupando o volume de controle de (7.58) no instante considerado. Esta equação escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} C_A \rho dV + \int_{S_c} C_A \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = - \int_{S_c} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (8.5)$$

Analogamente a equação de balanço de quantidade de movimento pode ser escrita combinando-se (7.6), (7.7), e (7.72):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \mathbf{v} \rho dV + \int_{S_c} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{V_c} \rho \mathbf{g} dV + \int_{S_c} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (8.6)$$

Finalmente a equação da energia é reescrita como a combinação de (7.126), (7.13), (7.8), e (7.9):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} e \rho dV + \int_{S_c} e \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = - \int_{S_c} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S_c} [(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}] dS. \quad (8.7)$$

Se no escoamento não há fontes e/ou dissipação de energia mecânica, já foi visto que esta se conservará, e que a equação da conservação da energia se reduz a um balanço entre as trocas de calor e a variação da energia interna (energia térmica) do fluido. Neste caso:

$$- \int_{S_c} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} c_v T \rho dV + \int_{S_c} c_v T \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (8.8)$$

onde  $c_v$  é o calor específico a volume constante e  $T$  é a temperatura, ambos em cada ponto do fluido.

### 8.3 A DERIVADA MATERIAL DE UMA PROPRIEDADE INTENSIVA

Considere uma propriedade intensiva  $\eta$  (ou seja, uma que seja associada a cada ponto de um meio contínuo) qualquer. Obviamente, sob uma perspectiva euleriana, esta propriedade é, em geral, função do espaço tri-dimensional e do tempo. Em coordenadas cartesianas:

$$\eta = \eta(x, y, z, t). \quad (8.9)$$

Acontece que as leis da física, que tratam de taxas de variação temporal de tais propriedades, se aplicam a partículas de fluido, e não a pontos do espaço, de modo que para que se aplique tais leis é preciso que se identifique a partícula à qual se está referindo. Em outras palavras, deve-se associar  $\eta$  a uma partícula que se move no meio fluido. Em uma descrição euleriana, a maneira de se resolver este problema é identificando as coordenadas de cada partícula, que agora terão que poder variar no tempo:

$$\eta_{\text{partícula}} = \eta(x(t), y(t), z(t), t), \quad (8.10)$$

de modo que a taxa de variação de  $\eta$  de uma partícula é a derivada total de (8.10):

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\eta}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\eta}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \quad (8.11)$$

Como, por definição,

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \quad (8.12)$$

então:

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \eta, \quad (8.13)$$

onde  $\frac{D\eta}{Dt}$  (com esta notação) é denominada derivada material, ou derivada substantiva, de uma propriedade intensiva e expressa a variação temporal da propriedade  $\eta$  de uma partícula de fluido que, no instante  $t$  ocupa a posição  $(x, y, z)$ , e possui velocidade instantânea  $\mathbf{v}$ . A ideia é equivalente à da derivada material de uma propriedade extensiva, apresentada no capítulo 7.

## 8.4 CONSERVAÇÃO DA MASSA

A equação integral de conservação da massa para um volume de controle arbitrário (mas fixo no tempo) é:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0. \quad (8.14)$$

Neste ponto será usado um sofisticado teorema conhecido por *teorema da divergência*, ou *teorema de Gauss*<sup>1</sup>: Dado um campo vetorial  $\mathbf{f}$  qualquer, e um volume  $V$  no espaço envolvido por uma superfície fechada  $S$ :

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{f}) dV = \int_S (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (8.15)$$

---

<sup>1</sup>Karl Friedrich Gauss (1777-1855) - Considerado o principal matemático do século XIX.

Aplicando (8.15) com  $\mathbf{f} = \rho\mathbf{v}$  à integral de superfície da equação (8.14), esta se torna:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV + \int_{V_c} \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) dV = 0. \quad (8.16)$$

Como o volume de controle não varia no tempo, o operador  $\partial/\partial t$  pode se distribuir dentro da integral e os dois termos de (8.16) podem ser combinados:

$$\int_{V_c} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) \right] dV = 0. \quad (8.17)$$

Como o volume de controle  $V_c$  é arbitrário, a lei integral da conservação da massa (8.17) só pode ser satisfeita se o integrando for nulo para qualquer ponto do espaço em qualquer instante. Então:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0. \quad (8.18)$$

A equação (8.18) é a equação diferencial de conservação da massa. Usando (8.13), (8.18) pode ser reescrita como:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (8.19)$$

que mostra claramente que se a massa específica de uma *partícula* só varia no tempo se houver um divergente não nulo do campo de velocidades. Se o escoamento é incompressível, ou seja, sem deformação volumétrica local ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ), tem-se que a massa específica de cada partícula permanece constante ao longo do tempo:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho = 0 \implies \rho_{\text{partícula}} = \text{constante}. \quad (8.20)$$

Repare porém que diferentes partículas podem ter  $\rho$  diferentes ao longo do escoamento.

## 8.5 CONSERVAÇÃO DA MASSA DE UM SOLUTO

Partindo da equação (8.5):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} C_A \rho dV + \int_{S_c} C_A \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = - \int_{S_c} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (8.21)$$

aplicando-se o teorema da divergência (8.15) às duas integrais de superfície com  $\mathbf{f} = C_A \rho \mathbf{v}$ , e  $\mathbf{f} = \mathbf{j}$ , pode-se escrever:

$$\int_{V_c} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (C_A \rho) + \nabla \cdot (C_A \rho \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{j}) \right] dV = 0, \quad (8.22)$$

donde se conclui que, necessariamente:

$$\frac{\partial}{\partial t} (C_A \rho) + \nabla \cdot (C_A \rho \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{j}) = 0. \quad (8.23)$$

Esta equação pode ser reescrita como (esse passo é deixado como exercício):

$$\frac{\partial}{\partial t} (C_A \rho) + C_A \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla (C_A \rho) + (\nabla \cdot \mathbf{j}) = 0, \quad (8.24)$$

ou, utilizando (8.13) com  $\eta = C_A \rho$ :

$$\frac{D}{Dt} (C_A \rho) + C_A \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{j}) = 0. \quad (8.25)$$

Finalmente, utilizando a lei de Fick (8.1), tem-se:

$$\frac{D}{Dt} (C_A \rho) + C_A \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot (\rho D_{AB} \nabla C_A) = 0. \quad (8.26)$$

ou, usando a equação da conservação da massa (8.18):

$$\rho \frac{DC_A}{Dt} - \nabla \cdot (\rho D_{AB} \nabla C_A) = 0, \quad (8.27)$$

ou ainda, expandindo o último termo:

$$\rho \frac{DC_A}{Dt} - [\nabla (\rho D_{AB}) \cdot \nabla C_A] + \rho D_{AB} \nabla^2 C_A = 0. \quad (8.28)$$

O operador diferencial escalar  $\nabla^2$  é conhecido como o laplaciano<sup>2</sup>, e é definido como o divergente do gradiente, ou seja,  $\nabla^2 = (\nabla \cdot \nabla)$ . Em coordenadas cartesianas:  $\nabla^2 = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)$ . Admitindo que  $D_{AB}$  é uniforme e constante, (8.28) torna-se:

$$\rho \frac{DC_A}{Dt} - D_{AB} (\nabla \rho \cdot \nabla C_A) + \rho D_{AB} \nabla^2 C_A = 0. \quad (8.29)$$

As equações (equivalentes umas às outras) (8.26), (8.27), e (8.28) são equações gerais de conservação da massa de um soluto com concentração mássica  $C_A$  em um fluido, onde  $\rho$  é a massa específica da *mistura*.

Para escoamentos permanentes, a componente local (derivada parcial) de  $D/Dt$  em (8.13) é nula, e (8.27) torna-se:

$$\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) C_A - \nabla \cdot (\rho D_{AB} \nabla C_A) = 0. \quad (8.30)$$

---

<sup>2</sup>Pierre Simon de Laplace (1749-1827) - Matemático, físico, químico, e astrônomo francês.

Neste ponto é importante reforçar uma distinção entre as aproximações para escoamentos incompressíveis e fluidos incompressíveis. A condição de incompressibilidade de um escoamento em nada simplifica a equação para  $C_A$ . Note que nem mesmo o vetor  $\nabla\rho$ , do segundo termo de (8.29) pode ser igualado a zero, pois tal condição de incompressibilidade (8.20) é a de que  $\rho$  é constante seguindo uma partícula. Já a condição de incompressibilidade do fluido implica em que  $\rho$  seja uniforme no espaço e no tempo, então, neste caso,  $\nabla\rho = 0$ . Para exemplificar estas aproximações, considere o escoamento atmosférico e o escoamento de um rio. Na atmosfera, muitas vezes pode-se considerar que cada partícula mantém sua massa específica constante. Porém, é perfeitamente sabido que a massa específica da atmosfera diminui com a altitude (devido à diminuição da temperatura e possivelmente da pressão). Neste caso pode-se dizer que o *escoamento* da atmosfera é aproximadamente incompressível. Já no escoamento de um rio, o valor da massa específica da água é praticamente insensível a variações de temperatura em condições normais, assim, pode-se dizer que o *fluido* é aproximadamente incompressível. Neste último caso, a equação (8.29) se reduz a:

$$\frac{DC_A}{Dt} = \frac{\partial C_A}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) C_A = D_{AB} \nabla^2 C_A. \quad (8.31)$$

## 8.6 CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Nesta seção a equação vetorial diferencial da conservação da quantidade de movimento será deduzida. Para facilitar a compreensão, será feita a dedução da equação para a componente  $x$  da quantidade de movimento.

Partindo do produto interno entre o vetor unitário na direção  $x$   $\mathbf{e}_x$ , e a equação integral da conservação da quantidade de movimento (8.6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x) \rho dV + \int_{S_c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \\ \int_{V_c} \rho (\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_x) dV + \int_{S_c} [(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_x] dS, \end{aligned} \quad (8.32)$$

e tomando as componentes  $x$  da tensão, da aceleração gravitacional, e da velocidade (lembrando que  $\mathbf{T}$  é dado por (4.22)):

$$\begin{aligned} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_x &= (T_{xx}\mathbf{e}_x + T_{xy}\mathbf{e}_y + T_{xz}\mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{n}, \\ \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_x &= g_x, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x &= v_x, \end{aligned}$$

pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} v_x \rho dV + \int_{S_c} v_x \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \\ \int_{V_c} \rho g_x dV + \int_{S_c} [(T_{xx} \mathbf{e}_x + T_{xy} \mathbf{e}_y + T_{xz} \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{n}] dS. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Utilizando o teorema da divergência (8.33) às duas integrais de superfície com  $\mathbf{f} = (T_{xx} \mathbf{e}_x + T_{xy} \mathbf{e}_y + T_{xz} \mathbf{e}_z)$ , e  $\mathbf{f} = \mathbf{v}_x \rho \mathbf{v}$ , pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} v_x \rho dV + \int_{V_c} \nabla \cdot (v_x \rho \mathbf{v}) dV - \\ \int_{V_c} \rho g_x dV - \int_{V_c} \nabla \cdot (T_{xx} \mathbf{e}_x + T_{xy} \mathbf{e}_y + T_{xz} \mathbf{e}_z) dV = 0. \end{aligned} \quad (8.34)$$

distribuindo a diferenciação parcial para dentro da integral, pode-se combinar todas as integrais de (8.34) em apenas uma. Sendo esta igual a zero para qualquer volume de controle, conclui-se que o integrando deve ser nulo em todos os pontos para qualquer instante. Assim:

$$\frac{\partial}{\partial t} (v_x \rho) + \nabla \cdot (v_x \rho \mathbf{v}) = \rho g_x + \nabla \cdot [(T_{xx} \mathbf{e}_x + T_{xy} \mathbf{e}_y + T_{xz} \mathbf{e}_z)]. \quad (8.35)$$

Utilizando a equação da conservação da massa (8.18), tem-se (este passo é deixado como exercício):

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_x = \rho g_x + \nabla \cdot [(T_{xx} \mathbf{e}_x + T_{xy} \mathbf{e}_y + T_{xz} \mathbf{e}_z)]. \quad (8.36)$$

Para as componentes  $y$  e  $z$ , basta substituir  $x$  (no caso das componentes de  $\mathbf{T}$ , o primeiro índice) em (8.36). Pode-se escrever de forma compacta uma equação vetorial (na verdade as equações para as três componentes de  $\mathbf{v}$ ) como:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + (\nabla \cdot \mathbf{T}). \quad (8.37)$$

A equação (8.37), conhecida como equação de Cauchy<sup>3</sup>, rege a dinâmica de todo e qualquer tipo de escoamento de todo e qualquer tipo de fluido.

### 8.6.1 EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES

Uma das dificuldades de se resolver (8.37) está no fato de que  $T$  é uma incógnita, ou melhor, como um tensor simétrico,  $T$  são seis incógnitas. Uma

---

<sup>3</sup>Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) - Um dos expoentes da análise rigorosa em matemática, Cauchy desenvolveu toda a teoria de variáveis complexas.

maneira de se reduzir esse número de incógnitas é usando uma equação constitutiva. No caso de um fluido newtoniano, esta equação é dada por (6.8), que aplicada em (8.37), fornece:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \left[ 2\mu \mathbf{D} - \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} \right], \quad (8.38)$$

onde usou-se a identidade  $\nabla \cdot (p\mathbf{I}) = \nabla p$ . A equação vetorial (8.38) é conhecida como *equação de Navier-Stokes*, e é um dos resultados mais importantes de toda a mecânica dos fluidos. Admitindo que a viscosidade  $\mu$  é uniforme no fluido (ou seja, que as variações de temperatura são pequenas), (8.38) se torna:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \left[ \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right], \quad (8.39)$$

onde foi usado:

$$\nabla \cdot \left[ 2\mathbf{D} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} \right] = \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (8.40)$$

(a verificação da igualdade vetorial acima é deixada como exercício.) Em casos em que o escoamento é incompressível,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  e:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (8.41)$$

É comum se definir uma quantidade chamada *pressão modificada*  $p_m$  como

$$p_m = p + \rho gh, \quad (8.42)$$

onde  $h$  é uma distância em relação a um ponto de referência na direção oposta a  $\mathbf{g}$ , ou seja,  $\mathbf{g} = -g\nabla h$ . Com isso escreve-se (8.41) como:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla (p + \rho gh) + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (8.43)$$

As componentes cartesianas em  $x$ ,  $y$ , e  $z$  para o caso da equação vetorial (8.41) são:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \nabla^2 v_x. \quad (8.44)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_y = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \nabla^2 v_y. \quad (8.45)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_z = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \nabla^2 v_z. \quad (8.46)$$

## 8.7 CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

A equação integral do balanço de energia pode ser reescrita combinando-se as equações (7.8), (7.9), (7.13), e (7.126), e notando que  $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} e \rho dV + \int_{S_c} e \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = - \int_{S_c} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S_c} [(\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] dS. \quad (8.47)$$

Aplicando três vezes o teorema da divergência (8.15) com  $\mathbf{f} = e \rho \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{f} = \mathbf{q}$ , e  $\mathbf{f} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}$  às integrais de superfície de (8.47), notando que  $\frac{\partial}{\partial t} \int e \rho dV = \int \frac{\partial}{\partial t} (e \rho) dV$ , combinando as integrais de volume, e usando o fato que o integrando deve ser nulo, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} (e \rho) + \nabla \cdot (e \rho \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q}. \quad (8.48)$$

Usando a equação da conservação da massa (8.18) e a lei de Fourier (8.2):

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) e = \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho c_p \alpha \nabla T). \quad (8.49)$$

A equação (8.49) é a equação diferencial geral de conservação da energia total.

### 8.7.1 ENERGIA MECÂNICA E ENERGIA TÉRMICA

Substituindo a energia específica  $e$  em (8.49) pela soma das energias interna, cinética, e potencial gravitacional (a energia potencial específica é dada por  $(-\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})$ , onde  $\mathbf{r}$  é o vetor posição, e o sinal negativo indica que a energia potencial aumenta no sentido oposto ao sentido de  $\mathbf{g}$ ):

$$e = u + \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}), \quad (8.50)$$

notando que os termos da derivada total da energia potencial específica dão  $\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) = 0$  e  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{g} \cdot \mathbf{v})$ , e passando este termo ao lado direito (este termo pode ser interpretado como a taxa de trabalho realizada pela força de corpo gravitacional), tem-se:

$$\rho \frac{Du}{Dt} + \rho \frac{D}{Dt} \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \right] = \rho (\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho c_p \alpha \nabla T). \quad (8.51)$$

Voltando à equação de conservação da quantidade de movimento (8.37) e tomando o produto interno desta com o vetor velocidade, tem-se:

$$\rho \left( \mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) = \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}), \quad (8.52)$$

que pode ser reescrita como:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \right] = \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{T} : \mathbf{D}), \quad (8.53)$$

onde foi usada a identidade:  $\mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \right]$ , e o termo  $\mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T})$  foi escrito como:

$$\mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}) = \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{T} : \mathbf{D}), \quad (8.54)$$

onde  $\mathbf{D}$  é o tensor taxa de deformação, dado por (5.18). O produto  $(\mathbf{T} : \mathbf{D})$  entre tensores é chamado de uma contração dupla e é definido como a soma dos produtos entre cada respectiva componente de  $\mathbf{T}$  e de  $\mathbf{D}$ . O resultado deste produto é, obviamente, um escalar. Substituindo  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{D}$  por (6.8) e (5.18) respectivamente, pode-se escrever  $(\mathbf{T} : \mathbf{D})$  como

$$(\mathbf{T} : \mathbf{D}) = -p (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \phi_\mu, \quad (8.55)$$

onde  $\phi_\mu$  é a parte do produto  $(\mathbf{T} : \mathbf{D})$  proporcional a  $\mu$ . Assim a equação (8.53) pode ser reescrita como:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \right] = \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) + p (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \phi_\mu, \quad (8.56)$$

A equação (8.56), obtida a partir da conservação da quantidade de movimento, é a equação da conservação da energia mecânica em um fluido. O lado esquerdo é a variação da energia cinética das partículas. Os termos do lado direito, responsáveis por tal variação de energia cinética são, na ordem mostrada: a taxa de trabalho devido à força de corpo gravitacional (ou variação da energia potencial gravitacional); a taxa de trabalho devido às tensões de superfície; a taxa de trabalho que deforma o fluido por expansão volumétrica; e a taxa de trabalho que deforma o fluido por tensões viscosas. O penúltimo termo,  $p (\nabla \cdot \mathbf{v})$ , é a parte reversível da troca de energia mecânica em energia interna (e vice versa), por expansão volumétrica. Esse termo pode ter sinal positivo ou negativo. O último termo,  $-\phi_\mu$  é sempre negativo (processo irreversível), e representa a taxa de dissipação de energia mecânica em energia interna.

Subtraindo a equação (8.56) de (8.51), tem-se:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -p (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \phi_\mu + \nabla \cdot (\rho c_p \alpha \nabla T). \quad (8.57)$$

A equação (8.57) é a equação da conservação de energia térmica. Repare que os termos de trabalho de deformação têm sinais opostos nas equações

(8.57) e (8.56), já que no primeiro caso eles subtraem energia mecânica do escoamento, e no segundo eles aumentam sua energia interna.

