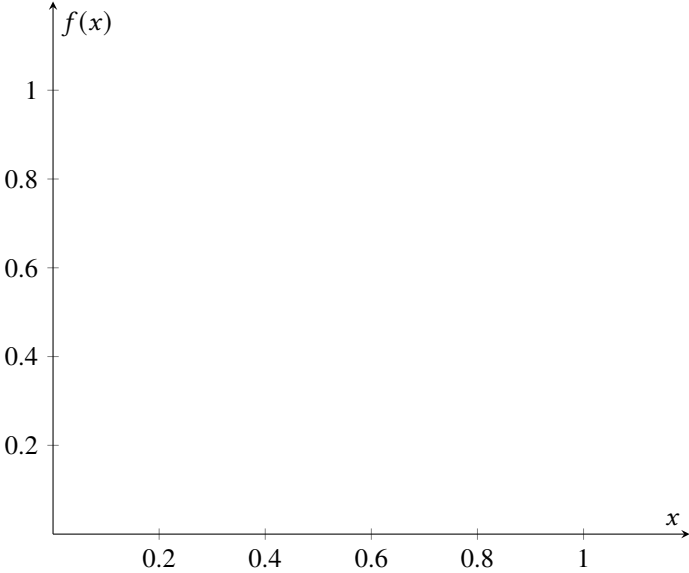


Assinatura: \_\_\_\_\_

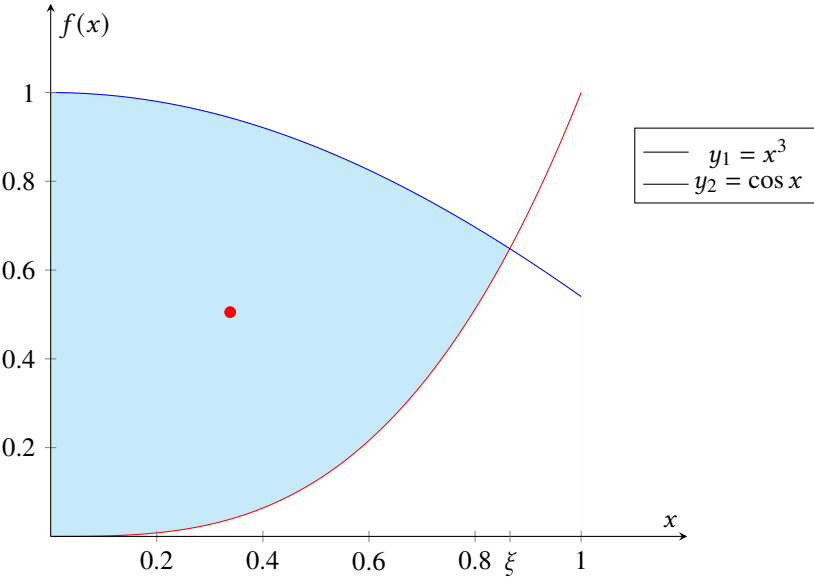
**1** [35] Considere a região delimitada pelas funções  $y_1 = x^3$  e  $y_2 = \cos x$  no intervalo  $0 \leq x \leq \xi$ , onde  $\xi = 0.865474$ . Esboce a região formada e determine a coordenada  $\bar{y}$  do centroide da região.



$$A\bar{x} = \int x dA$$

$$A\bar{y} = \int y dA$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:



Continue a solução no verso  $\implies$

Selecionamos um elemento diferencial de comprimento  $(y_2 - y_1)$  e altura  $dx$ , o centroide é calculado em torno desse retângulo e depois utilizado para toda a área através da integração. Dessa forma, o elemento infinitesimal de área e a área total são iguais a

$$A = \iint_A dydx = \int_0^\xi \left[ \int_{x^3}^{\cos x} dy \right] dx = \int_0^\xi \cos x dx - \int_0^\xi x^3 dx$$

$$A = \left[ \sin x - \frac{x^4}{4} \right]_0^\xi$$

$$A = \sin \xi - \frac{\xi^4}{4} = 0.621135 \text{ ua}$$

A coordenada  $x$  do centroide do elemento retangular é  $x_c = x$ , que é simplesmente a coordenada. A coordenada  $x$  do centroide da área completa é dada por

$$A\bar{x} = \int x_c dA = \int x(y_2 - y_1) dx = \int_0^\xi x [\cos x - x^3] dx = \int_0^\xi x \cos x dx - \int_0^\xi x^4 dx$$

