TEA014 - Mecânica dos Fluidos Ambiental II
Curso de Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 07 Novembro 2025
Prof. Michael Mannich

P03

NOME: GABARITO

Assinatura: ______________________

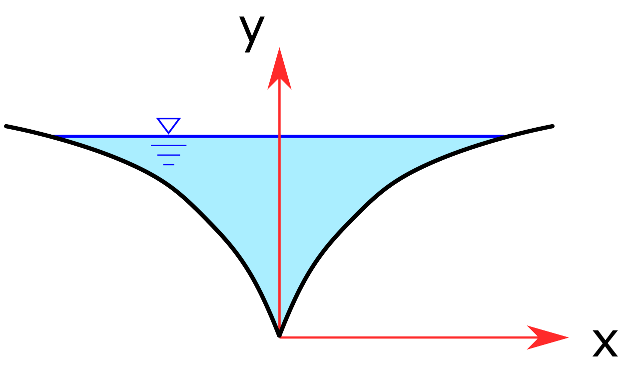
---

1 [30] Considere um canal com calha de seção descrita pela expressão $y = \frac{1}{2}x^{1/2}$.

a) [15] Determine as relações para $A(y)$, $P(y)$ e $B(y)$.

b) [10] Determine a vazão do canal com declividade do fundo de $S_0 = 0.001\,\text{m/m}$, na condição em que a profundidade uniforme da água é de $0.5\,\text{m}$. Considere o revestimento com material que oferece um coeficiente de Manning de $n = 0.0144\,\text{sm}^{-1/3}$.

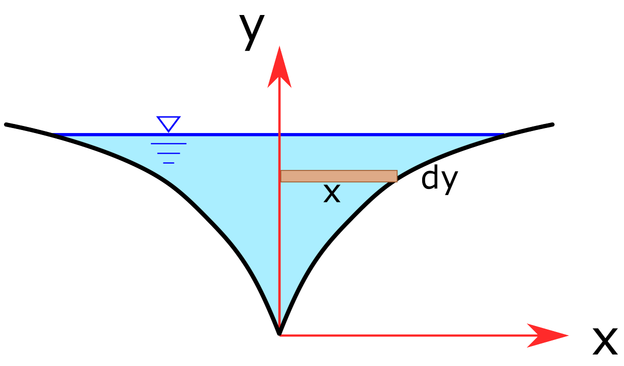
c) [5] Para as mesmas condições de b) determine Fr.



Use a integral abaixo para evitar todo o processo de substituição e cálculo de uma integral mais elaborado uma vez que nosso objetivo no exame não é o desenvolvimento matemático por si só:

$$\int \sqrt{1 + \frac{a}{x}}\,dx = \sqrt{x(x+a)} + a\ln\left|\sqrt{x} + \sqrt{x+a}\right| + C$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Precisamos determinar a área da seção molhada, o perímetro molhado e o raio hidráulico.



Continue a solução no verso ⟹

$$A = 2\int_0^y x dy = 2\int_0^y 4y^2 dy = \frac{8}{3}y^3 = 0.05962848\,\mathrm{m}^2$$

$$P = 2\int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = 2\int_0^x \sqrt{1+\frac{1}{16x}}dx = 2\int_0^x \frac{1}{4}\sqrt{16x+1}dx$$

$$\text{reconhecemos } a = \frac{1}{16} \text{ ento}$$

$$P = 2\left[\sqrt{x\left(x+\frac{1}{16}\right)} + \frac{1}{16}\ln\left|\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{16}}\right|\right]\Bigg|_0^x$$

$$\text{Como } x = 4y^2 = 1\,\mathrm{m}$$

$$P = 2\left[\sqrt{x\left(x+\frac{1}{16}\right)} + \frac{1}{16}\ln\left|\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{16}}\right| - \frac{1}{16}\ln\left|\sqrt{\frac{1}{16}}\right|\right]$$

$$P = 2\left[\sqrt{x\left(x+\frac{1}{16}\right)} + \frac{1}{16}\ln\left|4\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{16}}\right)\right|\right]$$

$$P = 2.323391881\,\mathrm{m}$$

$$R_h = \frac{A}{P} = 0.143468408\,\mathrm{m}$$

$$B = 2x = 2(2y)^2 = 8y^2 = 2.0\,\mathrm{m}$$

Aplicando a Equação de Manning com $S_0 = 0.001\,\mathrm{m/m}$ temos:

$$Q = \frac{1}{n}AR^{2/3}S_0^{1/2} = 0.200\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

E o número de Froude:

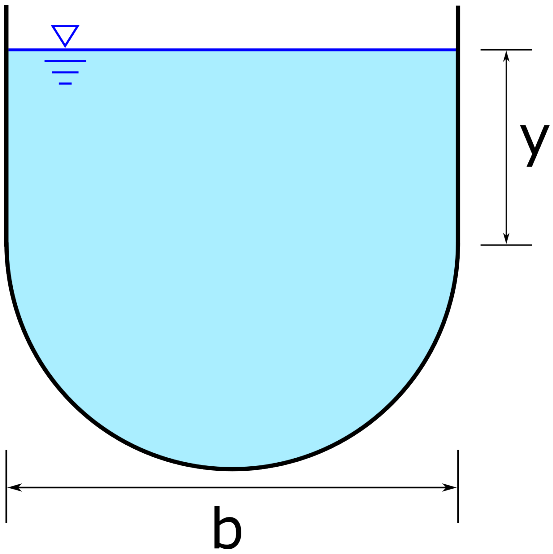
$$Fr^2 = \frac{Q^2B}{gA^3}$$

$$Fr = \sqrt{\frac{Q^2B}{gA^3}} = 0.4707$$

Portanto, o escoamento é subcrítico.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [35] Um escoamento de água ocorre em um canal com seção transversal apresentada na figura. Se a vazão é $Q = 5\,\mathrm{m^3/s}$, determine a profundidade normal (y_n) do escoamento para o canal com coeficiente de Manning de $n = 0.013\,\mathrm{sm^{-1/3}}$, largura $b = 2\,\mathrm{m}$, e a declividade longitudinal do canal $S_0 = 0.001\,\mathrm{m/m}$. Considere que a profundidade normal será maior do que $\frac{b}{2}$.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Apresentamos as equações para área e perímetro, substituímos na Equação de Manning e a reescrevemos de forma a construir um processo iterativo para determinar a solução por aproximações sucessivas.

$$A = yb + \frac{\pi b^2}{8} = yb\left(1 + \frac{\pi b}{8y}\right)$$

$$P = 2y + \frac{\pi b}{2}$$

$$Q = \frac{1}{n} A Rh^{2/3} S_0^{1/2} = \frac{1}{n}\frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} S_0^{1/2} \rightarrow \frac{Qn}{S_0^{1/2}} P^{2/3} = A^{5/3} \rightarrow \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5} P^{2/5} = A$$

$$y = \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5} \frac{b\left(2y + \frac{\pi b}{2}\right)^{2/5}}{b\left(1 + \frac{\pi b}{8y}\right)}$$

$$y_{i+1} = \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5} \frac{\left(2y_i + \frac{\pi b}{2}\right)^{2/5}}{b\left(1 + \frac{\pi b}{8y_i}\right)}$$

Outra forma seria construir a equação para solução pelo método de Newton-Raphson. Talvez a forma mais conveniente para a derivada seria conforme:

Continue a solução no verso ⟹

$$Q = \frac{1}{n} A Rh^{2/3} S_0^{1/2} = \frac{1}{n} \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} S_0^{1/2} \longrightarrow \frac{Qn}{S_0^{1/2}} P^{2/3} = A^{5/3} \longrightarrow \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5} P^{2/5} = A$$

$$f(y) = A - \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5} P^{2/5}$$

$$f(y) = by + \frac{\pi b^2}{8} - \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5} \left(2y + \frac{\pi b}{2}\right)^{2/5}$$

$$f'(y) = b - \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}}\right)^{3/5} 2 \times \frac{2}{5} \left(2y + \frac{\pi b}{2}\right)^{-3/5}$$

$$y_{i+1} = y_i - \frac{f(y_i)}{f'(y_i)}$$

Basta arbitrar um valor inicial para y e seguir o processo iterativo para obter como solução final $y = 0.60087$ m e a profundidade total do escoamento é $h = y + \frac{b}{2} = 1.60087$ m.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [35] Um trecho de rio é aproximado por um um canal retangular com $b_1 = 5.0\,\text{m}$ de largura. Em um certo ponto, os dois pilares de uma ponte simples causam um estreitamento para uma largura de $b_2 = 3.0\,\text{m}$.

a) [25] Quando a vazão do rio é $Q = 11.0\,\text{m}^3/\text{s}$ a seção contraída do canal causada pela ponte produz uma transição de escoamento subcrítico ($y > y_c$ para supercrítico ($y < y_c$), ou seja, há profundidade crítica (y_c) na seção contraída. Determine a profundidade do escoamento à montante da ponte.