De acordo com o capítulo 2, para um gás ideal tem-se que a energia interna dada por  $u = c_v T$ , a equação de estado é  $p = \rho R T$ , e  $c_p - c_v = R$ . A equação da conservação da massa (8.19) dá:

$$-p(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \approx \frac{p}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{DT}{Dt} = -\frac{p}{T} \frac{DT}{Dt} = -\rho(c_p - c_v) \frac{DT}{Dt}. \quad (8.58)$$

Usando esses resultados em (8.57) tem-se:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \phi_\mu + \nabla \cdot (\rho c_p \alpha \nabla T). \quad (8.59)$$

Admitindo que o aumento de temperatura devido ao trabalho das forças viscosas  $\phi_\mu$  é desprezível, e usando a lei de Fourier (8.2) supondo a difusividade térmica  $\alpha$  é uniforme, tem-se:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \alpha \nabla^2 T, \quad (8.60)$$

que é a forma mais simples da equação de difusão/advecção de calor. A equação (8.60) pode ser usada também para líquidos, desde que: o escoamento seja incompressível; e, obviamente  $c_p$  e  $\alpha$  sejam uniformes.

A suposição de que  $\phi_\mu$  é um termo desprezível na equação da energia térmica é uma excelente aproximação para escoamentos em condições normais. Entretanto, na equação da energia mecânica (8.56), este termo geralmente não pode ser desprezado pois ele representa o único mecanismo dissipação de energia capaz de manter a energia do fluido finita, em casos em que há forçantes externos (como ocorre no caso do experimento de Newton - seção 6.1).

## 8.8 ASPECTOS DAS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

As equações diferenciais de conservação da massa de um soluto, quantidade de movimento, e energia térmica são formalmente bastante similares. De fato, tome como exemplo as equações (8.28), (8.41), e (8.60). Elas podem ser escritas como:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \eta - K \nabla^2 \eta = f(x, y, z, t), \quad (8.61)$$

onde  $\eta$  é a propriedade intensiva que pode ser substituída pela concentração, pelas componentes do vetor velocidade, ou pela temperatura (ou energia

interna no caso mais geral).  $K$  é a propriedade molecular da matéria relacionada com a capacidade de difusão de massa ( $D_{AB}$ ), quantidade de movimento ( $\mu$ ), e calor ( $\alpha$ ).  $f(x, y, z, t)$  é uma função forçante.

Fisicamente, o termo  $\frac{D\eta}{Dt}$  é a taxa de variação da propriedade  $\eta$  da partícula de fluido que ocupa a posição  $(x, y, z)$  no instante  $t$ . Este termo é dividido na variação local (ou seja fixa no espaço) de  $\eta$ ,  $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ , e uma variação devido ao fluxo advectivo de  $\eta$ ,  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\eta$ . O termo  $K\nabla^2\eta$  é o termo de difusão de  $\eta$  no espaço ao longo do tempo. Finalmente o termo  $f(x, y, z, t)$  é um forçante que, no caso das equações em questão, é não nulo apenas na equação da quantidade de movimento, na qual representa a soma dos forçantes do escoamento (gradiente de pressão e força de corpo gravitacional).

Note que no caso geral as equações possuem derivadas primeiras no tempo e derivadas segundas no espaço. Matematicamente, isso implica em ser necessária uma condição inicial (a solução para  $\eta$  deve ser conhecida em algum instante), além de condições de contorno em toda a fronteira em torno do domínio do problema para todo  $t$ .

## 8.9 CONDIÇÕES DE CONTORNO

As equações diferenciais apresentadas nas seções anteriores descrevem as propriedades do fluido dentro de um domínio que, obviamente, deve ser circundado por um contorno. Neste contorno deve-se especificar o comportamento da solução das equações para todo  $t$ . Nesta seção são apresentadas algumas das condições de contorno frequentemente encontradas.

### 8.9.1 SUPERFÍCIE SÓLIDA

Em um contorno formado por uma superfície sólida que se move com velocidade  $\mathbf{v}_c$  (note que em muitos casos o contorno está em repouso e  $\mathbf{v}_c$  é nulo), o fato da superfície possuir uma rugosidade aleatória, e das moléculas em choques com a superfície se refletirem com ângulos também aleatórios (reflexão difusa), faz com que a condição de contorno seja a de que a velocidade do fluido (que é uma média das velocidades moleculares) no contorno é igual à velocidade do contorno:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c. \quad (8.62)$$

Em casos aproximados em que as tensões viscosas não são importantes (escoamentos invíscidos), é comum adotar-se a condição de impermeabilidade, ou seja, o fluido não penetra o contorno mas pode deslizar sobre ele. A nível molecular, isso é equivalente a se ter uma superfície perfeitamente lisa, onde as moléculas se refletem perfeitamente (reflexão especular). Neste

caso, a condição é a de que a componente da velocidade do fluido normal ao contorno naquele ponto é igual à componente da velocidade do contorno naquela direção:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{n}, \quad (8.63)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal unitário ao contorno. Nenhuma condição é imposta à componente tangencial da velocidade.

Em casos em que o contorno é uma parede porosa, é comum se utilizar a condição de penetrabilidade, em que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{n} \neq 0$ , e dependente da porosidade do material da parede.

Em alguns casos em que o fluido é um gás em que distância média entre as moléculas é relativamente grande e a superfície é rugosa, (8.62) ou apenas (8.63) podem não funcionar bem. Nestes casos a condição para a velocidade normal à superfície é (8.63), mas a condição para a componente tangencial  $v_{\text{tan}}$  pode ser aproximada por:

$$\frac{v_{\text{tan}} - v_{ct}}{V} = \frac{3}{2} M_a c_f, \quad (8.64)$$

onde  $V$  é a velocidade tangencial relativa do fluido fora da região influência do contorno,  $v_{ct}$  é a componente da velocidade do contorno tangencial ao próprio contorno,  $M_a$  é o *número de Mach* do escoamento (ver próximo capítulo), e  $c_f$  é um coeficiente de atrito empírico entre o fluido e o contorno. Um efeito análogo aparece também nas condições de contorno para a temperatura e para a concentração de um soluto. Este tipo de condição de contorno não será utilizada neste texto e estes casos não serão discutidos aqui.

Para a temperatura, há três tipos de condição de contorno em paredes sólidas:

- prescrição da temperatura:  $T = f$ ;
- prescrição do fluxo de calor:  $(\nabla T \cdot \mathbf{n}) = f$ ;
- condição combinada:  $T + \beta (\nabla T \cdot \mathbf{n}) = f$ , onde  $\beta$  é um coeficiente conhecido.

Note que nos três casos  $f$  é uma função que pode variar no tempo e na superfície do contorno. Um caso particularmente interessante é aquele em que o contorno é insulado, e  $\nabla T \cdot \mathbf{n} = 0$ .

Similarmente à temperatura, para a concentração de um soluto as condições em paredes sólidas são:

- prescrição da concentração:  $C_A = f$ ;
- prescrição do fluxo de massa:  $(\nabla C_A \cdot \mathbf{n}) = f$ ;

- condição combinada:  $C_A + \beta (\nabla C_A \cdot \mathbf{n}) = f$ , onde  $\beta$  é um coeficiente conhecido.

Novamente,  $f$  é uma função que pode variar no tempo e na superfície do contorno.

### 8.9.2 SUPERFÍCIE LIVRE DE UM LÍQUIDO

Quando um líquido está em contato com um gás onde tensões de cisalhamento são desprezíveis, diz-se que esta interface é uma superfície livre. Numa superfície livre há dois tipos de tensão: a já familiar pressão e a tensão superficial, que é apresentada brevemente a seguir:

#### *Tensão superficial*

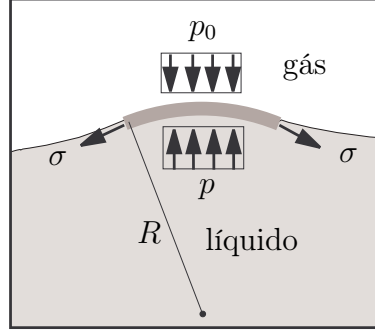
A existência de uma interface visivelmente bem definida entre um líquido e um gás tem origem no fato de que normalmente líquidos têm massa específica ordens de grandeza maior que gases. Por causa da existência dessa interface, as moléculas na superfície estão em ambiente diferente daquelas dentro do líquido. As forças moleculares que atraem as moléculas umas às outras dependem da distância média entre elas. Uma molécula dentro do líquido é atraída igualmente em todas as direções pelas suas vizinhas. Uma molécula na superfície, entretanto, tende a ser *puxada* para o interior do líquido no sentido normal à superfície, pois a força de atração (coesão) molecular é muito menor no lado do gás. Este efeito faz com que o número de moléculas na superfície livre seja o mínimo necessário para mantê-la. Macroscopicamente, o efeito é chamado de capilaridade, no qual a superfície livre está sempre tentando se contrair através de uma tensão denominada *tensão superficial*.

Em termos de dinâmica do escoamento, dois tipos de condição de contorno se fazem necessárias numa superfície livre: (i) condição cinemática, em que as partículas da superfície livre permanecem na superfície livre (ou seja, a superfície livre é uma superfície material); (ii) condição dinâmica, na qual a pressão do gás  $p_0$  deve equilibrar a pressão do líquido na interface, a menos da tensão superficial. Matematicamente, se a superfície livre é representada pela equação  $F(x, y, z, t) = 0$  a condição cinemática é  $DF/Dt = 0$ , que pode ser escrita como:

$$v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \zeta}{\partial y}; \quad (8.65)$$

onde  $z = \zeta(x, y, t)$  é a posição da superfície livre. A condição de contorno dinâmica é dada por:

$$p = p_0 + \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (8.66)$$



**Figura 8.1:** Ação da tensão superficial num elemento de uma superfície livre.

onde  $\sigma$  é o coeficiente de tensão superficial que depende das condições da interface (fluidos envolvidos, temperatura, etc.), e  $R_1$  e  $R_2$  são os raios de curvatura da superfície livre em direções ortogonais do plano tangente à superfície no ponto em questão. Note que a tensão superficial só é importante se a superfície livre tem raios de curvaturas pequenos. A figura 8.1 ilustra o equilíbrio para uma superfície livre (desprezando uma dimensão).

### 8.9.3 INTERFACE ENTRE DOIS FLUIDOS

No caso mais geral de haver uma interface entre dois fluidos (sub-índices 1 e 2) em que há fluxos de quantidade de movimento (tensões de cisalhamento), massa de um soluto, e calor, as condições de contorno na interface são:

- continuidade da velocidade:  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ ;
- continuidade das tensões na superfície (pressão mais tensões viscosas) cuja normal local é  $\mathbf{n}$ :  $\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{n}$  (no caso em que há tensão superficial, o balanço da tensão normal deve ser corrigido de acordo com  $(\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} + \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ );
- continuidade da temperatura:  $T_1 = T_2$ ;
- continuidade do fluxo de calor através da interface cuja normal local é  $\mathbf{n}$ :  $\rho_1 c_{p1} \alpha_1 (\nabla T_1 \cdot \mathbf{n}) = \rho_2 c_{p2} \alpha_2 (\nabla T_2 \cdot \mathbf{n})$ ;
- continuidade da concentração de um soluto A nos fluidos 1 e 2:  $C_{A1} = C_{A2}$ ;

- continuidade do fluxo de massa:  $\rho_1 D_{AB1} (\nabla C_{A1} \cdot \mathbf{n}) = \rho_2 D_{AB2} (\nabla C_{A2} \cdot \mathbf{n})$ .

Na última equação acima,  $D_{AB1}$  é a difusividade de um soluto A no solvente B, e o sub-índice 1 se refere à mistura entre A e B (fluido 1). O mesmo é válido para o fluido 2. Obviamente, o soluto A deve ser o mesmo para os dois fluidos.

#### 8.9.4 CONDIÇÕES DE ENTRADA E SAÍDA

Quando o contorno do domínio de um problema intercepta o escoamento (tipicamente em entradas e/ou saídas do fluido - por exemplo de uma tubulação ou em duas seções transversais de um rio), a rigor, se nenhuma simplificação é feita, devem ser conhecidas as seguintes variáveis em todos os pontos desses trechos do contorno: vetor velocidade  $\mathbf{v}$ , pressão  $p$ , temperatura  $T$ , concentração do soluto  $C_A$ . Estas condições se estendem também para casos em que se conhece a solução no *far-field*. Por exemplo, digamos que o domínio se estende até  $y \rightarrow \infty$ , então deve-se especificar  $\mathbf{v}_\infty$ ,  $p_\infty$ ,  $T_\infty$ ,  $C_{A\infty}$ .

### 8.10 EQUAÇÕES EM COORDENADAS CURVILÍNEAS

As equações da conservação da massa, quantidade de movimento, e energia apresentadas em notação vetorial - por exemplo (8.19), (8.31), (8.41), e (8.59) - são válidas para qualquer sistema de coordenadas, embora de forma geral foi utilizado o sistema de coordenadas cartesiano nas suas deduções. As equações em sistema cartesiano são obtidas simplesmente substituindo:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z, \quad (8.67)$$

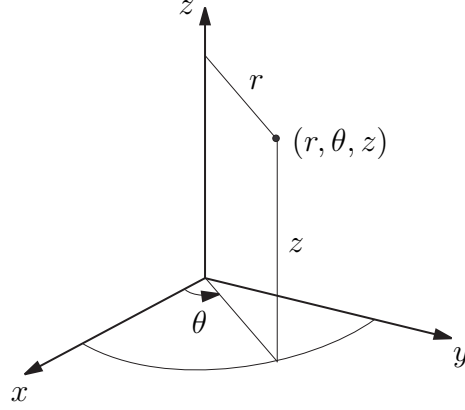
$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (8.68)$$

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (8.69)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (8.70)$$

onde  $(x, y, z)$  são as coordenadas cujas orientações são dadas pelos vetores unitários ortogonais entre si  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ , e  $\mathbf{e}_z$ .

Nesta seção as equações para um escoamento incompressível onde as propriedades moleculares do fluido são uniformes e constantes são apresentadas (sem dedução) em sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas.



**Figura 8.2:** Sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  e sua relação com o sistema cartesiano  $(x, y, z)$ .

### 8.10.1 COORDENADAS CILÍNDRICAS

As coordenadas cilíndricas são representadas por  $(r, \theta, z)$  cujas orientações são dadas pelos vetores unitários ortogonais  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ , e  $\mathbf{e}_z$ . A coordenada  $z$  é idêntica à do sistema cartesiano. As relações entre as coordenadas cilíndricas e as coordenadas cartesianas são:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}, \quad z = z, \quad (8.71)$$

ou

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z. \quad (8.72)$$

O vetor velocidade é representado por  $\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z$ . A figura 8.2 ilustra o sistema de coordenadas cilíndricas e sua relação com o sistema cartesiano. Os seguintes operadores são definidos:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (8.73)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (8.74)$$

#### *Conservação da massa*

A equação da conservação da massa de um fluido incompressível em coordenadas cilíndricas é dada por:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0. \quad (8.75)$$

**Conservação da massa de um soluto**

A equação da conservação da massa de um soluto de concentração  $C_A$  em coordenadas cilíndricas é dada por (8.31) com os operadores (8.73) e (8.74).

**Equações de Navier-Stokes**

As equações de Navier-Stokes para um fluido incompressível e com viscosidade constante, em coordenadas cilíndricas para as direções  $r$ ,  $\theta$ , e  $z$  são dadas por:

$$\rho \left( \frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right), \quad (8.76)$$

$$\rho \left( \frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left( \nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right), \quad (8.77)$$

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z. \quad (8.78)$$

Repare que o vetor aceleração (lados esquerdos das equações acima) é:

$$\mathbf{a} = \left( \frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{Dv_z}{Dt} \mathbf{e}_z, \quad (8.79)$$

onde  $-v_\theta^2/r$  e  $v_r v_\theta/r$  são as parcelas da aceleração devido às forças fictícias centrípeta e de Coriolis, respectivamente.

**Conservação da energia**

A equação de conservação da energia térmica para a temperatura  $T$  em coordenadas cilíndricas é dada por (8.59) com os operadores (8.73) e (8.74).

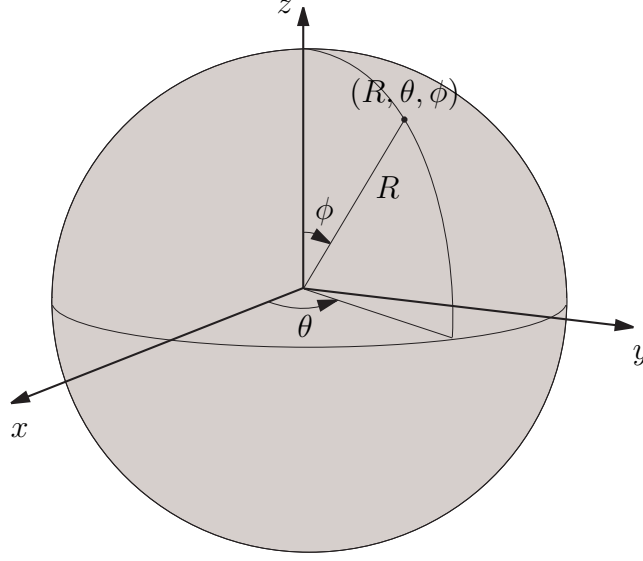
**8.10.2 COORDENADAS ESFÉRICAS**

As coordenadas esféricas são representadas por  $(R, \theta, \phi)$  cujas orientações são dadas pelos vetores unitários ortogonais  $\mathbf{e}_R$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ , e  $\mathbf{e}_\phi$ . A coordenada  $\theta$  é idêntica à do sistema de coordenadas cilíndricas. O raio  $R$  aqui não tem a mesma definição que o raio  $r$  das coordenadas cilíndricas e a notação  $R$  (maiúsculo) foi adotada exatamente para evitar confusões. As relações entre as coordenadas esféricas e as coordenadas cartesianas são:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}, \quad \phi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (8.80)$$

ou

$$x = R \sin \phi \cos \theta, \quad y = R \sin \phi \sin \theta, \quad z = R \cos \theta. \quad (8.81)$$



**Figura 8.3:** Sistema de coordenadas esféricas  $(R, \theta, \phi)$  e sua relação com o sistema cartesiano  $(x, y, z)$ .

O vetor velocidade é representado por  $\mathbf{v} = v_R \mathbf{e}_R + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_\phi \mathbf{e}_\phi$ . A figura 8.3 ilustra o sistema de coordenadas esféricas e sua relação com o sistema cartesiano. Os seguintes operadores são definidos:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_R \frac{\partial}{\partial R} + v_\theta \frac{1}{R \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_\phi \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (8.82)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 = & \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \\ & \frac{1}{R^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right). \end{aligned} \quad (8.83)$$

### *Conservação da massa*

A equação da conservação da massa de um fluido incompressível em coordenadas esféricas é dada por:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial (R^2 v_R)}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \phi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \phi} \frac{\partial (\sin \phi v_\phi)}{\partial \phi} = 0. \quad (8.84)$$

**Conservação da massa de um soluto**

A equação da conservação da massa de um soluto de concentração  $C_A$  em coordenadas esféricas é dada por (8.31) com os operadores (8.82) e (8.83).