$$= x \sin x \Big|_0^\xi - \int_0^\xi \sin x dx - \int_0^\xi x^4 dx$$

$$= \xi \sin \xi + \left[ \cos x - \frac{x^5}{5} \right]_0^\xi$$

$$= \xi \sin \xi + \cos \xi - 1 - \frac{\xi^5}{5} = 0.210135 \text{ uv}$$

$$\bar{x} = \frac{0.210135}{0.621135} = 0.338308 \text{ uc}$$

A coordenada  $y$  do centroide do elemento retangular é igual a distância  $y$  entre o eixo  $x$  e o ponto do centroide do elemento. A coordenada  $y$  do centroide da área completa é dada por

$$A\bar{y} = \int y_c dA = \int \left( \frac{y_2 + y_1}{2} \right) \cdot (y_2 - y_1) dx = \int_0^\xi \frac{1}{2} (\cos^2 x - x^6) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left( \int_0^\xi \underbrace{\cos^2 x}_{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx - \int_0^\xi x^6 dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \int_0^\xi \frac{1 + \cos 2x}{2} dx - \int_0^\xi x^6 dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} - \frac{x^7}{7} \right]_0^\xi$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\xi}{2} + \frac{\sin 2\xi}{4} - \frac{\xi^7}{7} \right] = 0.313788 \text{ uv}$$

$$\bar{y} = \frac{0.313788}{0.621135} = 0.505185 \text{ uc}$$

A definição da interseção entre as funções  $y_1 = x^3$  e  $y_2 = \cos x$  é obtida igualando as funções na forma  $\cos x = x^3$ . Reescrevemos a equação na forma  $f(x) = \cos x - x^3$  e queremos determinar as raízes desta equação. Esta é uma equação transcendental e podemos resolver ela pelo método da secante fazendo:

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \frac{(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

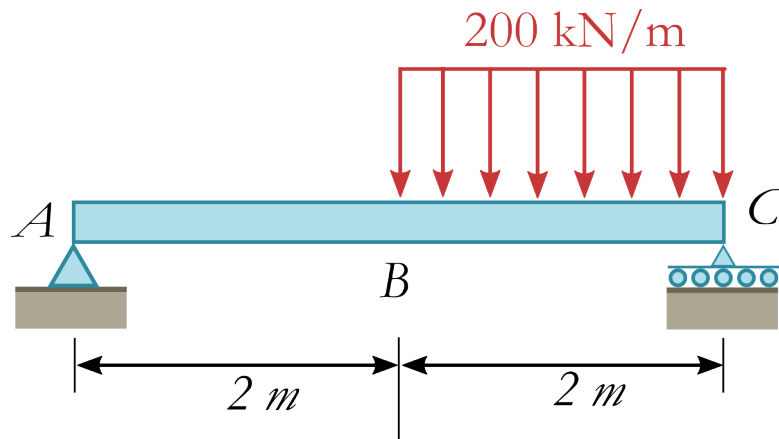
Devemos escolher aproximações iniciais  $x_0$  e  $x_1$  de tal modo que  $f(x_0)f(x_1) < 0$ . Escolhemos  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 1$  e a solução sequencial é apresentada na tabela:

Continue a solução no verso  $\implies$

$i$	$x_i$	$f(x_i)$
0	0.000000	1.000000
1	1.000000	-0.459698
2	0.685073	0.452850
3	0.841355	0.070876
4	0.870353	-0.014750
5	0.865358	0.000348
6	0.865473	0.000002
7	0.865474	0.000000
8	0.865474	0.000000

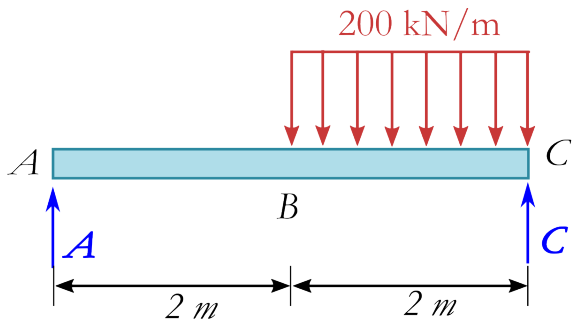
Continue a solução no verso  $\implies$

2 [30] Determine os diagramas de esforço cortante e momento fletor da viga ilustrada. Esboce os gráficos de esforço cortante e momento fletor indicando os valores máximos e/ou mínimos das funções no gráfico e os valores nas extremidades da viga. Certifique-se de que estará representando a característica real do gráfico.