b) [10] Apresente em um gráfico de E versus y para cada vazão específica q os valores das seções 1 e 2 do item a.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$q_2 = \frac{Q}{b_2} = \frac{11}{3} = 3.666667\,\text{m}^3/\text{sm}$$

$$y_2 = y_{c,2} = \left(\frac{q_2^2}{g}\right)^{1/3} = 1.110771\,\text{m}$$

$$Fr_2 = \frac{q}{\sqrt{gy_2^3}} = 1.0$$

$$E_2 = E_c = \frac{3}{2}y_c = 1.666157\,\text{m}$$

ou calculando,

$$E_2 = y_2 + \frac{q_2^2}{2gy_2^2} = 1.11 + \frac{3.667^2}{2 \times 9.81 \times 1.11^2} = 1.666157\,\text{m}$$

$$E_1 = E_2 = 1.666157\,\text{m}$$

Agora precisamos determinar y_1 a partir de E_1 sabendo que o escoamento de jusante é fluvial e que a profundidade y_1 vai aumentar com $q_1 < q_2$ ($q_1 = \frac{Q}{b_1} = \frac{11}{5}$) $= 2.2\,\text{m}^3/\text{sm}$. Determinamos y_1 a partir da equação da energia específica:

$$E_1 = y_1 + \frac{q_1^2}{2gy_1^2} \rightarrow y_1^3 - E_1 y_1^2 + \frac{q_1^2}{2g} = 0$$

Considerando uma solução iterativa pelo método de Newton-Raphson, por exemplo, tomando uma aproximação inicial (por exemplo $y_i = 2.0$) com valor superior ao da profundidade crítica na seção 1 $y_{C,1} = \left(\frac{q_1^2}{g}\right)^{1/3} = 0.790179\,\text{m}$, uma vez que sabemos que o escoamento ainda será fluvial.

$$f = y_1^3 - E_1 y_1^2 + \frac{q_1^2}{2g}$$

$$f\prime = 3y_1^2 - 2E_1 y_1$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f}{f\prime} = y_i + \frac{y_i^3 - E_1 y_i^2 + q_1^2/2g}{3y_i^2 - 2E_1 y_i}$$

Continue a solução no verso ⟹

Tabela 1: **Iterações para determinação da profundidade** y_1

i	y_i
1	2.000000
2	1.703477
3	1.586281
4	1.566087
5	1.565501
6	1.565501
7	1.565501
8	1.565501
9	1.565501
10	1.565501

A solução é $y_1 = 1.566\,\text{m}$.

Alternativamente poderíamos resolver a equação cúbica de forma analítica:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Calculamos

$$\begin{aligned} p &= b - \frac{a^2}{3} = -0.925360 \\ q &= \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = -0.095934 \\ \Delta &= \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -0.027046 \end{aligned}$$

Se $\Delta < 0$ temos as soluções:

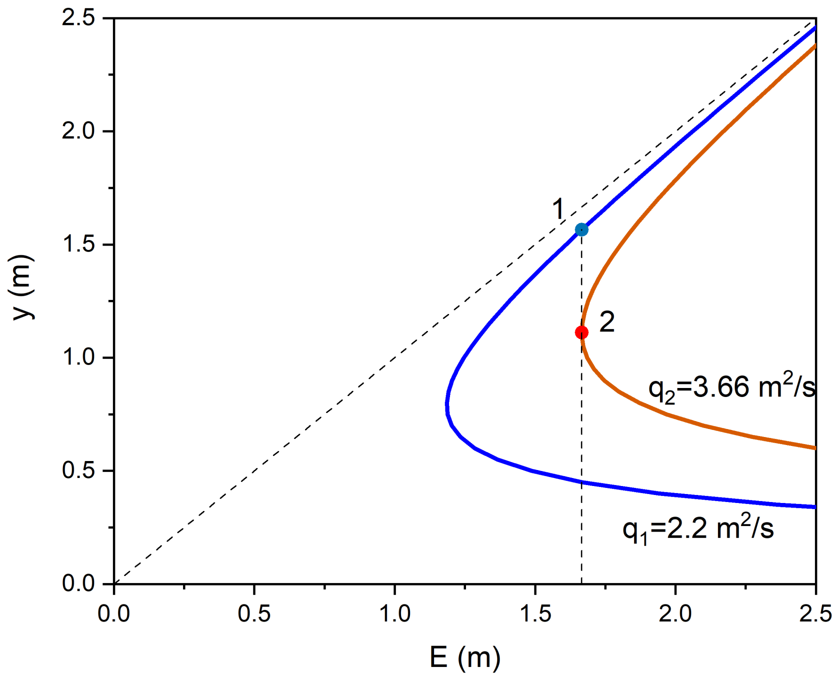
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-p}\sin\left[\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}q}{2(-p)^{3/2}}\right)\right] - \frac{a}{3} \\ x_2 &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-p}\sin\left[\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}q}{2(-p)^{3/2}}\right) + \frac{\pi}{3}\right] - \frac{a}{3} \\ x_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-p}\cos\left[\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}q}{2(-p)^{3/2}}\right) + \frac{\pi}{6}\right] - \frac{a}{3} \end{aligned}$$

As raízes são então:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.450465 \longrightarrow \text{torrencial} \\ x_2 &= -0.349809 \longrightarrow \text{fisicamente inviável} \\ x_3 &= 1.565501 \longrightarrow \text{fluvial} \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

b)



Continue a solução no verso ⟹