**Equações de Navier-Stokes**

As equações de Navier-Stokes para um fluido incompressível e com viscosidade constante, em coordenadas esféricas para as direções  $R$ ,  $\theta$ , e  $\phi$  são dadas por:

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{Dv_R}{Dt} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) = \rho g_R - \frac{\partial p}{\partial R} \\ + \quad & \mu \left( \nabla^2 v_R - \frac{2v_R}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{2v_\phi \cot \phi}{R^2} - \frac{2}{R^2 \sin \phi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (8.85)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_R v_\theta}{R} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \phi}{R} \right) = \rho g_\theta - \frac{1}{R \sin \phi} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ + \quad & \mu \left( \nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{R^2 \sin^2 \phi} + \frac{2}{R^2 \sin \phi} \frac{\partial v_R}{\partial \theta} + \frac{2 \cos \phi}{R^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (8.86)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{Dv_\phi}{Dt} + \frac{v_R v_\phi}{R} - \frac{v_\theta^2 \cot \phi}{R} \right) = \rho g_\phi - \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \phi} \\ + \quad & \mu \left( \nabla^2 v_\phi + \frac{2}{R^2} \frac{\partial v_R}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{R^2 \sin^2 \phi} - \frac{2 \cos \phi}{R^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (8.87)$$

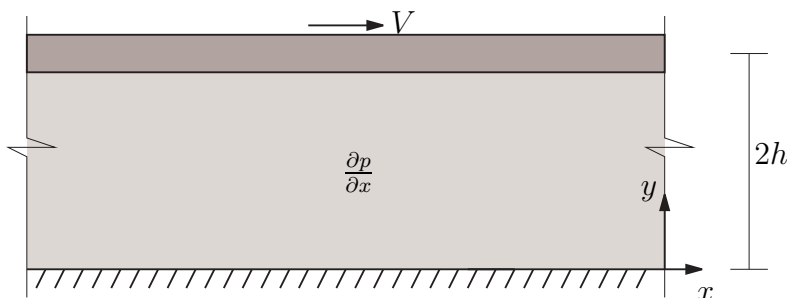
Mais uma vez as forças fictícias se manifestam no vetor aceleração:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & \left( \frac{Dv_R}{Dt} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{R} \right) \mathbf{e}_R + \left( \frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_R v_\theta}{R} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \phi}{R} \right) \mathbf{e}_\theta + \\ & \left( \frac{Dv_\phi}{Dt} + \frac{v_R v_\phi}{R} - \frac{v_\theta^2 \cot \phi}{R} \right) \mathbf{e}_\phi, \end{aligned} \quad (8.88)$$

onde  $-(v_\theta^2 + v_\phi^2)/R$  e  $-v_\theta^2 \cot \phi/R$  são acelerações centrípetas e  $v_R v_\theta/R$ ,  $v_\theta v_\phi \cot \phi/R$ , e  $v_R v_\phi/R$  são acelerações de Coriolis.

**Conservação da energia**

A equação de conservação da energia térmica para a temperatura  $T$  em coordenadas esféricas é dada por (8.59) com os operadores (8.82) e (8.83).



**Figura 8.4:** Fluido entre placas paralelas sujeito a gradiente de pressão.

## 8.11 SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

Com as equações da conservação da massa e da massa de um soluto, as três equações de Navier-Stokes, a equação da conservação da energia térmica, e uma equação de estado, tem-se sete equações para as sete incógnitas: massa específica, concentração do soluto, três componentes de velocidade, pressão, e temperatura. Caso se queira considerar os coeficientes de viscosidade, difusividade mássica, e condutividade térmica como variáveis, deve-se estabelecer equações de estado para estas variáveis também. Este sistema de equações diferenciais parciais não lineares é extraordinariamente difícil de se resolver para casos gerais. Devido aos termos advectivos (não-lineares), soluções analíticas só são possíveis para casos particulares extremamente simplificados, e mesmo soluções numéricas são limitadas devido à complexidade das equações.

Nesta seção é apresentada uma série de exemplos de aplicação das equações diferenciais de conservação da massa, quantidade de movimento, e energia, para situações particulares nas quais algumas simplificações são feitas de modo a viabilizar soluções analíticas.

### 8.11.1 ESCOAMENTO PERMANENTE ENTRE PLACAS PARALELAS

Considere o escoamento permanente ( $\partial/\partial t = 0$ ) de um fluido viscoso entre duas placas paralelas infinitas em movimento relativo (a placa superior em movimento com velocidade  $V$  e a placa inferior parada), e sujeito a um gradiente de pressão uniforme  $\partial p/\partial x$ , como mostra a figura 8.4. Primeiramente o escoamento pode ser suposto incompressível. A bi-dimensionalidade do escoamento impõe  $\partial/\partial z = 0$ . O escoamento é obviamente uniforme na direção  $x$ , então  $\partial v_x/\partial x = 0$ , de modo que a equação da conservação da massa

$\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y = 0$  fornece  $\partial v_y/\partial y = 0$ . Como  $v_y = 0$  em  $y = 0$ , então  $v_y = 0$  em todo o domínio. As equações do movimento para  $x$  e  $y$  (8.44) e (8.45) se reduzem a:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2}; \quad (8.89)$$

$$0 = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (8.90)$$

A equação do movimento- $y$  mostra que a pressão é hidrostática. Integrando a equação do movimento- $x$  duas vezes em relação a  $y$ , tem-se:

$$-\frac{y^2}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu v_x + C_1 y + C_2 = 0. \quad (8.91)$$

$C_1$  e  $C_2$  são constantes de integração e podem ser determinadas pelas condições de contorno como se segue. Na placa inferior  $y = 0$ ,  $v_x = 0$ , então  $C_2 = 0$ . Na placa superior,  $y = 2h$ ,  $v_x = V$ , então  $C_1 = h (\partial p/\partial x) - \mu V/(2h)$ . O perfil de velocidades é então dado por:

$$v_x = \frac{Vy}{2h} - \frac{y}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left( h - \frac{y}{2} \right). \quad (8.92)$$

A tensão de cisalhamento no fluido é:

$$T_{xy} = \mu \frac{dv_x}{dy} = \frac{\mu V}{2h} + (h - y) \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (8.93)$$

### *Escoamento plano de Couette*

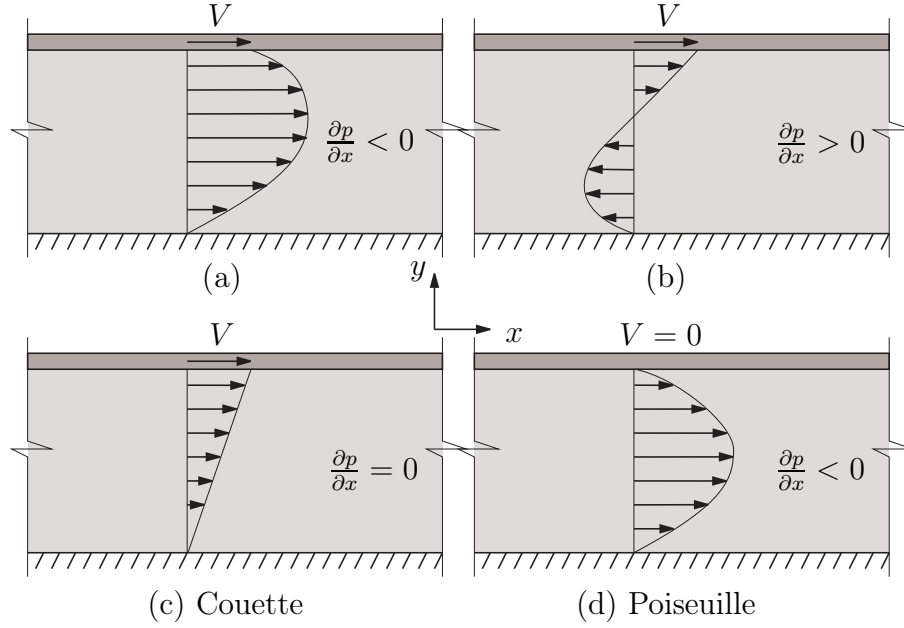
Este é um caso particular do exemplo mostrado em que o gradiente de pressão é nulo, e o escoamento é movido apenas pelo trabalho das forças viscosas proveniente do movimento da placa superior. Neste caso o perfil de velocidade é:

$$v_x = \frac{Vy}{2h}, \quad (8.94)$$

e a tensão de cisalhamento é:

$$T_{xy} = \frac{\mu V}{2h}. \quad (8.95)$$

Note que neste caso  $T_{xy}$  é constante.



**Figura 8.5:** Vários casos de escoamento entre placas paralelas.

### *Escoamento plano de Poiseuille*

Se a placa superior se encontra em repouso, tem-se o chamado escoamento de Poiseuille, no qual a fonte de energia é o trabalho residual devido ao gradiente de pressão. Para este caso o perfil de velocidade é parabólico:

$$v_x = -\frac{y}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left( h - \frac{y}{2} \right), \quad (8.96)$$

e a tensão de cisalhamento é uma função linear:

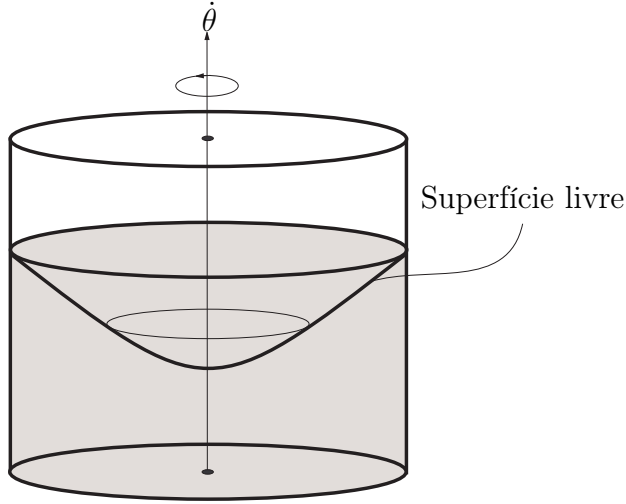
$$T_{xy} = (h - y) \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (8.97)$$

Repare que a tensão no centro do tubo ( $y = h$ ) é nula neste caso.

A figura 8.5 ilustra várias combinações das soluções mostradas neste exemplo, incluindo aquelas em que  $\partial p/\partial x$  e  $V$  têm sinais opostos (a), o mesmo sinal (b), e os casos particulares de Couette (c) e Poiseuille (d).

### **8.11.2 FLUIDO EM ROTAÇÃO UNIFORME**

Imagine um cilindro contendo um fluido inicialmente em repouso colocado em rotação com velocidade angular  $\dot{\theta}$ . Inicialmente a superfície livre do fluido é



**Figura 8.6:** Fluido em rotação uniforme com superfície livre.

horizontal. Devido ao atrito com as paredes do recipiente o fluido começa a se mover até que um regime permanente é atingido quando as forças centrífuga e o gradiente de pressão devido à inclinação da superfície livre se equilibram. Neste ponto o fluido para de se deformar e entra em rotação uniforme com o recipiente como se fosse um corpo sólido. A figura 8.6 ilustra este estado final. A pergunta é: que função descreve a superfície livre neste caso?

Inicialmente pode-se observar que, como o fluido não se deforma, não há tensões viscosas, e muito menos o divergente das mesmas, ou seja:  $\mu \nabla^2 \mathbf{v} = 0$ . Além disso, a velocidade do fluido na direção radial é nula, e a componente na direção angular  $\theta$  é apenas função do raio  $r$ , e não do ângulo  $\theta$ . Essa velocidade na direção  $\theta$  será:  $v_\theta = r\dot{\theta}$ . As equações de Navier-Stokes se reduzem ao balanço entre a força centrífuga e do gradiente de pressão em  $r$ , e uma equação hidrostática para a direção vertical  $z$ :

$$-\rho r \dot{\theta}^2 = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (8.98)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g. \quad (8.99)$$

O diferencial da pressão é dado por:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho r \dot{\theta}^2 dr - \rho g dz. \quad (8.100)$$

Integrando a equação acima entre dois pontos 1 e 2 quaisquer no fluido:

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho\dot{\theta}^2 (r_2^2 - r_1^2) - \rho g (z_2 - z_1). \quad (8.101)$$

Supondo que a superfície livre está sob pressão atmosférica constante  $p_0$ , ela deve satisfazer à equação acima com  $p_1 = p_2 = p_0$ :

$$(z_2 - z_1) = \frac{1}{2g}\dot{\theta}^2 (r_2^2 - r_1^2). \quad (8.102)$$

Supondo ainda que  $z_1$  é a posição da superfície livre no centro do cilindro ( $r_1 = 0$ ), e atribuindo  $z_2 = z$  e  $r_2 = r$  tem-se:

$$z = z_1 + \frac{1}{2g}\dot{\theta}^2 r^2, \quad (8.103)$$

que é a equação para um parabolóide de revolução em torno do eixo. Esta é a equação que descreve a posição de superfícies de igual pressão. Resta encontrar a posição da superfície livre  $z_s$ . Admitindo que o raio do cilindro é  $R$  e que a posição da superfície livre em repouso é  $z = 0$  com a profundidade inicial do fluido igual a  $H$ , tem-se que, se o volume total de fluido deve se manter o mesmo quando o fluido está em rotação, então:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \left( H + z_1 + \frac{1}{2g}\dot{\theta}^2 r^2 \right) r dr d\theta = \pi R^2 H. \quad (8.104)$$

Integrando o lado esquerdo e explicitando  $z_1$ :

$$z_1 = -\frac{R^2\dot{\theta}^2}{4g}. \quad (8.105)$$

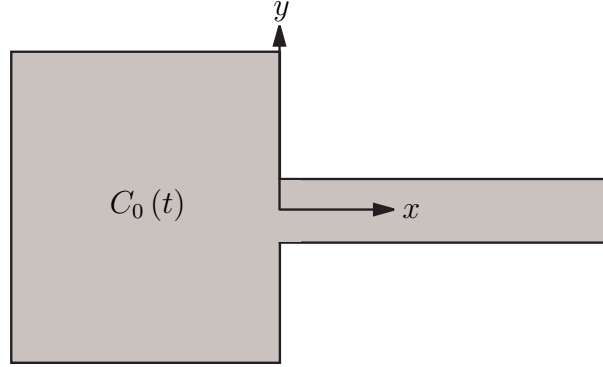
A função que descreve a superfície livre em função de  $r$  é, então:

$$z(r) = \frac{\dot{\theta}^2 R^2}{2g} \left( \frac{r^2}{R^2} - \frac{1}{2} \right). \quad (8.106)$$

Neste exemplo é importante notar que as tensões viscosas são importantes apenas para colocar o fluido em rotação. Ao entrar em regime permanente, tais tensões desaparecem completamente.

### 8.11.3 DIFUSÃO PURA EM MATERIAL SEMI-INFINITO

Considere um canal semi-infinito com água pura em repouso, que subitamente é colocado em contato com um reservatório de água salgada (a difusividade sal-água é  $D_s$ ) com concentração de sal que pode variar com o



**Figura 8.7:** Canal de água doce em contato com água salgada.

tempo  $C_0(t)$ . Admitindo que o gradiente de pressão entre o reservatório e o canal e a componente  $x$  da força da gravidade, assim como a viscosidade, são desprezíveis, qual será a concentração dentro do canal em função de  $x$  e  $t$ ? A figura 8.6 ilustra a situação. Primeiramente note que como não há qualquer forçante no problema, as equações de Navier-Stokes para  $x$  e  $y$  se resumem a:  $Dv_x/Dt = 0$  e  $Dv_y/Dt = 0$ , ou seja, as partículas de água irão permanecer com velocidade constante no tubo. Como a condição inicial é de  $\mathbf{v}$  nulo, então  $\mathbf{v}$  permanecerá nulo para todo  $t$ . A equação de transporte de sal é dada por (8.29) que, com  $D_{AB} = D_s$  e  $\mathbf{v} = 0$ , se reduz a:

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} = D_s \frac{\partial^2 C_s}{\partial x^2}. \quad (8.107)$$

As condições iniciais e de contorno são

$$C_s(x, t = 0) = 0, \quad C_s(x = 0, t) = C_0(t). \quad (8.108)$$

Aplicando a transformada de Laplace<sup>4</sup> no tempo à equação diferencial parcial (8.107), tem-se:

$$\frac{d^2 \bar{C}_s}{dx^2} - \frac{s}{D_s} \bar{C}_s = 0. \quad (8.109)$$

A solução da equação acima é:

$$\bar{C}_s = Ae^{\sqrt{s/D_s}x} + Be^{-\sqrt{s/D_s}x}. \quad (8.110)$$

<sup>4</sup>A transformada de Laplace em  $t$  é dada por  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s) = \int_0^\infty f e^{-st} dt$ , e tem como propriedade:  $\mathcal{L}\{df/dt\} = s\bar{f}(s) - f(0)$

Tomando  $\bar{C}_s(x \rightarrow \infty) = 0$ , então  $A = 0$ . Assim:

$$\bar{C}_s = B e^{-\sqrt{s/D_s} x}. \quad (8.111)$$

Chamando a transformada de Laplace da condição de contorno em  $x = 0$  de  $\bar{C}_0(s)$ , e aplicando-a em (8.111) fornece  $B = \bar{C}_0(s)$ , e (8.111) fica:

$$\bar{C}_s(x, s) = \bar{C}_0(s) e^{-\sqrt{s/D_s} x}. \quad (8.112)$$

A solução desejada é a transformada inversa de (8.112) que dá:

$$C_s(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{D_s\pi}} \int_0^t C_0(\tau) \frac{e^{-x^2/[4D_s(t-\tau)]}}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau. \quad (8.113)$$

A integral acima não possui uma forma analítica em termos de funções elementares e deve ser avaliada numericamente.  $\tau$  é uma variável de integração no tempo, e  $t$  é o instante atual. Repare que a concentração no canal  $C_s$  apenas depende da condição de contorno entre  $\tau = 0$  e  $\tau = t$ , ou seja, da informação passada. Isso não é surpreendente, já que não é de se esperar que o que ocorrerá na condição de contorno no futuro influencie a situação do presente.

Este problema tem uma versão inteiramente análoga para a transferência de calor (bastando substituir concentração por temperatura, e difusividade molecular por térmica) e outra para transferência de quantidade de movimento que é mostrada a seguir.