---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:



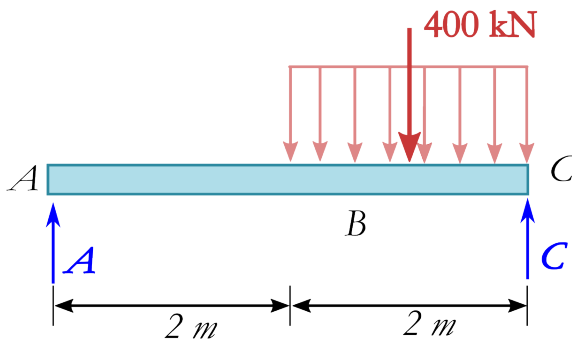
Para a viga toda:

$$\sum M_A = -400 \cdot (3) + C(4) = 0$$

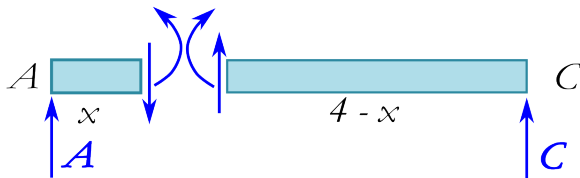
$$\rightarrow C = 300 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = A + C - 2 \cdot 200 = 0$$

$$\rightarrow A = 100 \text{ kN}$$



Para a seção  $0 < x < 2$  vou analisar trecho da esquerda. Note que  $\omega(x) = \omega_0 = 200$ :

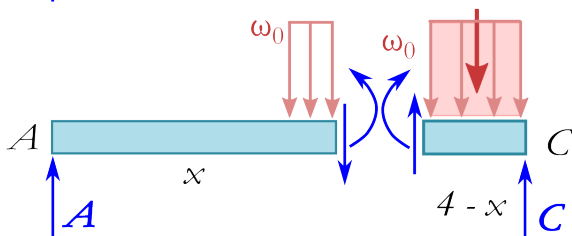
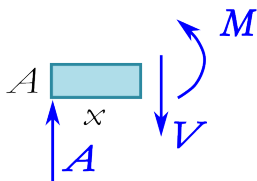


$$\sum F_y = -V + A = 0$$

$$\rightarrow V = 100 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = +M - Vx = 0$$

$$\rightarrow M = 100x \text{ kNm}$$



Para a seção  $2 < x < 4$  vou analisar trecho da direita (parece mais fácil):

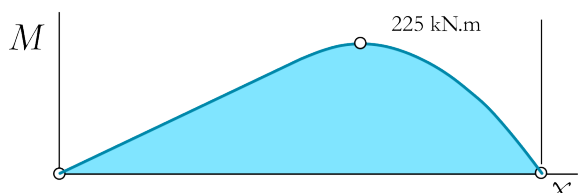
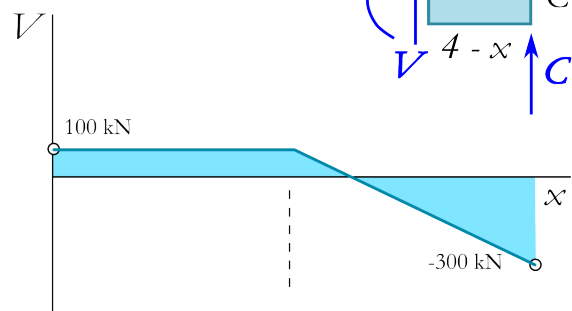
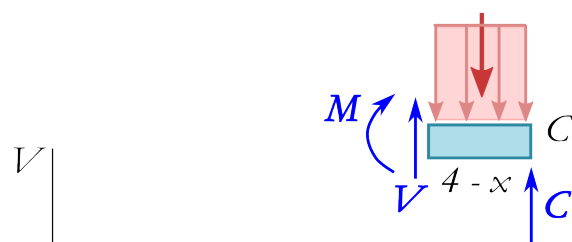
$$\sum F_y = V + C - \omega_0(4 - x) = 0$$

