Prof. Maurício Gobbi - Aluno: ____________________

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\boldsymbol{\nabla}p+\rho\mathbf{g}+\mu\nabla^2\mathbf{v};\ \frac{D\rho}{Dt}+\rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}=0;\ \frac{DC_A}{Dt}=D_{AB}\nabla^2C_A;\ \frac{DT}{Dt}=\alpha\nabla^2T;\ \frac{D}{Dt}\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right);\ \boldsymbol{\nabla}\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\frac{dp}{dz}=\rho g;\quad \rho v^2/2+p+\rho gz=\text{c};\quad \text{Fluxo de } N:\ \dot{N}=\int_S \eta\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_c}\rho dV+\oiint_{S_c}\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS=0\quad \frac{d}{dt}\iiint_{V_c}\mathbf{v}\rho dV+\oiint_{S_c}\rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dS=\mathbf{F_s}+\mathbf{F_c};\quad \frac{d}{dt}\iiint_{V_c}C_A\rho dV+\oiint_{S_c}\rho C_A(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dS=\dot{J};$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_c}\left(u+v^2/2+gz\right)\rho dV+\oiint_{S_c}\rho\left(p/\rho+u+v^2/2+gz\right)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dS=\dot{Q}+\dot{W};\quad \Delta u=c_v\Delta T$$

$$\text{Vorticidade, circulação, deformações: } \boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v},\quad \Gamma=\oint_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r},\quad \frac{\partial v_x}{\partial x},\ \frac{\partial v_y}{\partial y},\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

---

1 [50] Considere o campo de velocidades abaixo:

$$v_x=\frac{10x}{x^2+y^2};\quad v_y=\frac{10y}{x^2+y^2};\quad v_z=0.$$

(a) [25] Prove que esse é um campo possível para um escoamento incompressível. (b) [25] Determine uma expressão para o VETOR gradiente de pressão $\boldsymbol{\nabla}p$. Considere que a direção gravidade está na direção z e que a viscosidade do fluido é muito pequena (fluido ideal). Você deve partir das equações fundamentais completas e justificar todas as hipóteses e possíveis aproximações.

a) $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{(x^2+y^2)10-10x(2x)}{(x^2+y^2)^2}+\frac{(x^2+y^2)10-10y(2y)}{(x^2+y^2)^2}=0$$

b) $$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\therefore \frac{\partial p}{\partial x}=-\rho\frac{10x}{x^2+y^2}\frac{10y^2-10x^2}{(x^2+y^2)^2}-\rho\frac{10y}{x^2+y^2}\frac{-20xy}{(x^2+y^2)^2}=\rho\frac{100(x^2+y^2)y}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\rho u\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\therefore \frac{\partial p}{\partial y}=-\rho\frac{10x}{x^2+y^2}\frac{-20xy}{(x^2+y^2)^2}-\rho\frac{10y}{x^2+y^2}\frac{10x^2-10y^2}{(x^2+y^2)^2}=\rho\frac{100(x^2+y^2)y}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\therefore \nabla p=\frac{\partial p}{\partial x}\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial p}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}=\frac{100x\rho}{(x^2+y^2)^2}\hat{\mathbf{i}}+\frac{100y\rho}{(x^2+y^2)^2}\hat{\mathbf{j}}=\frac{100\rho}{(x^2+y^2)^2}\ (x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}})$$

2 [50] Ao resolvermos o problema de Couette tínhamos o escoamento na direção x entre 2 placas espaçadas de h, com 2 forçantes possíveis: placa superior com velocidade V, e gradiente de pressão horizontal $\boldsymbol{\nabla} p = (p_x, 0, 0)$. Assim, resolvemos a velocidade horizontal como função da posição (y) da geometria (h), dos foçantes p_x e ou V e viscosidade do fluido (μ). Se não tivéssemos como resolver a equação, o máximo que poderíamos fazer seria dizer que $v = f(y, \mu, p_x, V, h)$. Seu trabalho é tentar simplificar o problema para uma relação envolvendo apenas variáveis adimensionais. Porém, você deverá fazer 3 casos diferentes. (a) [20] Placa parada (retirar V); (b) [10] placa em movimento, sem gradiente de pressão (retirar p_x); (c) [20] caso geral com V e p_x

a) $\Pi_1 = \dfrac{m\, v}{p_x h^2}$ $\Pi_2 = y/h$

b) $\Pi_1 = v/V$ $\Pi_2 = y/h$

c) $\Pi_1 = \dfrac{\mu\, v}{p_x h^2}$ $\Pi_2 = y/h$ $\Pi_3 = v/V$