#### 8.11.4 ESCOAMENTO TRANSIENTE EM FLUIDO SEMI-INFINITO - PRIMEIRO PROBLEMA DE STOKES

Considere uma placa infinita localizada em  $y = 0$  sob um fluido viscoso inicialmente em repouso. A placa é posta em movimento em  $t = 0$  e mantida a velocidade constante  $V$  na direção  $x$ . A equação relevante é a equação do movimento na direção  $x$  que, após simplificações se reduz a:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \quad (8.114)$$

( $\nu$  é a viscosidade cinemática igual a  $\mu/\rho$ ). As condições iniciais e de contorno para o problema são:

$$v_x(y, 0) = 0, \quad v_x(\infty, t) = 0, \quad v_x(0, t) = V. \quad (8.115)$$

Este problema é conhecido como *problema de Rayleigh* e também como *primeiro problema de Stokes*. Para obter a solução poderia-se utilizar, como no

problema anterior, a técnica da transformada de Laplace (note a semelhança do problema). Em vez disso, como ilustração, será procurada a chamada *solução por similaridade*. Considere a seguinte variável:

$$\xi = Byt^n. \quad (8.116)$$

Admitindo que  $v_x = v_x(\xi)$ , pode-se substituir esta transformação em (8.114) cujos termos ficam:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{dv_x}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{n}{t} \xi \frac{dv_x}{d\xi}, \quad (8.117)$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{y^2} \xi^2 \frac{d^2 v_x}{d\xi^2}, \quad (8.118)$$

então (8.114) fica:

$$\frac{d^2 v_x}{d\xi^2} - \frac{n}{\xi} \frac{y^2}{\nu t} \frac{dv_x}{d\xi} = 0. \quad (8.119)$$

A ideia do método é escolher  $n$  e  $B$  de forma que a equação (8.119) se torne função de  $\xi$  apenas (e não de  $y$  ou  $t$ ). Assim, escolhe-se:

$$n = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2\sqrt{\nu}}, \quad \xi = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}. \quad (8.120)$$

As condições de contorno em termos de  $\xi$  são:

$$v_x(\xi = 0) = V, \quad v_x(\xi = \infty) = 0. \quad (8.121)$$

A equação (8.119) é reescrita como:

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{dv_x}{d\xi} \right) + 2\xi \frac{dv_x}{d\xi} = 0. \quad (8.122)$$

Integrando duas vezes tem-se:

$$v_x = C_1 \int_0^\xi e^{-\xi^2} d\xi + C_2, \quad (8.123)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes de integração. Aplicando a condição de contorno  $v_x(\xi = 0) = V$ , tem-se  $C_2 = V$ . Aplicando a condição de contorno  $v_x(\xi = \infty) = 0$ , tem-se<sup>5</sup>  $C_1 = -2V/\sqrt{\pi}$ :

$$v_x = V \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-\xi^2} d\xi \right), \quad (8.124)$$

---

<sup>5</sup>Solução da integral  $I = \int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi$ : (i)  $I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ ; (ii)  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $dx dy = r dr d\theta$ ,  $I^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta$ ; (iii)  $I^2 = \pi/2 \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty = \pi/4$ ; (iv)  $I = \sqrt{\pi}/2$

que pode ser escrita em termos da chamada *função erro*:

$$v_x = V (1 - \operatorname{erf} \xi) = V \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right]. \quad (8.125)$$

Repare que para um dado  $\xi$  tem-se um único  $v_x$ , mas há um número infinito de combinações de  $y$  e  $t$  que dá o mesmo  $\xi$  (aquelas que satisfazem  $\xi = y / [2\sqrt{\nu t}]$ ). Portanto, as soluções para pontos  $\xi = \text{constante}$  são similares, daí a terminologia *solução por similaridade*.

### 8.11.5 ESCOAMENTO OSCILATÓRIO EM FLUIDO SEMI-INFINITO - SEGUNDO PROBLEMA DE STOKES

Considere uma situação similar à do problema anterior, entretanto, com a velocidade da placa infinita oscilando com frequência angular  $\omega$  (ou seja, período  $T = 2\pi/\omega$ ) e amplitude  $V_0$ :  $V(t) = V_0 \cos \omega t$ . Neste caso não será considerado o período transiente em que o fluido é colocado em movimento a partir do repouso, e sim a condição quando  $t \rightarrow \infty$ , ou seja, será admitido que a solução é periódica, assim como o é a condição de contorno. A equação do movimento é:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \quad (8.126)$$

As condições de contorno são:

$$v_x(\infty, t) = 0, \quad v_x(0, t) = V_0 \cos \omega t. \quad (8.127)$$

Se a solução é oscilatória, pode-se escrever, em notação complexa (onde apenas a parte real deve ser considerada)<sup>6</sup>:

$$v_x(y, t) = F(y) e^{i\omega t}, \quad (8.128)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = i\omega F(y) e^{i\omega t}, \quad (8.129)$$

onde  $i = \sqrt{-1}$ . A equação (8.126) fica:

$$i\omega F e^{i\omega t} = \nu \frac{d^2 F}{dy^2} e^{i\omega t}. \quad (8.130)$$

Dividindo por  $e^{i\omega t}$  e solucionando a equação diferencial para  $F(y)$ :

$$\begin{aligned} F(y) &= A e^{(1+i)\delta y/\sqrt{2}} + B e^{-(1+i)\delta y/\sqrt{2}} \\ &= A e^{\delta y/\sqrt{2}} e^{i\delta y/\sqrt{2}} + B e^{-\delta y/\sqrt{2}} e^{-i\delta y/\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (8.131)$$

---

<sup>6</sup>por definição:  $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ ;  $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ , e  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ .

onde  $A$  e  $B$  são constantes de integração, e  $\delta = \sqrt{\omega/\nu}$ . Como  $v_x \rightarrow 0$  quando  $y \rightarrow \infty$ , então  $A = 0$ ; a condição  $v_x(0, t) = V_0 \cos \omega t$ , fornece que  $B = F(y=0) = V_0$ . Retornando a  $v_x$ :

$$\begin{aligned} v_x(y, t) &= F(y) e^{i\omega t} = V_0 e^{-\delta y/\sqrt{2}} e^{-i\delta y/\sqrt{2}} e^{i\omega t} \\ &= V_0 e^{-\delta y/\sqrt{2}} e^{i(\omega t - \delta y/\sqrt{2})}. \end{aligned} \quad (8.132)$$

Tomando apenas a parte real de  $v_x$  em (8.132):

$$v_x(y, t) = V_0 e^{-\sqrt{\omega/(2\nu)}y} \cos \left[ \left( \omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y \right) \right]. \quad (8.133)$$

Repare que a solução decai exponencialmente de  $V_0$  até se anular em  $y = \infty$ , ao mesmo tempo que oscila tanto no espaço ( $y$ ) quanto no tempo, e que, como é de se esperar, a frequência espacial da solução (em  $y$ ) aumenta à medida que a frequência temporal  $\omega$  aumenta, e que viscosidade diminui. A figura 8.8 ilustra a solução com perfis em  $y$  de  $v_x$  em vários instantes num período  $T = 2\pi/\omega$  de oscilação.

### 8.11.6 ESCOAMENTO LAMINAR EM PLANO INCLINADO

Considere um fluido viscoso incompressível escoando sobre uma superfície plana infinita e com inclinação  $\theta$  em relação à superfície da terra. A figura (8.9) ilustra a situação. A ideia é procurar uma solução para a velocidade  $v_x$  em regime permanente, supondo que o único forçante do problema é a força da gravidade, e que, portanto, não há gradiente de pressão na direção  $x$ . Admitindo que  $v_y = v_z = 0$ , então a equação da conservação da massa  $\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y + \partial v_z/\partial z = 0$  fornece que  $\partial v_x/\partial x = 0$ . A equação de Navier-Stokes na direção  $x$  se reduz a:

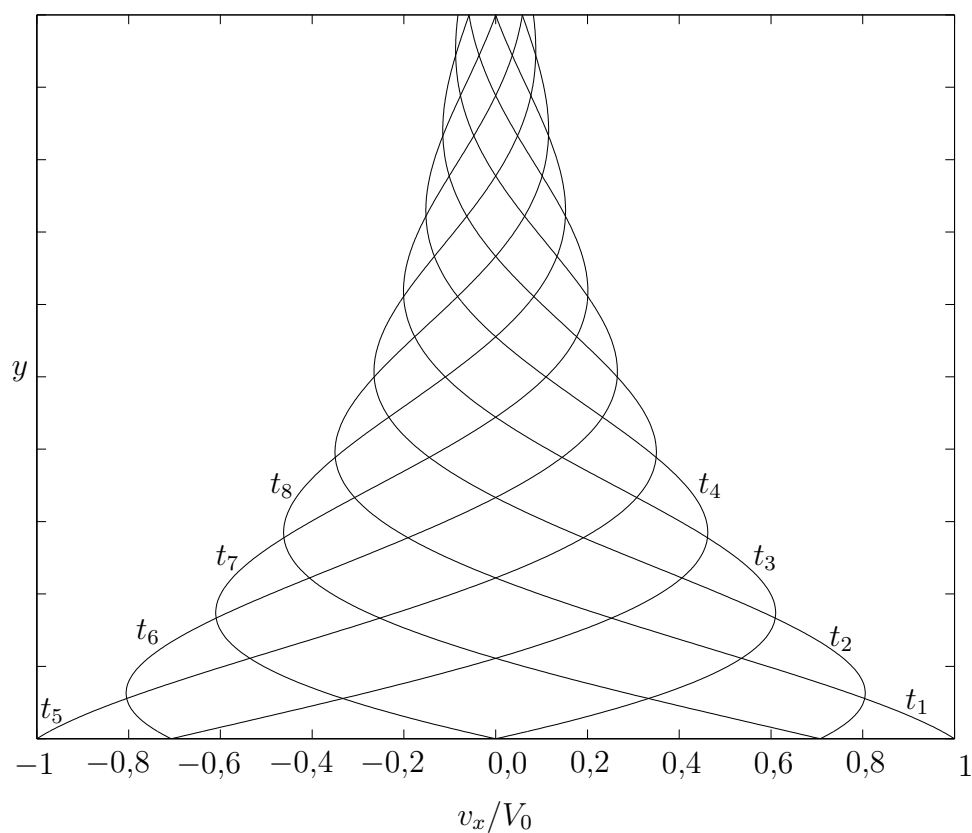
$$0 = \rho g \sin \theta + \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2}. \quad (8.134)$$

A equação em  $y$  é:

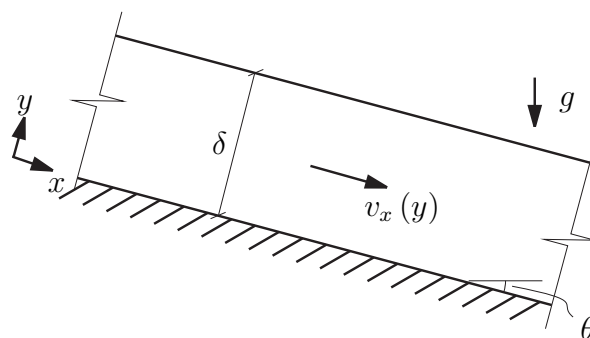
$$0 = -\rho g \cos \theta - \frac{dp}{dy}. \quad (8.135)$$

A condição de contorno no fundo fornece  $v_x(y=0) = 0$ . Na superfície livre, considerando que a pressão atmosférica é desprezível, a condição é a de que a tensão viscosa de cisalhamento é nula:

$$T_{xy}(y=\delta) = \mu \frac{dv_x}{dy}(y=\delta) = 0 \Rightarrow \frac{dv_x}{dy}(y=\delta) = 0. \quad (8.136)$$



**Figura 8.8:** Escoamento sobre fundo oscilatório com período  $T$ . Perfis de velocidade  $v_x(y)$  para vários instantes dentro de um período. Os instantes  $t_n$ , partindo de um instante de referência  $t$ , são dados por  $t_n = t + (n - 1)T/8$ .



**Figura 8.9:** Escoamento em plano inclinado.

A solução de (8.134) é:

$$v_x(y) = -\frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2. \quad (8.137)$$

Substituindo as condições de contorno tem-se:

$$C_1 = \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \delta, \quad C_2 = 0. \quad (8.138)$$

A solução é então:

$$v_x(y) = \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \left( \delta y - \frac{y^2}{2} \right). \quad (8.139)$$

Repare que o perfil é parabólico e que a velocidade é máxima na superfície livre.

### 8.11.7 CONDUÇÃO DE CALOR

Embora este texto é sobre fluidos, o fenômeno de condução pura de calor em um fluido é idêntico à condução de calor em um sólido. Por exemplo, considere uma parede infinita perpendicular a um eixo  $x$  com um material sólido de condutividade térmica  $\alpha$ , massa específica  $\rho$ , e calor específico  $c$ , uniformes e constantes. Em uma das faces (posição  $x = 0$ ) a temperatura é mantida constante em  $T_0$ . A outra face ( $x = L$ ) está em contato com o ar que difunde calor para  $x > L$  a uma taxa igual a  $q_x$ . Deseja-se saber a distribuição de temperatura na parede em regime permanente. A equação governante para este problema é a equação da difusão unidimensional (já que o problema só dependerá de  $x$ ) para um material em repouso, e em regime permanente:

$$0 = \alpha \frac{d^2 T}{dx^2}. \quad (8.140)$$

A condição de contorno em  $x = 0$  é  $T(0) = T_0$ . Em  $x = L$  não se sabe qual é a temperatura. Sabe-se, entretanto, que deve haver um fluxo de calor  $q_x$  que deve ser igual ao fluxo de calor dentro da parede naquela posição. Então, em  $x = L$ :

$$-\rho c \alpha \frac{dT}{dx} = q_x, \quad (8.141)$$

ou

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = -\frac{q_x}{\rho c \alpha}. \quad (8.142)$$

Integrando (8.140) duas vezes:

$$T(x) = Ax + B, \quad (8.143)$$

onde, com a condição em  $x = 0$  e  $x = L$ , tem-se  $B = T_0$ , e  $A = -\frac{q_x}{\rho c \alpha}$ . Portanto:

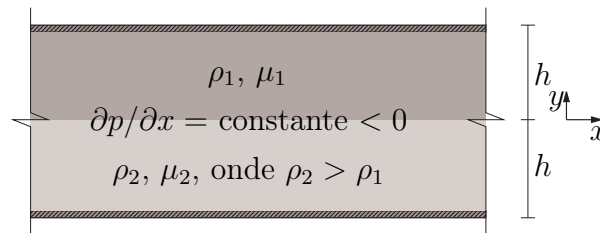
$$T(x) = T_0 - \frac{q_x}{\rho c \alpha} x. \quad (8.144)$$

Repare que se a parede fosse insulada em  $x = L$ , então teria-se  $q_x = 0$  e portanto a solução permanente do problema seria uma temperatura uniforme e igual a  $T_0$ .

## 8.12 PROBLEMAS PROPOSTOS

1. A figura 8.10 mostra duas camadas de fluidos diferentes (sub-índices 1 e 2 indicam fluido superior e inferior), com igual espessura. Ambos os fluidos estão sob um gradiente de pressão *constante*  $\partial p / \partial x < 0$ . Admita que as camadas de fluido são infinitas nas direções horizontais, e que o problema é permanente, incompressível, e que todas as propriedades de cada fluido são uniformes. A aceleração da gravidade é  $g$  apontando para baixo. A partir das equações de Navier-Stokes completas para os fluidos 1 e 2, nas direções  $x$  e  $y$ , faça as simplificações, estabeleça condições de contorno em  $y$ , tanto nas paredes quanto na interface entre os fluidos e resolva as velocidades em termos das propriedades dos fluidos e do gradiente de pressão  $\partial p / \partial x$ .

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \rho g \right] = \frac{\partial p}{\partial x} = \text{constante} < 0$$



**Figura 8.10:** Dois fluidos entre placas fixas.

2. Na figura 8.10 as paredes são mantidas a temperaturas  $T_1$  e  $T_2$ . Em termos de  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , das difusividades térmicas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , e dos calores específicos a pressão/volume constante (iguais neste caso)  $c_1$  e  $c_2$ , todos uniformes, resolva o problema permanente e ache o perfil de temperatura em cada camada em função das propriedades de cada fluido.

3. Mostre que:

$$\frac{\partial}{\partial t}(C_A \rho) + \nabla \cdot (C_A \rho \mathbf{v}) = \rho \frac{DC_A}{Dt}.$$

4. Determine o perfil de velocidade do escoamento de um fluido viscoso (viscosidade  $\mu$ ) em regime permanente (ou seja, determine a distribuição espacial da velocidade do fluido) em uma tubulação cilíndrica (raio  $R$ ) horizontal com gradiente de pressão conhecido na direção do eixo do tubo.

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu}{r} \right) - \frac{1}{r} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = - \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}$$

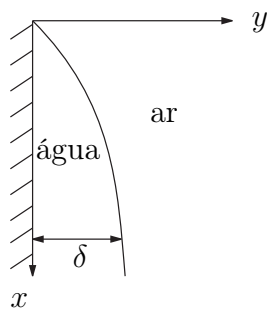
5. Considere um escoamento de um fluido viscoso (viscosidade  $\mu$ ) entre dois cilindros concêntricos na direção axial horizontal  $x$  com raios  $R_0$  (externo) e  $R_i$  (interno). Desprezando a gravidade (ou incorporando a gravidade no gradiente de pressão, o que é equivalente), determine a solução permanente para a velocidade do fluido em cada um dos seguintes casos: (a) O cilindro externo se move com velocidade constante  $V_0$  enquanto o cilindro interno permanece em repouso, e não há gradiente de pressão na direção axial; (b) ambos os cilindros permanecem em repouso, mas há gradiente de pressão conhecido na direção axial; (c) o cilindro externo se move com velocidade constante  $V_0$  enquanto o cilindro interno permanece em repouso, e há gradiente de pressão na direção axial.

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu}{r} \right) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = - \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}$$

6. Na figura 8.11 vapor se condensa em uma superfície vertical. A água (de massa específica  $\rho$  e viscosidade  $\mu$ ) é então puxada para baixo pela força gravitacional formando uma fina película de espessura  $\delta(x)$  e de largura  $b$  (perpendicular ao papel). A taxa de condensação é conhecida  $d\dot{m}/dx = C$  constante, onde  $\dot{m}$  é igual ao fluxo de massa na direção do escoamento na placa. Admita que a lâmina é muito fina e que o escoamento é viscoso. Admita também que não há variação da pressão atmosférica no ar. Faça as simplificações pertinentes e determine: (a)  $\dot{m}$  como função de  $\delta(x)$ , a espessura da película; (b) a espessura da película  $\delta(x)$ .

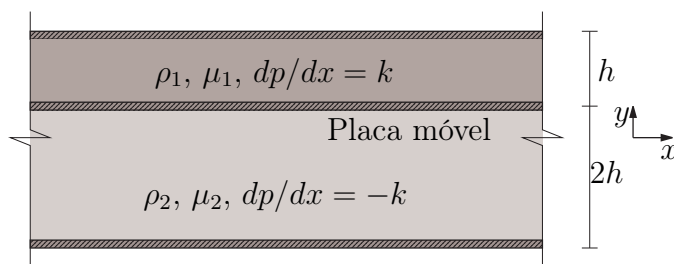
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{\delta} \right) = \rho g \quad (a) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{\delta} \right) = \rho g$$

7. A figura 8.12 mostra dois fluidos com  $\rho_1, \mu_1, \rho_2, \mu_2$ , escoando entre 3 placas. A placa superior e a inferior estão em repouso, mas a placa do meio pode se mover horizontalmente. As espessuras dos fluidos são  $h$  e  $2h$ , e o fluido de cima (índice 1) e de baixo (índice 2) estão



**Figura 8.11:** Condensação em uma parede.

sujeitos a gradientes de pressão constantes  $dp/dx = k$  e  $dp/dx = -k$ , respectivamente. Determine a velocidade  $V$  da placa do meio.



