

1 [30] Calcule a transformada de Laplace da função

$$f(t) = H(t - 5) - H(t - 1)$$

Onde $H(t)$ é a função de Heviside. Lembre-se que:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

SOLUÇÃO:

$$\begin{aligned} \text{Laplace na } f: \quad \bar{f}(s) &= \int_0^{\infty} H(t-5)e^{-st} dt - \int_0^{\infty} H(t-1)e^{-st} dt \\ &= \int_5^{\infty} e^{-st} dt - \left[\int_1^5 e^{-st} dt + \int_5^{\infty} e^{-st} dt \right] = -\frac{e^{-st}}{-s} \Big|_5^{\infty} \\ &= \frac{-e^{-s} + e^{-5s}}{s} // \end{aligned}$$

2 [40] Encontre $x(t)$ ($t \geq 0$) usando transformada de Laplace em: $x'' + 2x' = \delta(t)$. $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$.
 Lembre-se que:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\bar{f}(s) - sf'(0) - f(0). \quad \mathcal{L}\{f'(t)\} = s\bar{f}(s) - f(0).$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}. \quad \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\bar{g}(s)\} = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

SOLUÇÃO:

$$s^2\bar{x} - \cancel{x'(0)} - \cancel{s x(0)} + 2s\bar{x} - \cancel{x(0)} = 1$$

$$\bar{x} = 3 \frac{1}{s^2+2s} = 3 \frac{1}{s} \frac{1}{s+2}$$

$$x = \mathcal{L}^{-1}\left\{3 \frac{1}{s} \frac{1}{s+2}\right\} = 3 \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}}_1 * \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}}_{e^{-2t}} = 3 \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = \frac{3}{2}(1 - e^{-2t})$$

3 [30] Considere a sequência de funções $\phi_n(x)$ abaixo, onde $n = 1, 2, \dots, \infty$. Mostre que $\phi_n(x)$ é uma sequência delta, ou seja, que quando $n \rightarrow \infty$, $\phi_n(x) \rightarrow \delta(x)$ de Dirac.

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2n^2x, & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0, & x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$|y = nx|$$

SOLUÇÃO:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} 2n^2 \frac{y}{n} \frac{dy}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[y^2 \right]_0^1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [1^2 - 0] = 1$$

\Rightarrow

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x) f(x) dx \stackrel{!}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n\left(\frac{y}{n}\right) f\left(\frac{y}{n}\right) d\left(\frac{y}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 2n^2 \frac{y}{n} f\left(\frac{y}{n}\right) \frac{dy}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 2 f\left(\frac{y}{n}\right) y dy = 2 \int_0^1 f(0) y dy$$

$$= 2 f(0) \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^1 = f(0) (1^2 - 0) = f(0) \quad \checkmark \quad \underline{OK}$$