$$\rightarrow V = -200x + 500 \text{ kN}$$

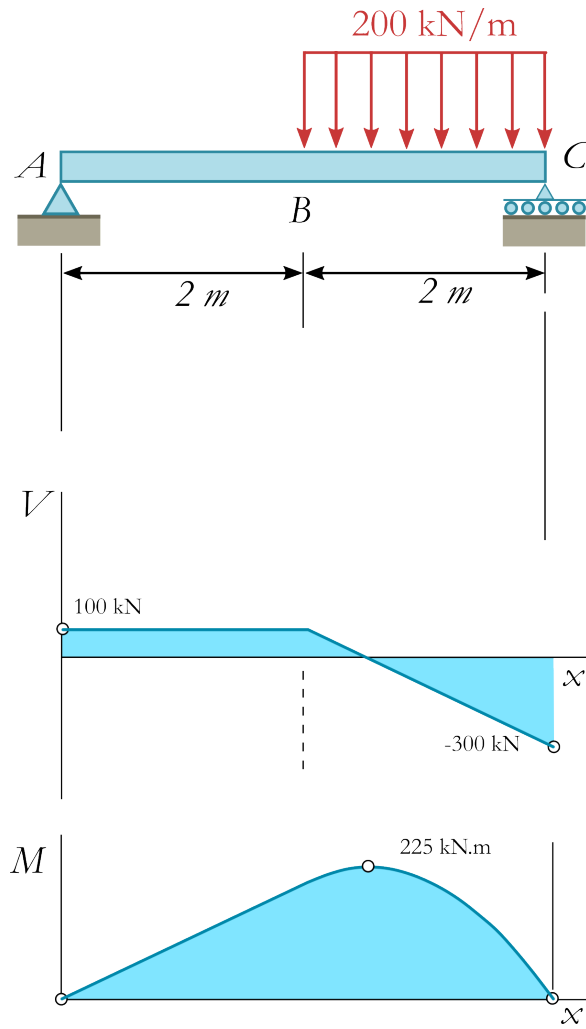
$$\sum M_{4-x} = -M + C(4 - x) - \omega_0(4 - x) \frac{4 - x}{2} = 0$$

$$\rightarrow M = 100(4 - x)(3 - (4 - x)) = 0$$

$$\rightarrow M = -100x^2 + 500x - 400 \text{ kNm}$$

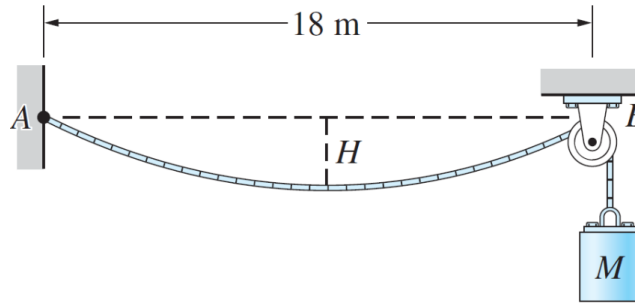


Continue a solução no verso  $\Rightarrow$



Continue a solução no verso  $\Rightarrow$

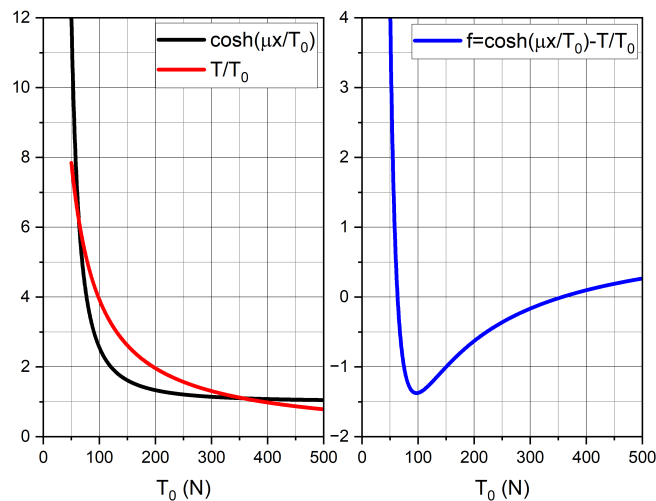
3 [35] Um cabo massa de 1.8 kg/m é conectado fixamente em A e passa uma polia lisa em B. Se a massa  $M = 40 \text{ kg}$  é conectada à extremidade livre do cabo, determine os dois valores de  $H$  para os quais o cabo estará em equilíbrio.