**Figura 8.12:** Dois fluidos e três placas.

## CAPÍTULO 9

# ANÁLISE DIMENSIONAL E SIMILARIDADE

### 9.1 INTRODUÇÃO

#### 9.1.1 SIMILARIDADE GEOMÉTRICA

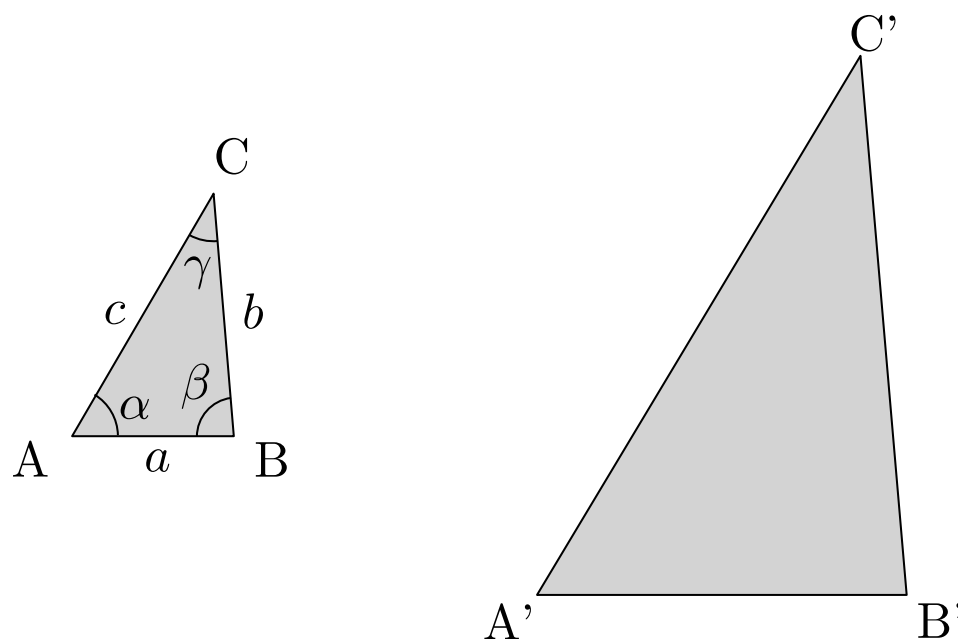
Em geometria, o conceito de semelhança é apresentado como uma ferramenta para resolver problemas. Em Mecânica dos Fluidos, como em outras áreas, o conceito de semelhança é igualmente útil, porém, é mais geral no sentido que trata-se não apenas de objetos geométricos no espaço, mas de objetos e fenômenos que, além de existirem no espaço, podem possuir massa, energia, temperatura, composição química, podem se mover e se deformar ao longo do tempo, podem sofrer esforços, etc. Neste capítulo será usada a terminologia *similaridade* no lugar de semelhança.

Como motivação, primeiramente será visto como a semelhança geométrica pode ajudar a resolver problemas elementares em geometria plana.

Suponha que você tem em mãos todas as medidas do triângulo ABC da figura 9.1, mas você não conhece as do triângulo A'B'C'. Sabendo que os dois triângulos são semelhantes, você poderá inferir qualquer grandeza adimensional de A'B'C' pois estas grandezas serão numericamente idênticas no ABC.

Por exemplo, são adimensionais qualquer um dos ângulos como  $\alpha$ ,  $\beta$ , e  $\gamma$  do triângulo ou razões entre grandeza com a mesma dimensão como  $a/b$ , ou  $ab/c^2$ , ou  $(a^3 + b^2c)/(a^2c + b^3)$ .

Além disso, em se tratando de um objeto puramente geométrico e fixo,



**Figura 9.1:** Triângulos semelhantes.

apenas com a dimensão fundamental *comprimento*  $L$  pode-se obter qualquer outra dimensão do objeto (por exemplo a área tem dimensão  $L^2$ ). Assim, conhecendo  $ABC$ , e medindo apenas um único comprimento de  $A'B'C'$ , tem-se acesso a todas as medidas deste objeto a partir de relações entre ele e o seu semelhante  $ABC$ .

Por exemplo, se área de  $A'B'C'$  é  $S'$ , então segue que o seu perímetro dividido por  $\sqrt{S'}$  deverá ter valor idêntico no triângulo  $ABC$ . Supondo conhecida a área  $S$  de  $ABC$ , segue que o perímetro  $P'$  de  $A'B'C'$  deverá ser  $P' = (a + b + c)\sqrt{S'/S}$ .

### 9.1.2 SIMILARIDADE PARA ALÉM DA GEOMETRIA

O uso de modelos reduzidos é uma importante aplicação de análise dimensional e similaridade, não apenas em ciência e tecnologia, mas também nas artes como o cinema, em jogos de computador, brinquedos, etc. É comum em museus, por exemplo, se observar modelos reduzidos de trens (trens “de brinquedo”) se movendo em trilhos e passando por uma miniatura de uma cidade. O realismo da cena muitas vezes impressiona. Porém, quando não há o devido cuidado por parte do construtor do modelo, possivelmente pode-se perceber que há algo estranho com o movimento do trem. Possivelmente ele

estará rápido demais para a cena parecer 100% real. O que ocorre nestes casos é que embora tenha havido cuidado com a similaridade geométrica, não houve esse cuidado com a similaridade *cinemática*. Para que a cena fique realista, a velocidade do trem deve parecer real. Para que a velocidade pareça real, o tempo que o trem leva para atravessar a cidade, por exemplo, deve ser o mesmo no modelo e no protótipo (o trem em tamanho real). Do ponto de vista de se montar uma cena realista de um trem atravessando uma cidade para um observador externo, no modelo, a velocidade do trem deve ser muito menor que no protótipo. O quanto menor? Ora, se a razão entre comprimentos do modelo e protótipo for  $1/100$  (tomando esta razão como geral para o presente exemplo), a velocidade do modelo precisará ser  $1/100$  da velocidade do trem protótipo. Isso significa que o intervalo de tempo necessário para que o trem do modelo se desloque uma distância  $L$  deve ser 100 vezes mais longo que para o trem protótipo. Este exemplo ilustra a ideia de similaridade que vai além apenas da geometria, para a cinemática da situação: também o tempo, além dos comprimentos, passa a ser importante. Mais que isso, combinações comprimento-tempo (como velocidades e acelerações) passam a ser importantes. Do ponto de vista do realismo da cena, onde houver movimento, o tempo para que algo se mova entre 2 pontos afastados de uma distância  $d$  (no protótipo) ou  $d/100$  (no modelo) deve ser o mesmo no modelo e no protótipo.

Voltando ao exemplo do modelo do trem, imagine que outros fenômenos que dependam do tempo estejam ocorrendo neste modelo. Por exemplo, um pêndulo de relógio pode estar oscilando naturalmente por efeito da gravidade. Suponha que em tamanho real o trem atravessa a cidade enquanto o pêndulo completa 50 ciclos (períodos). Para que pareça realista, o período do pêndulo deve ser o mesmo no protótipo e no modelo. Para manter a similaridade geométrica, o comprimento do pêndulo do modelo deve ser  $1/100$  do comprimento do pêndulo do protótipo. Como tanto o protótipo quanto o modelo estão sob a mesma gravidade  $g$ , chega-se a um impasse quanto ao realismo do período de oscilação do pêndulo, pois, para ambos os casos, esse período é proporcional a  $\sqrt{l/g}$ , onde  $l$  é o comprimento do pêndulo, 100 vezes maior para o protótipo, e como  $g$  não muda, o período de oscilação do pêndulo do modelo será

$$\frac{\sqrt{l/g}}{\sqrt{100l/g}} = \frac{1}{10}, \quad (9.1)$$

(um décimo) do período do pêndulo protótipo. O “culpado” do problema é que agora há algo que não havia antes: dinâmica, ou seja, o que faz o pêndulo oscilar é a gravidade do planeta Terra, que se manteve a mesma para o modelo e protótipo. Seria possível compensar esta diferença com um comprimento

diferente no pêndulo do modelo, mas isso destruiria a similaridade geométrica pré-estabelecida. A título de curiosidade, poderia-se pensar em compensar a diferença com uma aceleração gravitacional  $g$  100 vezes menor que a da Terra. Para isso seria necessário estarmos em outro planeta. Para manter a similaridade geométrica, o planeta modelo deveria ter raio igual a  $1/100$  do raio  $R$  da Terra. Se o material da Terra for o mesmo no protótipo e no planeta modelo (mesma densidade), então a massa do planeta modelo seria  $(1/100)^3$  da massa da Terra  $M$ . A “nova” gravidade (do modelo) seria:

$$\frac{g}{100} = \frac{G_m \frac{M}{100^3}}{\left(\frac{R}{100}\right)^2}, \quad (9.2)$$

enquanto que a gravidade da Terra é:

$$g = \frac{GM}{R^2}, \quad (9.3)$$

Nas fórmulas acima,  $G_m$  e  $G$  seriam as constantes da gravitação universal para o planeta modelo ou para a Terra. Das equações acima,  $G_m = G$  (por pura sorte, já que  $G$  não é uma constante adimensional), e portanto, dada a condição de mesma densidade planetária, não seria necessário um outro universo (com outra constante  $G$ ) para que o pêndulo oscilasse com o período “correto”.

A moral da estória aqui é simples: ao se trazer variáveis externas ao controle do modelador para o problema (no caso acima, o valor da aceleração gravitacional), frequentemente depara-se com dilemas e escolhas de compromisso que precisam ser feitas para que a análise dimensional e a similaridade entre fenômenos possam ser úteis.

Explorando um pouco mais este exemplo e a imaginação, a ideia é agora imaginar uma folha caindo enquanto o trem passa e pretende-se que a velocidade terminal da folha seja tal que dê ao fenômeno o realismo desejado. Supõe-se que a folha tem a exata proporcionalidade da similaridade geométrica, ou seja, tem-se no modelo uma miniatura exata da folha em termos de geometria. Sabe-se que a velocidade de queda da folha deve ser

$$V = \alpha \sqrt{\frac{Mg}{\rho A}}, \quad (9.4)$$

onde  $\alpha$  é uma constante adimensional,  $\rho$  é a densidade do ar,  $A$  é a área da folha projetada no plano horizontal,  $M$  é a massa da folha, e  $g$  é a aceleração da gravidade. Ora, o ar é o mesmo para o protótipo e para o modelo, assim como ocorre com  $g$ . Para se manter a similaridade geométrica, sendo o

comprimento do modelo 1/100 do protótipo, tem-se que a área da folha no modelo é 1/10.000 da área da folha no protótipo. Para que a queda da folha pareça realista, a velocidade da folha deve ser tal que o tempo para a folha modelo percorrer uma altura  $H$  deve ser o mesmo que para que a folha protótipo percorra uma altura  $100H$ , ou seja a velocidade da folha modelo deve ser  $V/100$ , um centésimo da velocidade da folha protótipo. Com estes dados pode-se então escolher a massa necessária para que folha do modelo caia com uma velocidade que aparente ser realista. Se a massa da folha protótipo for  $M$  e da folha modelo for  $m$ , pode-se explicitar  $\alpha$  na fórmula acima para o protótipo e para o modelo, e obrigar que  $\alpha$  nos dois casos seja o mesmo. Isso tem que ser verdade pois  $\alpha$  é adimensional e portanto seu valor deve se manter fixo independentemente das dimensões ou do sistema de unidades. Assim:

$$\frac{V}{\sqrt{\frac{Mg}{\rho A}}} = \frac{V/100}{\sqrt{\frac{mg}{\rho A/10.000}}} \rightarrow m = \frac{M}{100.000.000} = M \times 10^{-8}. \quad (9.5)$$

A massa da folha modelo deverá ser *cem milhões* de vezes menor que a massa da folha real – uma condição provavelmente inviável. Novamente, neste caso há uma variável dinâmica influenciando o problema da similaridade, desta vez com uma novidade: agora, além dos comprimentos e dos tempos, massas aparecem explicitamente no problema.

No exemplo acima (e em todos os outros neste texto), as grandezas envolvidas poderão ser escritas em termos de três dimensões fundamentais derivadas da massa, comprimento e tempo. Para problemas de termodinâmica, é possível ter a temperatura como quarta grandeza envolvida. Para problemas de química pode-se ter várias espécies mássicas, e assim por diante. No entanto, apenas com comprimento, tempo, e massa, resolve-se uma enorme gama de problemas de similaridade em engenharia.

### 9.1.3 GRANDEZAS FUNDAMENTAIS E GRANDEZAS DERIVADAS

Quando for possível escrever qualquer grandeza como uma combinação de um número mínimo de grandezas, estas denominam-se *grandezas fundamentais* ou primárias, enquanto que aquelas denominam-se *grandezas derivadas* ou secundárias. A definição de quais grandezas serão consideradas as fundamentais é totalmente arbitrária. O mais comum é o uso como grandezas fundamentais a massa (M), o comprimento (L), o tempo (T), e eventualmente a temperatura (t – para não confundir com o tempo).

É importante fazer-se a distinção entre grandeza e unidade. A unidade (gramas, quilômetros, minutos, newtons, joules, etc.) é apenas um padrão

para se comunicar o valor de uma grandeza em uma dada situação. Assim, a massa (grandeza) de um mesmo objeto pode ser expressa em diversas unidades: quilogramas, gramas, libras, toneladas, entre outras.

O uso de MLT como as grandezas fundamentais, como já foi dito, é arbitrário. De fato, algumas das constantes fundamentais do universo como a velocidade da luz no vácuo, a constante gravitacional de Newton e a constante de Plank são grandezas secundárias ou derivadas do sistema MLT, o que poderia sugerir o uso de outras grandezas fundamentais. O fato é que o conjunto mais conveniente para formar as grandezas fundamentais depende do problema em questão.

É sempre possível combinar grandezas primárias e/ou secundárias de modo que o objeto resultante não tenha dimensão alguma. Estes objetos são ditos *adimensionais*. Estas grandezas também não possuem unidade em termos das unidades fundamentais. É muito comum e útil em problemas reais se combinar variáveis dimensionais para formar variáveis (ou números) adimensionais.

A combinação entre  $m$  grandezas fundamentais  $X_i$  para formar qualquer outra grandeza de uma variável física  $A$  pode sempre ser escrita genericamente na forma:

$$[A] = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_m^{\alpha_m}, \quad (9.6)$$

onde  $[A]$  é a grandeza de  $A$ . Se, por exemplo,  $m = 3$ , e  $X_{1...3}$  são massa, comprimento e tempo, MLT, segue que a grandeza força pode ser escrita como:

$$F = M^{\alpha_1} L^{\alpha_2} T^{\alpha_3} = \frac{ML}{T^2}, \quad (9.7)$$

o que, em termos dos expoentes, fornece:  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_3 = -2$ . Pode-se interpretar os expoentes das grandezas fundamentais como componentes da base canônica de um espaço vetorial euclidiano:

$$M = M^1 L^0 T^0, \quad L = M^0 L^1 T^0, \quad T = M^0 L^0 T^1, \quad (9.8)$$

e os expoentes para uma grandeza qualquer, como os coeficientes da combinação linear que forma a grandeza desejada. Assim, tem-se que o vetor que forma a grandeza força é:

$$(1, 1, -2) = \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1). \quad (9.9)$$

Esta interpretação dos expoentes das grandezas fundamentais como coeficientes de uma combinação linear em um espaço vetorial é útil na compreensão de análise dimensional.

Uma distinção final importante deve ser salientada: quando uma variável é adimensional, isto não significa que esta variável não tem unidade, e sim,

que esta variável é insensível a mudanças de escala. Talvez o exemplo mais didático deste ponto é a grandeza ângulo. Um ângulo é sempre adimensional, mas é expresso em unidades como graus, radianos, minutos, etc.. A adimensionalidade do ângulo significa apenas que aumentando a escala de um objeto por um fator de mil, por exemplo, os ângulos do objeto permanecerão os mesmos na escala aumentada. Na maioria dos casos, o parâmetro adimensional não costuma ser expressado em uma unidade com um nome particular. Um exemplo típico é a rugosidade relativa (altura das rugas dividida pelo diâmetro) de um tubo circular, expressa simplesmente como um número pequeno maior que zero. Outros exemplos são o uso das unidades de concentração adimensionais como ppm (parte por milhão) e ppb (parte por bilhão), e o uso de percentuais para expressar probabilidades (10% é equivalente a 0,1) e unidade relativa do ar.

## 9.2 TEOREMA DE BUCKINGHAM DOS $\Pi$ 'S ADIMENSIONAIS

Como extensão direta da interpretação da dimensão de uma grandeza como resultado de uma operação linear, ao se agrupar  $n$  variáveis  $Y_i$  na forma  $Z = Y_1^{\beta_1} Y_2^{\beta_2} \dots Y_n^{\beta_n}$  ou, escrito de forma compacta no produtório  $Z = \prod_{i=1}^n Y_i^{\beta_i}$ , a dimensão  $[Z]$  (a notação  $[*]$  indicará dimensão ou grandeza da variável  $*$ ) em termos das dimensões fundamentais MLT (a partir de agora iremos supor que temos 3 dimensões/grandezas fundamentais, embora isso não seja necessariamente verdadeiro) é:

$$\begin{aligned} [Z] = M^{\alpha_1} L^{\alpha_2} T^{\alpha_3} &= (M^{a_1} L^{b_1} T^{c_1})^{\beta_1} \dots (M^{a_n} L^{b_n} T^{c_n})^{\beta_n} \\ &= \prod_{i=1}^n (M^{a_i} L^{b_i} T^{c_i})^{\beta_i}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Em termos dos expoentes, escritos como componentes de vetores, tem-se:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (a_1\beta_1 + \dots + a_n\beta_n, b_1\beta_1 + \dots + b_n\beta_n, c_1\beta_1 + \dots + c_n\beta_n), \quad (9.11)$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

A matriz contendo  $a$ 's,  $b$ 's e  $c$ 's acima é chamada de matriz dimensional. Se for conhecido como as variáveis  $Y_i$  estão agrupadas, ou seja, se conhece-se

$\beta_i$ , a operação acima é uma operação algébrica banal apenas para que se obtenha a dimensão da variável  $Z$ . Por exemplo, se  $n = 2$ ,  $Y_1$  e  $Y_2$  forem força e velocidade, e,  $\beta_1 = 1$  e  $\beta_2 = 1$ , tem-se que  $Z$  possui dimensão de potência.

O caso mais interessante é quando são conhecidos os  $Y_i$ 's (e portanto os  $a$ 's,  $b$ 's e  $c$ 's) e os  $\alpha_i$ 's (e portanto a grandeza de  $Z$ ) e se quer descobrir a combinação de  $Y_i$ 's que fornece os  $\alpha_i$ 's, ou seja, qual é a solução  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ ?

Este é o problema fundamental da álgebra linear. O sistema pode ser indeterminado (ter infinitas soluções), pode ser impossível (nenhuma solução), ou determinado (solução única).

Na prática, em análise dimensional, o interesse é em um caso ainda mais específico, que é o de  $Z$  ser uma variável adimensional, ou seja, procura-se soluções  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  para o sistema homogêneo em que  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$ . As possíveis combinações das variáveis  $Y_i$  que satisfazem a esta condição são os chamados grupos adimensionais. A cada uma destas soluções é atribuído o símbolo  $\Pi_k$ , onde  $k$  normalmente é o número de combinações de  $Y_i$  independentes (do ponto de vista da álgebra linear) entre si. O restante desta seção explora esta ideia.

A matriz dimensional é formada por vetores-colunas contendo para cada variável  $Y_i$  os expoentes de cada dimensão fundamental desta variável. Cada um destes vetores pertence a um espaço vetorial de dimensão euclidiana igual ao número de dimensões fundamentais do problema (no caso de MLT, que usaremos na nossa exposição, temos 3 dimensões fundamentais). O posto  $p$  da matriz dimensional é o número de colunas linearmente independentes (LI) entre si. Claramente estas colunas LI geram e são uma base para o espaço das colunas da matriz, e necessariamente  $p$  é menor ou (na maioria dos casos) igual ao número de dimensões fundamentais. Como a disposição das colunas da matriz dimensional é arbitrária, pode-se enumerar as  $n$  variáveis  $Y_i$  do problema tal que  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ , as variáveis *base*, formam  $p$  vetores-colunas LI da matriz. As  $n - p$  ( $n - p$  é um inteiro maior ou igual a zero, chamado de nulidade da matriz) variáveis restantes são portanto  $Y_{p+1}, Y_{p+2}, \dots, Y_{n-1}, Y_n$ .

Do que se sabe de álgebra linear, as colunas  $(p + 1)$  até  $n$  correspondentes às variáveis restantes, podem ser expressas como combinações lineares das colunas LI's correspondentes às  $p$  variáveis *base*. Tem-se então, a base dada por:  $\{(a_1, b_1, c_1), \dots, (a_p, b_p, c_p)\}$  e, para as variáveis restantes  $j = p + 1 \dots n$ :

$$(a_j, b_j, c_j) = x_{j1}(a_1, b_1, c_1) + \dots + x_{jp}(a_p, b_p, c_p), \quad j = p + 1 \dots n, \quad (9.12)$$

ou, de forma equivalente, usando as dimensões das variáveis em vez dos expoentes da dimensão fundamental, para cada variável entre  $p + 1$  e  $n$ :

$$[Y_j] = [Y_1^{x_{j1}}][Y_2^{x_{j2}}] \dots [Y_p^{x_{jp}}], \quad j = p + 1 \dots n. \quad (9.13)$$

Ora, a equação acima diz que

$$[Y_j] ([Y_1^{x_{j1}}][Y_2^{x_{j2}}] \cdots [Y_p^{x_{jp}}])^{-1} = 1 \quad (9.14)$$

ou seja, pode-se identificar  $n-p$  variáveis adimensionais independentes  $\Pi_1, \cdots, \Pi_{n-p}$ :

$$\Pi_{j-p} = \frac{Y_j}{(Y_1^{x_{j1}} Y_2^{x_{j2}} \cdots Y_p^{x_{jp}})}, \quad j = p+1 \cdots n. \quad (9.15)$$

O valores de  $x_{ji}$  são os coeficientes da combinação linear dos vetores LI da matriz dimensional que tornam adimensionais os  $\Pi$ 's correspondentes às colunas (variáveis) restantes. A equação acima pode ser reescrita para explicitar cada um dos  $n-p$   $Y_j$ 's linearmente dependentes em termos de  $\Pi$ 's e dos  $Y_1 \cdots Y_p$ :

$$Y_j = \Pi_{j-p} Y_1^{x_{j1}} Y_2^{x_{j2}} \cdots Y_p^{x_{jp}} \quad j = p+1 \cdots n. \quad (9.16)$$

A questão que resta é: para um dado problema, que variáveis/parâmetros (dimensionais em geral)  $Y_i$  deve-se incluir na formação dos  $\Pi$ 's, e como saber se, de fato, estas variáveis estão relacionadas?

Infelizmente a resposta a esta pergunta não é fácil, e determinar que variáveis devem ser agrupadas exige conhecimento teórico do problema, experiência empírica, sensibilidade, e, principalmente, parcimônia.

A única resposta geral que pode ser dada é a de que se há certeza que um problema envolve  $n$  variáveis  $Y_1, \cdots, Y_n$ , então *deve* existir alguma relação matemática dimensionalmente consistente entre estas variáveis. Por consistência dimensional se quer dizer apenas que em uma relação do tipo  $A+B=C$ , por exemplo,  $A$ ,  $B$  e  $C$  devem possuir a mesma grandeza (dimensões). Em geral, portanto, supõe-se que esta relação existe entre as variáveis  $Y$ 's:

$$f(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n-1}, Y_n) = 0. \quad (9.17)$$

ou, como é apresentado com frequência e é equivalente à expressão acima, pode-se explicitar um dos  $Y$ 's. Assim, tem-se para as variáveis com índice  $j = p+1, \cdots, n$ :

$$Y_j = g_j(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{j-1}, Y_{j+1}, \cdots, Y_{n-1}, Y_n). \quad (9.18)$$

Usando a equação (9.16) em (9.17):

$$f(Y_1, \cdots, Y_p, \Pi_1 Y_1^{x_{(p+1),1}} \cdots Y_p^{x_{(p+1),p}}, \cdots, \Pi_{n-p} Y_1^{x_{n,1}} \cdots Y_p^{x_{n,p}}) = 0. \quad (9.19)$$

A função acima possui argumentos envolvendo  $Y_1, \cdots, Y_p, \Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_{n-p}$ , e a expressão pode ser reescrita em termos de uma nova função (digamos  $g$ ) como:

$$g(Y_1, \cdots, Y_p, \Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_{n-p}) = 0. \quad (9.20)$$

Agora, basta fazermos a suposição final de que a relação  $g(\dots) = 0$  é invariante (não muda) sob uma mudança de unidades. Evidentemente, como os  $\Pi$ 's são adimensionais, mudanças de unidades não os afetam. As variáveis  $(Y_1, \dots, Y_p)$  entretanto assumiriam novos valores, digamos  $(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_p)$ , ou seja, se os fatores de conversão para o sistema MLT (massa, comprimento, tempo) forem, respectivamente:  $\lambda_M, \lambda_L, \lambda_T$ , temos

$$\tilde{Y}_k = \lambda_M^{a_k} \lambda_L^{b_k} \lambda_T^{c_k} Y_k; \quad k = 1 \dots p. \quad (9.21)$$

A nova expressão de  $g = 0$  fica:

$$g(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_p, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-p}) = 0. \quad (9.22)$$

Se a expressão deve valer para toda e qualquer escolha de  $\lambda$ 's, basta escolhermos  $\lambda$ 's que tornem  $\tilde{Y}_k = \text{constante adimensional}$  (digamos 1):

$$\lambda_M^{a_1} \lambda_L^{b_1} \lambda_T^{c_1} Y_1 = 1. \quad (9.23)$$

$$\vdots \quad (9.24)$$

$$\lambda_M^{a_p} \lambda_L^{b_p} \lambda_T^{c_p} Y_p = 1. \quad (9.25)$$

Podemos obter um sistema linear tomando o logaritmo da equação acima:

$$a_1 \log \lambda_M + b_1 \log \lambda_L + c_1 \log \lambda_T = -\log Y_1. \quad (9.26)$$

$$\vdots \quad (9.27)$$

$$a_p \log \lambda_M + b_p \log \lambda_L + c_p \log \lambda_T = -\log Y_p. \quad (9.28)$$

Não é necessário resolvermos o sistema de equações acima para  $\log \lambda_M, \log \lambda_L, \log \lambda_T$ , basta reconhecermos que este sistema tem solução, já que os coeficientes  $(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_p; c_1, \dots, c_p)$  são vetores LI, e podemos imediatamente escrever:

$$g(1, \dots, 1, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-p}) = 0. \quad (9.29)$$

A expressão acima não possui mais variáveis dimensionais e ela garante então que existe outra expressão:

$$g(1, \dots, 1, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-p}) \equiv F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-p}) = 0, \quad (9.30)$$

contendo apenas  $n - p$  variáveis adimensionais.

A expressão  $F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-p}) = 0$  pode também ser escrita explicitando-se um dos  $\Pi$ 's (digamos o primeiro) como função dos outros:

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-p}) = 0 \quad \text{ou} \quad \Pi_1 = G(\Pi_2, \dots, \Pi_{n-p}) \quad (9.31)$$

A função  $F(\Pi's)$  expressa o mesmo princípio que a função  $f(Y's)$ , mas como o número de variáveis envolvidas é menor, há um ganho de simplicidade no problema quando expresso em termos das variáveis adimensionais. Este resultado é conhecido como teorema de Buckingham ou Teorema dos  $\Pi$ 's.

O que se quer dizer com estas equações é que existe uma expressão matemática envolvendo os argumentos da função, mesmo quando esta expressão não pode ser determinada em termos de funções conhecidas. Na maioria dos casos, esta expressão só é possível de ser encontrada de forma aproximada e com alguma informação empírica externa (obtida a partir de experimentos, por exemplo). Em outros casos, esta expressão é a solução de uma equação diferencial conhecida mas que, infelizmente, não possui solução analítica conhecida. Os casos em que a expressão  $f$  (ou  $F$ ) é conhecida completamente não tem muita relevância na prática, mas são ótimos casos para ilustrar o uso do teorema para fins didáticos.

Não é incomum, por ignorância ou por cautela, a especificação de mais variáveis do que àquelas essenciais para o problema. Normalmente nestes casos ainda assim é possível extrair informação por análise dimensional com o teorema dos  $\Pi$ 's. O oposto, ou seja, se omitirmos variáveis importantes para o problema, o uso do teorema será, na melhor das hipóteses, inútil, e na pior das hipóteses, catastrófico.

Alguns exemplos simples de como selecionar as variáveis envolvidas em um problema para casos não necessariamente relacionados com fluidos são apresentados abaixo.

- Considere o intervalo de tempo  $T$  que um objeto com massa  $m$  demora para cair verticalmente de uma altura  $H$  até a superfície da Terra (massa  $M$ ) no vácuo, supondo que a aceleração da gravidade é constante igual a  $g$ . Em uma primeira tentativa, poderia-se supor que a relação é:  $f(T, m, M, H, g) = 0$ . Entretanto, sabe-se que não é necessária a inclusão das massas  $m$  e  $M$  pois o que é relevante da lei da gravitação já está incorporado em  $g$  e uma relação mais simples pode ser estabelecida com 3 variáveis:  $f(T, H, g) = 0$ . A matriz dimensional neste caso tem posto 2, e segue que haverá apenas uma variável adimensional  $\Pi_1 = T\sqrt{g/H}$  e  $F(\Pi_1) = 0$  ou  $\Pi_1 = \text{const.} = k$ , ou ainda  $T = k\sqrt{H/g}$ .
- O período de um pêndulo de massa pontual  $m$ , comprimento  $l$ , oscilando no vácuo sob ação da gravidade  $g$  com uma amplitude  $\theta_0$  implica em uma relação do tipo  $f(T, m, l, g, \theta_0) = 0$ . Novamente, o problema pode ser simplificado sabendo-se que a massa não é importante, o que fornece a relação mais simples:  $f(T, l, g, \theta_0) = 0$ . Neste caso, novamente

tem-se posto 2 na matriz dimensional, e 2 variáveis adimensionais, entre elas o próprio  $\theta_0$ :  $\Pi_1 = T\sqrt{g/l}$  e  $\Pi_2 = \theta_0$ . Segue que  $F(T\sqrt{g/l}, \theta_0) = 0$ , ou  $T\sqrt{g/l} = G(\theta_0)$ , e  $G$  é uma função a se determinar.

- Uma esfera praticamente lisa de raio  $R$  de massa  $m$  viajando a uma velocidade horizontal constante  $V$  na atmosfera de densidade  $\rho$ , viscosidade  $\mu$ , sofre uma força de atrito  $F$  horizontal. A expressão neste caso seria, em princípio  $f(F, \rho, \mu, V, R, m) = 0$ . Como a massa da esfera normalmente está ligada ao peso, que neste caso é perpendicular ao movimento da esfera, provavelmente a massa estará fora do problema, e  $f(F, \rho, \mu, V, R) = 0$  seria uma expressão mais útil. Neste caso, o posto da matriz dimensional é igual a 3, e o número de  $\Pi$ 's igual a  $5 - 3 = 2$ , e pode-se obter  $\Pi_1 = G(\Pi_2)$ , ou  $\frac{F}{\rho V^2 R^2} = G(\frac{\mu}{\rho V R})$ .

### 9.3 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DO TEOREMA DE BUCKINGHAM

Nesta seção são mostrados com mais detalhes alguns exemplos de aplicação do teorema de Buckingham. No primeiro exemplo serão exploradas possíveis aplicações de análise dimensional em modelos físicos reduzidos.

#### 9.3.1 FORÇA DE ARRASTO ENTRE FLUIDO E SÓLIDO

Como formular a força de arrasto (atrito)  $F$  (dimensão  $MLT^{-2}$ ) existente em um objeto sólido se movimentando com velocidade constante  $V$  (dimensão  $LT^{-1}$ ) em um fluido? Para tornar as coisas simples, imagine que o objeto é uma esfera de diâmetro  $D$  (dimensão  $L$ ), que a superfície desta esfera é rugosa, e que esta característica pode ser representada por uma altura de rugosidade  $e$  (dimensão  $L$ ). Outra característica da esfera é a sua massa  $m$  (dimensão  $M$ ). O fluido é caracterizado pela sua densidade  $\rho$  (dimensão  $ML^{-3}$ ) e pela sua viscosidade dinâmica  $\mu$  (dimensão  $ML^{-1}T^{-1}$ ). A aceleração gravitacional pode ser tomada como constante  $g$  (dimensão  $LT^{-2}$ ). Surge agora uma questão importante. Se a velocidade da esfera for tomada como constante, não há aceleração, Isaac Newton nos garante que a força resultante deve ser nula, e, no caso do movimento da esfera se dar na vertical, isto significa que o peso da esfera  $mg$  será igual, em módulo, à força de atrito  $F$ . Obviamente, este é um fato banal que não ajuda na determinação da natureza do atrito. O que se quer é uma relação entre  $F$  e as outras variáveis que não  $\{m, g\}$ . Outra maneira de ver o porquê de não incluir massa e gravidade, já explorada na seção anterior, é o fato do atrito ser uma força de superfície cuja magnitude independerá do sentido do movimento. Portanto,

o resultado deve independe do movimento ser na horizontal ou vertical, de existir ou não a força de corpo peso. Com isso, fica estabelecido para este problema que a força de atrito  $F$  será função de  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $V$ ,  $D$ ,  $e$ , ou seja, existe a relação:

$$f(F, \rho, \mu, V, D, e) = 0. \quad (9.32)$$

Tomando MLT como dimensões primárias o próximo passo é a montagem da matriz dimensional com os expoentes das dimensões primárias para cada variável do problema. Aqui uma importante observação: a classificação de  $\mu$ ,  $D$ , etc. como *variáveis*, não significa que estas quantidades estarão variando enquanto o fenômeno ocorre. O que se quer dizer é que estas quantidades podem assumir valores diferentes em diferentes problemas, experimentos, ou situações (diferentes esferas, diferentes fluidos, etc.). Muito bem, normalmente a matriz dimensional contém as dimensões primárias como linhas e as variáveis como colunas:

| $\times$ | $F$ | $\rho$ | $\mu$ | $V$ | $D$ | $e$ |
|----------|-----|--------|-------|-----|-----|-----|
| M        | 1   | 1      | 1     | 0   | 0   | 0   |
| L        | 1   | -3     | -1    | 1   | 1   | 1   |
| T        | -2  | 0      | -1    | -1  | 0   | 0   |

O próximo passo é a determinação do posto  $p$ , e a escolha das  $p$  colunas LI que comporão a base dos  $\Pi$ 's e que vão adimensionalizar as demais colunas. Aqui aparece uma ambiguidade no problema, pois há várias opções de vetores LI. Claramente o posto da matriz dimensional deste problema é  $p = 3$ . Pode-se escolher como base as variáveis  $\rho$ ,  $D$  e  $V$ . Para cada uma das variáveis dimensionais restantes,  $F$ ,  $\mu$ , e  $e$ , haverá uma variável adimensional, e os expoentes (coeficientes) de cada dimensão primária correspondente ( $x_{j1}, x_{j2}, x_{j3}$ ):

$$\Pi_1 = F \rho^{x_{11}} D^{x_{12}} V^{x_{13}}, \quad \Pi_2 = \mu \rho^{x_{21}} D^{x_{22}} V^{x_{23}}, \quad \Pi_3 = e \rho^{x_{31}} D^{x_{32}} V^{x_{33}}. \quad (9.33)$$

As soluções  $x_{ji}$  que adimensionalizam os  $\Pi$ 's são:  $x_{11} = -1$ ,  $x_{12} = -2$ ,  $x_{13} = -2$ ,  $x_{21} = -1$ ,  $x_{22} = -1$ ,  $x_{23} = -1$ ,  $x_{31} = 0$ ,  $x_{32} = -1$ ,  $x_{33} = 0$ . Os  $\Pi$ 's são, portanto:

$$\Pi_1 = \frac{F}{\rho D^2 V^2}, \quad \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho D V}, \quad \Pi_3 = \frac{e}{D}. \quad (9.34)$$

A relação que o teorema garante existir é:

$$\frac{F}{\rho D^2 V^2} = \phi \left( \frac{\mu}{\rho D V}, \frac{e}{D} \right), \quad (9.35)$$

onde  $\phi$  apenas indica uma relação funcional a ser determinada.

Dois dos  $\Pi$ 's obtidos acima aparecem com frequência em análise dimensional e por isso recebem denominações especiais. O inverso de  $\Pi_2$ ,  $\rho DV/\mu \equiv \text{Re}$  é conhecido como *número de Reynolds*.  $e/D$  é conhecido como *rugosidade relativa*.

Antes de dar prosseguimento sobre a utilidade da análise usando este exemplo, vale fazer um comentário para dizimar de uma vez por todas o aparente problema da ambiguidade na escolha de diferentes variáveis para compor a base da adimensionalização. Estas diferentes escolhas, simplesmente significariam a obtenção de  $\Pi$ 's diferentes. Porém, a posteriori, estes outros  $\Pi$ 's podem ser obtidos simplesmente manipulando e combinando os  $\Pi$ 's obtidos na primeira tentativa. Por exemplo, pode-se inverter um ou mais  $\Pi$ 's, ou montar novos  $\Pi$ 's como razões entre potências dos  $\Pi$ 's obtidos previamente. Por exemplo pode-se estabelecer para o presente exemplo os seguintes  $\Pi$ 's, que seriam igualmente válidos:

$$\Pi_1 = \frac{F}{\mu e V}, \quad \Pi_2 = \frac{\rho e V}{\mu}, \quad \Pi_3 = \frac{D}{e}. \quad (9.36)$$

O melhor arranjo para as variáveis torna-se portanto uma questão de conveniência, tradição, etc..

Na prática, uma das maiores utilidades do teorema dos  $\Pi$ 's vem justamente do fato de que não se conhece por completo a relação para as variáveis dimensionais. No caso do presente exemplo da força de arrasto entre um fluido e uma esfera, que pode ser estendida para problemas como o da força de arrasto em um avião ou carro se deslocando, o que se tem é um desconhecimento de um equacionamento teórico satisfatório para a força de arrasto, e uma necessidade, portanto, de se determinar esta força por meio de experimentos. Imagine que se queira realizar experimentos para medir a força de arrasto  $F$  para diferentes esferas (com vários diâmetros e rugosidades), com diferentes velocidades, em diferentes fluidos (com várias densidades e viscosidades), o número total de experimentos para dar conta de todos os casos que se possa estar interessados tornaria o trabalho inviável. Para se ter uma ideia, suponha que se realizasse experimentos com 25 esferas com 5 diâmetros diferentes, cada uma com 5 rugosidades diferentes, para cada esfera 5 velocidades diferentes (um total de 125 casos até agora). Para cada uma destas situações, o experimento seria feito com 25 fluidos, com 5 densidades e 5 viscosidades diferentes. O total de experimentos seria de 3125 – uma árdua tarefa e uma representatividade duvidosa (apenas 5 diâmetros, 5 velocidades, etc.). Para uma melhor representatividade e precisão, seria necessário aumentar o número de valores experimentais de cada variável para, por exemplo, 50 em vez de 5. Neste caso, seriam necessários 50<sup>6</sup> ou 312.500.000 (trezentos e doze milhões e quinhentos mil!) experimentos.

A uma taxa de um experimento por hora, 24 h por dia, seriam necessários mais de 35 mil anos para se completar a tarefa!

Por outro lado, o mesmo fenômeno tem a relação adimensional  $\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3)$ . Pode-se obter toda a informação física desejada medindo  $\Pi_1$  para, por exemplo, 50 valores de  $\Pi_2$  e 50 valores de  $\Pi_3$ , apenas modificando  $D$  e  $V$  (usando o mesmo fluido e o mesmo material/rugosidade para as esferas em todos os experimentos). O número total de experimentos seria 2500, o que parece bem mais razoável.