Esse problema é tratado como um do cabo catenário. Inspecionando as equações reconhecemos que a equação que devemos resolver é:

$$T = T_0 \cosh \frac{\mu x}{T_0}$$

em que conhecemos  $T$  na extremidade em B como a massa do bloco. Monte o problema para determinar os 2 valores de  $T_0$  e posteriormente calcular  $H$ . Como informações de apoio temos as curvas (com  $x = 9$  e  $T = T_{max}$ ):



#### SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Esse problema é tratado como o do cabo catenário com a origem na fixação com a parede. Inspecionando as equações reconhecemos que devemos tratar com a segunda delas.

$$y = \frac{T_0}{\mu} \left( \cosh \frac{\mu x}{T_0} - 1 \right)$$

$$T = T_0 \cosh \frac{\mu x}{T_0}$$

$$s = \frac{T_0}{\mu} \sinh \frac{\mu x}{T_0}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu s}{T_0}$$

$$T = T_0 + \mu y$$

$$T^2 = T_0^2 + (\mu s)^2$$

Nossos dados são  $T = T_{max} = Mg = 392.4 \text{ N}$ ,  $\mu = 18 \times 9.81 = 17.658 \text{ N/m}$ . Podemos lidar com as seguintes equações e resolver o sistema:

Continue a solução no verso  $\implies$

$T_0$  é a nossa incógnita.

Agora podemos inspecionar os gráficos das funções para extrair duas soluções visuais aproximadas como  $T_0 \approx 60$  N e  $T_0 \approx 350$  N. Desta forma podemos calcular os valores de  $H$  correspondentes com a equação  $T = T_0 + \mu y$  que substituindo para  $H$  temos  $H = y = \frac{T - T_0}{\mu}$ . Assim:

Com  $T_0 \approx 60$  N e  $H = 18.82$  m.

Com  $T_0 \approx 360$  N e  $H = 1.83$  m.

Poderíamos resolver de forma mais precisa (não solicitado na prova). Com esta aproximação inicial partimos para as iterações pelo método de Newton-Raphson para cada aproximação.

Podemos inspecionar os gráficos das funções para extrair duas soluções visuais aproximadas. Pelo gráfico da direita a solução aproximada é  $T_0 \approx 60$  N e  $T_0 \approx 360$  N.

$$T = T_0 \cosh \frac{\mu x}{T_0}$$

Para encontrar  $T_0$ , a equação pode ser solucionada iterativamente pelo método numérico de Newton-Raphson:

$$f(T_0) = \cosh \frac{\mu x}{T_0} - \frac{T}{T_0}$$

Fazendo  $\xi = \frac{1}{T_0}$ :

$$f(\xi) = \cosh \mu x \xi - T \xi = 0$$

$$f'(\xi) = \mu x \sinh \mu x \xi - T$$

$$\text{Newton-Raphson: } \xi_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)}$$

i	$\xi_n$	$f(\xi)$	$f'(\xi)$
1	0.016667	0.563197	725.212
2	0.015890	0.051962	594.059
3	0.015803	0.000605	580.265
4	0.015802	8.503673E-08	580.101
5	0.015802	0.000000	580.101
6	0.015802	0.000000	580.101
7	0.015802	0.000000	580.101
8	0.015802	0.000000	580.101
9	0.015802	0.000000	580.101
10	0.015802	0.000000	580.101

i	$\xi_n$	$f(\xi)$	$f'(\xi)$
1	0.002857	-0.016273	-317.734
2	0.002806	0.000037	-319.161
3	0.002806	1.824110E-10	-319.158
4	0.002806	0.000000	-319.158
5	0.002806	0.000000	-319.158
6	0.002806	0.000000	-319.158
7	0.002806	0.000000	-319.158
8	0.002806	0.000000	-319.158
9	0.002806	0.000000	-319.158
10	0.002806	0.000000	-319.158

Para cada uma das soluções temos um valor de  $T_0$  e podemos calcular  $H$  com alguma das fórmulas que temos. A mais simples é  $T = T_0 + \mu y$  que isolamos para determinar  $H = y = \frac{T - T_0}{\mu}$ .

Com  $\xi = 0.015802$  temos  $T_0 = 62.284895$  N e  $H = 18.638$  m.

Com  $\xi = 0.002806$  temos  $T_0 = 356.373886$  N e  $H = 2.040$  m.