Outra grande utilidade do uso do teorema é a possibilidade de se estudar experimentalmente fenômenos em escala de protótipo usando modelos reduzidos. Usando ainda o presente exemplo, a força de arrasto do ar em uma esfera de diâmetro  $D$  e rugosidade  $e$  pode ser determinada por experimentos em uma esfera com diâmetro 10 vezes menor, desde que a rugosidade seja  $e/10$  para manter o mesmo  $\Pi_3$  no protótipo e no modelo, e uma velocidade também 10 vezes menor  $V/10$ , para manter o mesmo  $\Pi_2$  no protótipo e no modelo.

### 9.3.2 EFEITO CAPILAR EM MEIO POROSO

Em solos porosos onde há um lençol freático a uma certa profundidade, a zona saturada pode, por efeito da capilaridade, se elevar a níveis acima do nível gravitacional do lençol (definido como o nível que a água se encontrará se for cavado um poço no local). Esta sobre-elevação de altura  $h$  (dimensão L) é função da densidade da água  $\rho$  (dimensão  $ML^{-3}$ ), da tensão superficial na interface ar-água,  $\sigma$  (dimensão  $MT^{-2}$ ), e da permeabilidade do solo  $\kappa$  (dimensão  $L^2$ ), além da aceleração gravitacional  $g$  (dimensão  $LT^{-2}$ ) que equilibrará a força capilar e manterá a zona saturada fixa no tempo. Poderia-se pensar que a viscosidade do fluido devesse exercer algum papel, mas como o fluido se encontra em repouso, a viscosidade não pode desempenhar papel algum no problema.

A matriz dimensional será:

| $\times$ | $h$ | $\rho$ | $\sigma$ | $\kappa$ | $g$ |
|----------|-----|--------|----------|----------|-----|
| M        | 0   | 1      | 1        | 0        | 0   |
| L        | 1   | -3     | 0        | 2        | 1   |
| T        | 0   | 0      | -2       | 0        | -2  |

com posto  $p = 3$ , portanto há 2 variáveis adimensionais. Por exemplo pode-se formar as variáveis adimensionais como  $\Pi_1 = h\rho^{x_{11}}g^{x_{12}}\kappa^{x_{13}}$ ;  $\Pi_2 = \sigma\rho^{x_{21}}g^{x_{22}}\kappa^{x_{23}}$ . Obrigando que as dimensões dos  $\Pi$ 's sejam  $M^0L^0T^0$ , os expoentes deverão ser:  $x_{11} = 0$ ,  $x_{12} = 0$ ,  $x_{13} = 1/2$ ,  $x_{21} = -1$ ,  $x_{22} = -1$ ,

$x_{13} = -1$ . O teorema dos  $\Pi$ 's garante que:

$$\Pi_1 = f(\Pi_2), \quad \text{ou} \quad \frac{h}{\sqrt{\kappa}} = f\left(\frac{\sigma}{\rho g \kappa}\right). \quad (9.37)$$

### 9.3.3 VELOCIDADE DE UM TSUNAMI

Um *tsunami* é uma onda muito longa se propagando no oceano. Considere o problema da velocidade  $C$  (dimensão  $LT^{-1}$ ) de propagação desta onda. Em princípio, é razoável supor que a velocidade seja função da aceleração da gravidade  $g$  (dimensão  $LT^{-2}$ ), da profundidade do oceano  $H$  (dimensão  $L$ ), e da densidade da água  $\rho$  (dimensão  $ML^{-3}$ ). Embora num *tsunami* haja movimento do fluido, pode-se antecipar que o efeito da viscosidade que é inibir e dissipar a energia do escoamento pode ser desprezado para o cálculo da velocidade da onda.

A matriz dimensional é:

| $\times$ | $C$ | $\rho$ | $H$ | $g$ |
|----------|-----|--------|-----|-----|
| M        | 0   | 1      | 0   | 0   |
| L        | 1   | -3     | 1   | 1   |
| T        | -1  | 0      | 0   | -2  |

O posto é 3, e, portanto há apenas 1 variável adimensional, por exemplo  $\Pi = C\rho^a g^b H^c$ . É fácil verificar que a solução é  $a = b = -\frac{1}{2}$ ,  $c = 0$ , e  $\Pi = C/\sqrt{gH}$ . Note que, ao contrário do caso de uma onda sonora, a densidade da água não faz parte do problema, o que significa que a velocidade do *tsunami* seria a mesma se o oceano fosse composto de outro fluido com densidade completamente diferente(!). Este exemplo ajuda a esclarecer o que pode-se concluir quando há apenas 1  $\Pi$ . Obviamente a relação neste caso não pode ser expressa como um  $\Pi$  em função dos outros  $\Pi$ 's, já que há apenas um único  $\Pi$ . Entretanto, pode-se escrever  $f(\Pi) = 0$ , ou pode-se argumentar que  $\Pi$  não é função de coisa alguma, o que equivale a dizer que  $\Pi = \text{constante} = K$ , ou seja:  $C = K\sqrt{gH}$ . Este é um ótimo exemplo de como a análise dimensional pode chegar perto da resposta para um problema. A solução das equações de conservação para o problema de um *tsunami* forneceria  $K = 1$ , e  $C = \sqrt{gH}$ .

Se no oceano onde ocorre a propagação do *tsunami* já houver uma corrente com velocidade  $V$ , a velocidade do *tsunami* deve ser corrigida. A inclusão de  $V$  forneceria mais um  $\Pi$  e a resposta seria:  $C/\sqrt{gH} = f(V/\sqrt{gH})$ . O parâmetro adimensional  $V/\sqrt{gH} \equiv \text{Fr}$  aparece em inúmeros problemas onde há ondas de gravidade, e foi batizado de *número de Froude*.

### 9.3.4 VELOCIDADE DO SOM

Ao contrário do caso de uma onda superficial como o *tsunami*, o som não precisa da ação da gravidade para se propagar, e, por outro lado, sua velocidade  $c$  (dimensão  $LT^{-1}$ ) é função da densidade do fluido  $\rho$  (dimensão  $ML^{-3}$ ). Porém, além da densidade, o som é decorrente da compressibilidade do material ou seja, da ação da pressão  $p$  (dimensão  $ML^{-1}T^{-2}$ ) sobre a densidade. Se o fluido estiver se movendo com uma velocidade constante  $V$  (dimensão  $LT^{-1}$ ), o efeito *Doppler* se fará presente modificando a velocidade do som. O problema a partir da matriz dimensional é:

| $\times$ | $C$ | $\rho$ | $p$ | $V$ |
|----------|-----|--------|-----|-----|
| M        | 0   | 1      | 1   | 0   |
| L        | 1   | -3     | -1  | 1   |
| T        | -1  | 0      | -2  | -1  |

Este é um caso interessante pois a matriz tem posto  $p = 2$  apenas e, portanto, há 2 variáveis adimensionais que podem ser:

$$\Pi_1 = \frac{c}{\sqrt{p/\rho}}, \quad \Pi_2 = \frac{V}{\sqrt{p/\rho}}, \quad \frac{c}{\sqrt{p/\rho}} = f\left(\frac{V}{\sqrt{p/\rho}}\right). \quad (9.38)$$

Como há liberdade na escolha das variáveis adimensionais, é possível combinar as variáveis acima e fazer:

$$\Pi_1 = \frac{c}{\sqrt{p/\rho}}, \quad \Pi_2 = \frac{V}{c}, \quad \frac{c}{\sqrt{p/\rho}} = f\left(\frac{V}{c}\right). \quad (9.39)$$

Se a velocidade do escoamento  $V$  for nula, tem-se:

$$\frac{c}{\sqrt{p/\rho}} = \text{constante}. \quad (9.40)$$

$Ma \equiv V/c$  é um parâmetro adimensional conhecido como *número de Mach*. Novamente, chega-se perto do resultado teórico que vem da solução das equações diferenciais e termodinâmicas para o problema do som, que fornece, para situações onde a compressão é isentrópica (adiabática):  $c = \sqrt{\gamma} \sqrt{p/\rho}$ , onde  $\gamma$  é um outro número adimensional conhecido por *índice adiabático* e é definido como a razão entre os calores específicos a pressão constante e a volume constante.

### 9.3.5 HIDROSTÁTICA

A pressão em um corpo de água parece aumentar com a profundidade devido ao “peso” da água. Pode-se supor então que a pressão  $p$  (dimensão  $ML^{-1}T^{-2}$ )

é função da profundidade  $h$  (dimensão L), da ação da gravidade  $g$  (dimensão  $LT^{-2}$ ), da densidade  $\rho$  (dimensão  $ML^{-3}$ ) e da pressão do ar  $p_{ar}$  (dimensão  $ML^{-1}T^{-2}$ ) atuando na superfície do corpo de água. Para este problema, a matriz dimensional é:

| $\times$ | $p$ | $\rho$ | $h$ | $g$ | $p_{ar}$ |
|----------|-----|--------|-----|-----|----------|
| M        | 1   | 1      | 0   | 0   | 1        |
| L        | -1  | -3     | 1   | 1   | -1       |
| T        | -2  | 0      | 0   | -2  | -2       |

que, tendo posto  $p = 3$ , fornece uma relação entre 2  $\Pi$ 's, que podem ser:

$$\Pi_1 = \frac{p}{\rho gh}, \quad \Pi_2 = \frac{p_{ar}}{\rho gh}, \quad \frac{p}{\rho gh} = f\left(\frac{p_{ar}}{\rho gh}\right), \quad (9.41)$$

ou ainda

$$p = \rho gh f\left(\frac{p_{ar}}{\rho gh}\right). \quad (9.42)$$

Novamente, chaga-se perto da solução do problema que é bem conhecida:

$$f\left(\frac{p_{ar}}{\rho gh}\right) = 1 + \frac{p_{ar}}{\rho gh}, \quad \text{e} \quad p = p_{ar} + \rho gh. \quad (9.43)$$

## 9.4 ADIMENSIONALIZAÇÃO DE EQUAÇÕES

Uma aplicação essencial de análise dimensional é a adimensionalização de equações. É comum haver problemas em que, apesar das equações governantes originais serem complicadas demais para serem resolvidas, o problema oferece oportunidade de simplificações que pode permitir diminuir o número de termos ou o número de variáveis envolvidas, por exemplo. A ideia é que em uma equação escrita na forma adimensional é fácil identificar a ordem de grandeza dos termos e os tamanhos relativos entre eles, tudo isso sem ambiguidades decorrentes das unidades/dimensões envolvidas.

Não faz parte do escopo deste livro a exploração de muitos problemas envolvendo sistemas de equações diferenciais utilizando análise dimensional. Por isso, serão mostrados apenas três exemplos para introduzir a ideia.

### 9.4.1 O PRIMEIRO PROBLEMA DE STOKES REVISITADO

O problema é o de um fluido viscoso inicialmente em repouso colocado em movimento pela translação de uma placa com velocidade constante  $V$ . Este problema já foi abordado no capítulo precedente e a ideia é apenas complementá-lo com o que está por trás da técnica de solução lá abordada. O problema

de valor de contorno e inicial é:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \quad (9.44)$$

$\nu$  é a viscosidade cinemática,  $v_x$  é a velocidade do fluido,  $y$  é a direção perpendicular à placa. As condições iniciais e de contorno são:

$$v_x(y, 0) = 0, \quad v_x(\infty, t) = 0, \quad v_x(0, t) = V. \quad (9.45)$$

Este problema tem 5 “variáveis” envolvidas:  $v_x$ ,  $V$ ,  $\nu$ ,  $y$  e  $t$ . A matriz dimensional para o problema é:

| $\times$ | $v_x$ | $V$ | $\nu$ | $y$ | $t$ |
|----------|-------|-----|-------|-----|-----|
| M        | 0     | 0   | 0     | 0   | 0   |
| L        | 1     | 1   | 2     | 1   | 0   |
| T        | -1    | -1  | -1    | 0   | 1   |

A função que relaciona estas variáveis é a solução do problema de valor de contorno. A matriz dimensional tem posto  $p = 2$ , portanto há 3 variáveis adimensionais. Pode-se escolhê-las, por exemplo, como:

$$\Pi_1 = \frac{v_x t}{y}, \quad \Pi_2 = \frac{V t}{y}, \quad \Pi_3 = \frac{\nu t}{y^2}, \quad (9.46)$$

onde  $y$  e  $t$  foram escolhidas para serem os “vetores LF”. Neste ponto há uma última simplificação possível. Primeiro, escreve-se:

$$\frac{v_x t}{y} = g\left(\frac{V t}{y}, \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right). \quad (9.47)$$

onde, por conveniência, substituiu-se  $\Pi_3$  pelo inverso de duas vezes a sua raiz quadrada. Ora, a equação diferencial é linear e, portanto, espera-se que  $v_x$  e  $V$  sejam proporcionais, o que permite escrever a relação abaixo:

$$\frac{v_x t}{y} = \frac{V t}{y} f\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right), \quad \text{ou,} \quad \frac{v_x}{V} = f\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right). \quad (9.48)$$

Outra maneira de ver isso seria substituir  $\Pi_1$  por  $\Pi_1/\Pi_2 = v_x/V$ , e escrever:

$$\frac{v_x}{V} = f\left(\frac{V t}{y}, \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right). \quad (9.49)$$

Novamente, notando que o problema de valor de contorno linear, é de se esperar que duplicando  $V$ , a solução  $v_x$  deve ser duplicada, (obviamente

mantendo-se fixos os valores de  $t$ ,  $y$ , e  $\nu$ ). Isto sugere que  $f$  não deveria ser função de  $V$ , já que o lado esquerdo já contempla esta proporcionalidade entre  $v_x$  e  $V$ .

Agora é apresentado como isso apareceria na própria equação diferencial. Observe que ao se substituir a variável adimensional  $\xi$  em cada termo da equação diferencial, tem-se:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{dv_x}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{1}{2t} \xi \frac{dv_x}{d\xi}, \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\xi^2}{y^2} \frac{d^2 v_x}{d\xi^2}. \quad (9.50)$$

Pode-se também adimensionalizar a velocidade  $v_x$  com a velocidade da placa, ou seja  $v^* = v_x/V$  e a equação fica

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{dv^*}{d\xi} \right) + 2\xi \frac{dv^*}{d\xi} = 0. \quad (9.51)$$

Note que, na nova equação diferencial,  $\nu$ ,  $y$  e  $t$  estão condensados na variável adimensional  $\xi$ , e a condição de contorno para  $v^*$  passa a ser  $v^*(x=0, t) = 1$ . A solução da equação *deve* ser:

$$v^* = f(\xi), \quad \text{ou} \quad \frac{v_x}{V} = f\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right). \quad (9.52)$$

A análise dimensional não pode ir além deste ponto, a função  $f$  só pode ser determinada resolvendo-se a equação diferencial. Note porém que a equação diferencial agora é ordinária (em  $\xi$ ) e não mais parcial.

#### 9.4.2 INCOMPRESSIBILIDADE

A equação da conservação da massa para um fluido puro foi deduzida no capítulo precedente, e é:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (9.53)$$

Se o fluido é incompressível, então a densidade  $\rho$  é constante e:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (9.54)$$

Como justificar o uso da equação considerando incompressibilidade se sabe-se que todo fluido *real* é compressível? Obviamente trata-se de uma aproximação, mas como usar esta informação com algum rigor matemático?

Um fluido ser aproximadamente incompressível, significa que a densidade  $\rho$  não se distancia muito de um valor “médio” ou “padrão”  $\rho_0$  fixo. Assim

pode-se escrever com a ajuda de uma constante arbitrária pequena  $\epsilon$  que a densidade é:

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0 + \epsilon \rho'(x, y, z, t), \quad \text{onde } \epsilon \ll 1, \quad \rho' \text{ é da ordem de } \rho_0. \quad (9.55)$$

Na maioria dos problemas reais de mecânica dos fluidos, é possível especificar escalas típicas para o fenômeno estudado. Com estas escalas pode-se adimensionalizar as equações. Genericamente, pode-se estipular que a escala de velocidades de interesse é  $V$ , e as distâncias características do problema são da ordem de  $L$  – que deve ser um comprimento típico para que as incógnitas do problema (velocidades e densidade) variem consideravelmente. Pode-se adimensionalizar  $\rho$  por  $\rho_0$ ,  $(v_x, v_y, v_z)$  por  $V$ , e o tempo fica então adimensionalizado por  $L/V$ . As variáveis adimensionais, denotadas com  $*$  são:

$$\begin{aligned} \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \epsilon \frac{\rho'}{\rho_0}, \\ (x^*, y^*, z^*) &= \left( \frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L} \right), \\ (v_x^*, v_y^*, v_z^*) &= \left( \frac{v_x}{V}, \frac{v_y}{V}, \frac{v_z}{V} \right), \\ t^* &= \frac{t}{L/V} = \frac{V}{L} t. \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis dimensionais na equação, tem-se:

$$\frac{\rho_0 V}{L} \left[ \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + v_x^* \frac{\partial \rho^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial \rho^*}{\partial y^*} + v_z^* \frac{\partial \rho^*}{\partial z^*} + \rho^* \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} \right) \right] = 0.$$

Vale lembrar que as variáveis/termos contendo asterisco têm ordem de grandeza  $\sim 1$  (unitária), e isso é garantido por uma escolha apropriada das escalas. Multiplicando a equação por  $L/(\rho_0 V)$  e reconhecendo agora que  $\rho^* = \rho_0(1 + \epsilon \rho'/\rho_0)$ :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(1 + \epsilon \rho'/\rho_0)}{\partial t^*} + v_x^* \frac{\partial(1 + \epsilon \rho'/\rho_0)}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial(1 + \epsilon \rho'/\rho_0)}{\partial y^*} + \\ &v_z^* \frac{\partial(1 + \epsilon \rho'/\rho_0)}{\partial z^*} + (1 + \epsilon \rho'/\rho_0) \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} \right) = 0. \end{aligned}$$

ou, lembrando que 1 e  $\epsilon$  são constantes:

$$\begin{aligned} &\epsilon \frac{\partial(\rho'/\rho_0)}{\partial t^*} + \epsilon v_x^* \frac{\partial(\rho'/\rho_0)}{\partial x^*} + \epsilon v_y^* \frac{\partial(\rho'/\rho_0)}{\partial y^*} + \epsilon v_z^* \frac{\partial(\rho'/\rho_0)}{\partial z^*} + \\ &(1 + \epsilon \rho'/\rho_0) \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} \right) = 0. \end{aligned}$$

Lembrando que  $\rho'/\rho_0$  é da ordem de grandeza da unidade, pode-se escrever a equação acima como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} = -\epsilon \left[ \frac{\partial(\rho'/\rho_0)}{\partial t^*} + v_x^* \frac{\partial(\rho'/\rho_0)}{\partial x^*} \right. \\ \left. + v_y^* \frac{\partial(\rho'/\rho_0)}{\partial y^*} + v_z^* \frac{\partial(\rho'/\rho_0)}{\partial z^*} \right. \\ \left. + \frac{\rho'}{\rho_0} \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} \right) \right] \end{aligned} \quad (9.56)$$

Finalmente, tomando  $\epsilon \rightarrow 0$ , o lado direito da equação pode ser desprezado e substituindo as variáveis na forma dimensional, recupera-se a condição aproximada de incompressibilidade, equação 9.54.

### 9.4.3 EQUAÇÃO DE EULER

O sistema de equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis, já deduzida no capítulo precedente é:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (9.57)$$

É comum a apresentação da equação de Euler como aquela válida para um fluido ideal (invíscido), simplesmente supondo-se  $\mu \approx 0$  e desprezando-se o último termo da equação de Navier-Stokes. Na realidade nenhum fluido é invíscido, e o que deve ser feito é uma análise do tamanho relativo entre o termo viscoso (que contém  $\mu$  mas também contém derivadas espaciais da velocidade) e os outros termos da equação, principalmente os termos de inércia (aceleração). Pode-se adimensionalizar as velocidades ( $v_x, v_y, v_z$ ) por uma velocidade típica  $V$ , as distâncias ( $x, y, z$ ) por  $L$  (e portanto o operador  $\nabla$  por  $1/L$ ), o tempo  $t$  por  $L/V$ , e o diferencial de pressão por  $\Delta P$ . A equação adimensional com asteriscos denotando variáveis adimensionais é:

$$\frac{\rho V}{L} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho V^2}{L} (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* = -\frac{\Delta P}{L} \nabla^* p^* + \rho \mathbf{g} + \frac{\mu V}{L^2} \nabla^{*2} \mathbf{v}^*. \quad (9.58)$$

A equação pode ser dividida por  $\frac{\rho V^2}{L}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* = -\frac{\Delta P}{\rho V^2} \nabla^* p^* + \frac{\mathbf{g} L}{V^2} + \frac{\mu}{\rho V L} \nabla^{*2} \mathbf{v}^*. \quad (9.59)$$

Note a presença do número de Reynolds  $Re = \rho V L / \mu$  no último termo da direita. Também no lado direito pode ser visto o número (adimensional) de

Euler  $Eu = \Delta P/(\rho V^2)$  e o quadrado do número de Froude  $Fr^2 = V^2/(gL)$ . Se o escoamento for turbulento e/ou o interesse for em resolver escalas grandes, então  $Re \gg 1$ , o último termo da equação pode ser desprezado, e recupera-se a equação de Euler:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}. \quad (9.60)$$

Neste capítulo apareceram alguns números adimensionais como o número de Reynolds e o número de Froude. Na tabela 9.1 é apresentada, sem detalhamento, uma lista com alguns números adimensionais comuns em mecânica dos fluidos.

## 9.5 PROBLEMAS PROPOSTOS

1. Usando o teorema dos  $\Pi$ 's, encontre uma expressão adimensional envolvendo a velocidade terminal em função das outras variáveis do problema da figura 6.2.

$$\cdot \left( \theta, \frac{V_{\infty}}{c}, \frac{\tau_0 V_{\infty}^2}{\rho c^2}, \frac{V_{\infty}}{\delta} \right) f = \frac{V_{\infty}}{c} \quad \text{Resposta}$$

2. Refaça o problema acima reconhecendo que a velocidade terminal deve ser função da projeção do peso na direção do plano  $P_{\theta} = mg \sin \theta$ , e usando  $P_{\theta}$  e não mais  $m$ ,  $g$ ,  $\theta$ .

$$\cdot \left( \frac{P_{\theta}}{V} \right) f = \frac{P_{\theta}}{V} \quad \text{Resposta}$$

3. Use o teorema dos  $\Pi$ 's no problema da figura 7.5 no intuito de encontrar uma fórmula envolvendo a velocidade na saída do tanque, em função das outras variáveis.

$$\cdot \frac{V}{\sqrt{gh}} = \text{constante} \quad \text{Resposta}$$

4. A equação de Bernoulli (sem dissipação/perdas) diz que, ao longo de uma linha de corrente:  $p + \rho gz + \rho V^2/2 = E$ , onde  $E$  é o nível energético (energia por unidade de volume) do escoamento e é constante. Se a equação não fosse conhecida, mas você soubesse quais variáveis devem estar presentes nela, (a) que equação poderia ser obtida pelo teorema dos  $\Pi$ 's e (b) como ela se relaciona com a equação completa?

$$\cdot \left( \frac{E}{\rho V^2}, \frac{gz}{V^2} \right) f = \frac{E}{\rho V^2} \quad \text{(a)} \quad \cdot \left( \frac{E}{\rho V^2}, \frac{gz}{V^2} \right) f = \frac{E}{\rho V^2} \quad \text{(b)} \quad \text{Resposta}$$

5. A potência de uma hidrelétrica 100% eficiente é:  $P = \rho g H Q$  (produto entre densidade, gravidade, altura de queda, vazão volumétrica). Se você tivesse apenas a informação  $P = f(\rho, g, H, Q)$ , que relação você

**Tabela 9.1:** Alguns números adimensionais.

| Número de  | Fórmula                                                    | Comentário                                 |
|------------|------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| Archimedes | $Ar = \frac{gL^3\rho_\ell(\rho-\rho_\ell)}{\mu^2}$         | Movimentos por diferenças de densidades    |
| Arrasto    | $c_d = \frac{2F_d}{\rho v^2 A}$                            | Resistência ao escoamento em aerodinâmica  |
| Bejan      | $Be = \frac{\Delta PL^2}{\mu\alpha}$                       | Queda da pressão em canal                  |
| Bingham    | $Bm = \frac{\tau_y L}{\mu V}$                              | Razão tensão de cedência/viscosa           |
| Blake      | $B = \frac{u\rho}{\mu(1-\epsilon)D}$                       | Razão inércia/viscosidade em meios porosos |
| Bond       | $Bo = \frac{\rho a L^2}{\sigma}$                           | Razão empuxo/capilaridade                  |
| Brinkman   | $Br = \frac{\mu U^2}{\kappa(T_w - T_0)}$                   | Condução de calor parede/fluido            |
| Capilar    | $Ca = \frac{\mu V}{\sigma}$                                | Razão viscosidade/capilaridade             |
| Courant    | $C = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$                           | Estabilidade numérica em CFD               |
| Darcy      | $f_D = \frac{2D\Delta P}{L\rho V^2}$                       | coeficiente de atrito em tubo rugoso       |
| Dean       | $D = \frac{\rho V d}{\mu} \left(\frac{d}{2R}\right)^{1/2}$ | Turbulência em dutos curvos                |
| Eckert     | $Ec = \frac{V^2}{c_p \Delta T}$                            | Razão energia cinética/entalpia            |
| Eötvös     | $Eo = \frac{\Delta\rho g L^2}{\sigma}$                     | Formas de bolhas e gotas                   |
| Ericksen   | $Er = \frac{\mu v L}{K}$                                   | Razão viscosidade/elasticidade             |
| Euler      | $Eu = \frac{\Delta p}{\rho V^2}$                           | Razão pressão/inércia                      |
| Froude     | $Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$                                 | Razão inércia/peso - ondas                 |
| Galilei    | $Ga = \frac{gL^3}{\nu^2}$                                  | Razão inércia/viscosidade                  |
| Hagen      | $Ha = BL\left(\frac{\sigma}{\rho\nu}\right)^{1/2}$         | Razão empuxo/viscosidade                   |
| Laplace    | $La = \frac{\sigma\rho L}{\mu^2}$                          | Razão tensão superficial/cisalhamento      |
| Lewis      | $Le = \frac{\alpha}{D} = \frac{Sc}{Pr}$                    | Razão difusividade de calor/massa          |
| Mach       | $Ma = \frac{v}{v_{som}}$                                   | Escoamentos supersônicos - ondas de choque |
| Prandtl    | $Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{c_p \mu}{k}$              | Razão entre difusão viscosa e térmica      |
| Reynolds   | $Re = \frac{\rho UL}{\mu}$                                 | Razão inércia/viscosidade                  |
| Richardson | $Ri = \frac{gh}{U^2} = \frac{1}{Fr^2}$                     | Condições de estabilidade                  |
| Schmidt    | $Sc = \frac{\nu}{D}$                                       | Razão viscosidade/difusividade de massa    |
| Stokes     | $Stk = \frac{\tau U}{d_c}$                                 | Sedimentação/suspensão de partículas       |
| Taylor     | $Ta = \frac{4\Omega^2 R^4}{\nu^2}$                         | Efeitos de rotação vs. efeitos viscosos    |
| Ursell     | $Ur = \frac{H\lambda^2}{h^3}$                              | Não linearidade de ondas em águas rasas    |

obteria com o teorema dos  $\Pi$ 's?

$$\cdot \left( \frac{\tau/\epsilon H \tau/\epsilon^6}{\epsilon} \right) f = \frac{\tau/\epsilon H^d}{\tau/\epsilon^6 d} : \text{Resposta}$$

6. Resolva o problema acima considerando o peso específico  $\gamma = \rho g$ , e  $P = f(\gamma, H, Q)$ . Comente a diferença do resultado comparado com o exemplo anterior.

$$\text{Resposta: } \frac{\gamma H^3}{P} = \text{constante}$$

7. A água (densidade  $\rho$ ) sobe uma altura  $h$  em relação à superfície (em contato com a atmosfera) em um tubo capilar de diâmetro  $D$ . Considerando que a gravidade é  $g$  e a tensão superficial entre a água e o ar é  $\sigma$ , encontre uma relação entre estas variáveis usando o teorema dos  $\Pi$ 's.

$$\cdot \left( \frac{\tau Q^6 d}{\sigma} \right) f = \frac{D}{h} : \text{Resposta}$$

8. Resolva o problema acima usando apenas  $\gamma = \rho g$  no lugar de  $\rho$  e  $g$ .

$$\cdot \left( \frac{\tau Q^3 \gamma}{\sigma} \right) f = \frac{Q}{h} : \text{Resposta}$$

9. Resolva o problema acima usando como dimensões fundamentais a massa  $M$ , a força  $F$  e o comprimento  $L$ .

$$\cdot \left( \frac{\tau Q^3 \gamma}{\sigma} \right) f = \frac{Q}{h} : \text{Resposta}$$

# Índice

- advecção, 41
- análise dimensional
  - similaridade
  - semelhança, 201
- balanço da quantidade de movimento
  - equação integral, 134, 167
- balanço de energia
  - equação integral, 143, 167
- balanço de massa
  - equação integral, 122, 167
- balanço de massa de um soluto
  - equação integral, 130, 167
- Bernoulli
  - equação de, 149
  - balanço de energia e, 153
- Boltzmann
  - constante de, 24
- calor, 26
  - transferência de, 105
- calor específico
  - a pressão constante, 28
  - a volume constante, 27
  - em gases e líquidos, 28
- campos
  - escalares, 13
  - vetoriais, 13
- capilaridade, 62, 179
- Cauchy
  - Augustin-Louis, 172
  - equação de, 172
- circulação, 90
- concentração, 41
- condição de contorno, 177
  - interface entre dois fluidos, 180
  - na superfície livre
    - cinemática, 179
    - dinâmica, 179
  - superfície livre, 179
  - superfície sólida, 177
  - tensão superficial, 179
- condutividade térmica, 108
  - unidades, 108
- condução de calor, 106, 197
- conservação
  - energia, 4, 24
  - massa, 4
  - quantidade de movimento, 4
  - quantidade de movimento angular, 4
- conservação da energia
  - coordenadas cilíndricas, 183
  - coordenadas esféricas, 185
  - equação diferencial, 173
  - equação integral, 143, 167
- conservação da massa
  - coordenadas cilíndricas, 182
  - coordenadas esféricas, 184
  - equação diferencial, 168
  - equação integral, 122, 167

- conservação da massa de um soluto
  - coordenadas cilíndricas, 182
  - coordenadas esféricas, 184
  - equação diferencial, 169
  - equação integral, 130, 167
- conservação da quantidade de movimento
  - coordenadas cilíndricas, 183
  - coordenadas esféricas, 185
  - equação de Navier Stokes, 172
  - equação diferencial, 171
  - equação integral, 134, 167
- constante universal dos gases, 31
- constitutiva
  - equação, 97
  - lei, 97
- contínuo, 1, 39
  - hipótese do, 39, 40
- coordenadas cilíndricas, 181
  - conservação
    - da energia, 183
    - da massa, 182
    - da massa de um soluto, 182
  - Navier-Stokes, 183
- coordenadas curvilíneas, 181
- coordenadas esféricas, 183
  - conservação
    - da energia, 185
    - da massa, 184
    - da massa de um soluto, 184
  - Navier-Stokes, 185
- corrente
  - linha de, 44
  - tubo de, 44
- Couette
  - escoamento de, 187
- deformação
  - de cisalhamento, 85
  - linear, 83
  - taxa de, 83
  - volumétrica, 84
- derivada material
  - em um ponto, 167
  - em um sistema, 117
- difusividade molecular, 110
  - unidades, 110
- difusividade térmica, 108
  - unidades, 108
- difusão, 41
  - pura
    - exemplo de, 190
- difusão molecular, 108
- divergente, 13
- energia, 40
  - conservação, 117
    - coordenadas cilíndricas, 183
    - coordenadas esféricas, 185
  - equação diferencial da conservação, 173
  - equação integral da conservação, 143, 167
  - específica, 41
  - interna, 23, 26, 40
    - específica, 27
  - mecânica, 174
  - total, 23
  - total de um sistema, 47
  - térmica, 174
- energia cinética, 21, 22
  - do centro de massa, 21
  - interna, 21
- energia potencial, 21
  - gravitacional, 21, 23
  - interna, 23
- entropia, 4
- equação
  - constitutiva, 97, 166
  - de Bernoulli, 149
    - e o balanço de energia, 153
  - hidrostática, 64

- equação constitutiva
  - transferência de calor, 108
  - transferência de massa, 110
  - transferência de quantidade de movimento, 101
- equação da conservação
  - em coordenadas cilíndricas, 181
  - em coordenadas curvilíneas, 181
  - em coordenadas esféricas, 183
- equação de estado, 28, 31
- equação diferencial
  - conservação da energia, 173
  - conservação da massa, 168
    - coordenadas cilíndricas, 182
  - conservação da massa de um soluto, 169
    - coordenadas cilíndricas, 182
  - conservação da quantidade de movimento, 171
  - da hidrostática, 64
  - de Navier-Stokes, 172
  - energia
    - coordenadas cilíndricas, 183
    - coordenadas esféricas, 185
  - massa
    - coordenadas esféricas, 184
  - massa de um soluto
    - coordenadas esféricas, 184
  - quantidade de movimento
    - coordenadas cilíndricas, 183
    - coordenadas esféricas, 185
- equação integral
  - conservação da energia, 143, 167
  - conservação da massa, 122, 167
  - conservação da massa de um soluto, 130, 167
  - conservação da quantidade de movimento, 134, 167
- equilíbrio, 2
- escalar, 7
- escalas moleculares, 19
- estado de um sistema, 1
- Euler
  - descrição de, 43
  - Leonhard, 43
- fenômeno físico, 1
- Fick
  - lei de, 108
- fluido
  - definição, 3
  - newtoniano, 105
  - não-newtoniano, 105
- fluxo
  - advectivo, 48
  - difusivo, 97, 166
    - calor, 107
    - massa, 109
    - quantidade de movimento, 99
  - específico
    - advectivo, 48
- fluxo de calor, 117
- força
  - de corpo, 55
  - de superfície, 55
- Forças, 55
- Fourier
  - lei de, 106
- Gauss
  - Friedrich, 168
  - teorema de, 15
- gradiente, 14
- grandezas fundamentais, 6
- Green
  - teorema de, 16
- gás ideal, 28
- hidrostática, 63
  - equação, 64
  - equação diferencial da, 64
- hipótese do contínuo, 1, 39, 40

- Integral
  - de linha, 10
  - de superfície, 11
  - de volume, 12
- interface entre dois fluidos, 180
- Lagrange
  - descrição de, 43
  - Joseph-Louis, 43
- laplaciano, 15
- lei
  - constitutiva, 97
  - da viscosidade, 99
  - de Fick, 108, 166
  - de Fourier, 106, 166
  - de Newton da viscosidade, 166
- Lennard-Jones
  - potencial de, 19
- linha de corrente, 44
- linha de vorticidade, 88
- massa, 40
  - conservação, 117
    - coordenadas cilíndricas, 182
    - coordenadas esféricas, 184
  - de soluto num sistema, 47
  - de um sistema, 47
  - equação diferencial da conservação, 168
  - equação integral da conservação, 122, 167
  - transferência de, 108
- massa de um soluto
  - conservação
    - coordenadas cilíndricas, 182
    - coordenadas esféricas, 184
  - equação diferencial da conservação, 169
  - equação integral da conservação, 130, 167
- massa específica, 40
- matéria, 2
  - abordagem macroscópica, 2
- mecânica estatística, 2
- meio contínuo, 2, 39, 41
- meio fluido, 3
- modelos matemáticos, 1
- moléculas, 2
- movimento relativo, 89
- Navier-Stokes
  - coordenadas cilíndricas, 183
  - coordenadas esféricas, 185
  - equação de, 172
- Newton
  - experimento de, 98
  - Isaac, 99
  - lei da viscosidade, 99
- placas paralelas
  - escoamento plano entre, 186
- Poiseuille
  - escoamento de, 187
- potencial
  - gravitacional, 21
- potencial de Lennard-Jones, 19
- Pressão, 55
- pressão, 61
  - dinâmica, 154
  - estática, 154
- primeira lei, 24
- primeira lei da termodinâmica, 117
- princípios de conservação
  - energia, 117
  - equações diferenciais, 165
  - equações integrais, 115
  - massa, 117
  - quantidade de movimento, 117
- princípios fundamentais da física, 4
- produto
  - escalar, 8
  - contrações, 9

- vetorial, 8
- propriedades
  - extensivas, 46
  - intensivas, 46
- quantidade de movimento, 22, 40
  - conservação, 117
  - de um sistema, 47
  - equação de Navier-Stokes, 172
  - equação diferencial da conservação, 171
  - equação integral da conservação, 134, 167
  - transferência de, 97
- Rayleigh
  - problema de, 192
- Reynolds
  - teorema do transporte de, 118
- rotacional, 14
- rotação
  - de uma partícula de fluido, 87
  - fluido em, 188
- segunda lei, 2
- sistema
  - estado de um, 1
  - propriedades físicas de um, 1
- sistema de partículas, 20
- sistema SI de unidades, 6
- sistema termodinâmico, 40
- Stokes
  - George Gabriel, 100
  - hipótese de, 100
  - primeiro problema de, 192, 218
  - segundo problema de, 194
  - teorema de, 16, 91
- série de Taylor, 16
- taxa de deformação, 83
- Taylor
  - série de, 16
- temperatura, 23, 26
- tensor, 7, 56
  - de tensões, 56
  - simetria do, 60
  - gradiente de velocidade, 90
  - taxa de deformação, 87
- tensão superficial, 62, 179
  - coeficiente de, 180
- Tensões, 55
- teorema
  - de Gauss, 15, 168
  - de Green, 16
  - de Stokes, 16, 91
  - do transporte de Reynolds, 118
  - virial, 30
- teoria cinética, 19
- termodinâmica, 19
  - primeira lei, 24, 117
  - segunda lei, 2
- trabalho, 24
- transferência
  - de calor, 105
  - de massa, 108
  - de quantidade de movimento, 97
- tubo
  - de corrente, 150
  - de fluxo, 150
- tubo de corrente, 44
- tubo de vorticidade, 88
- velocidade, 41
  - rmq, 22
- vetor, 7
- virial
  - teorema, 30
- viscosidade
  - cinemática, 99
  - dependência da temperatura, 105
  - dinâmica, 99
  - unidades, 99
- volume, 40

- de controle, 47
- de um sistema, 26, 47
- vorticidade, 87
  - linha de, 88
  - tubos de, 88