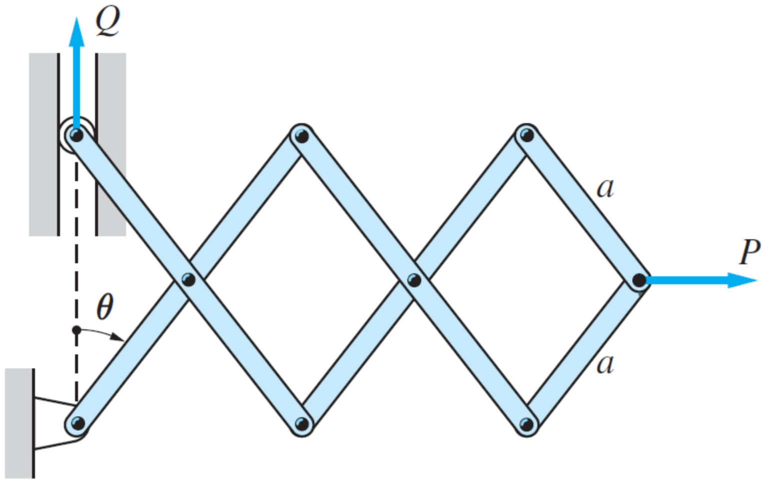
TEA005 - Mecânica dos Sólidos I
Curso de Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P05, 25 Junho 2026
Prof. Michael Mannich

P05

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

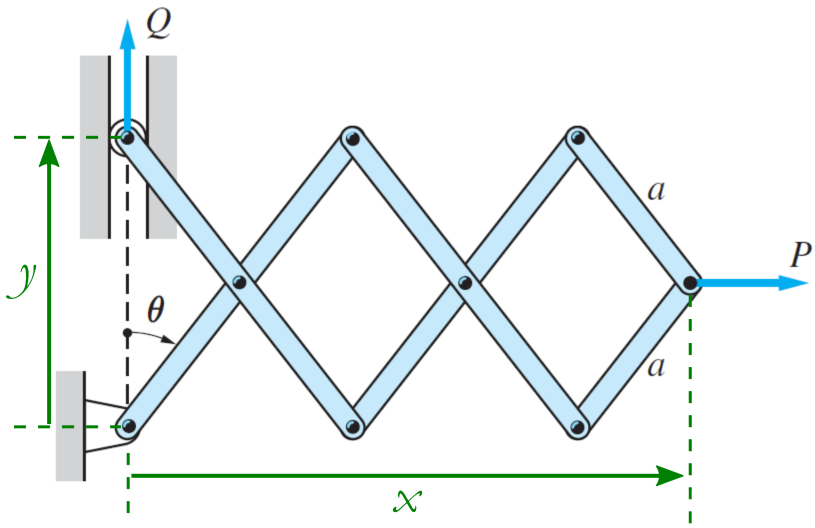
---

1 [40] Determine a razão entre as forças P/Q necessárias para manter o mecanismo em equilíbrio para um ângulo θ arbitrário. Despreze o peso do mecanismo.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹



Verificamos os 2 deslocamentos virtuais.

$$[\delta U = 0] \therefore Q\delta y + P\delta x = 0$$

Para x e y, considerando a o comprimento das barras menores e $2a$ o comprimento das barras grandes:

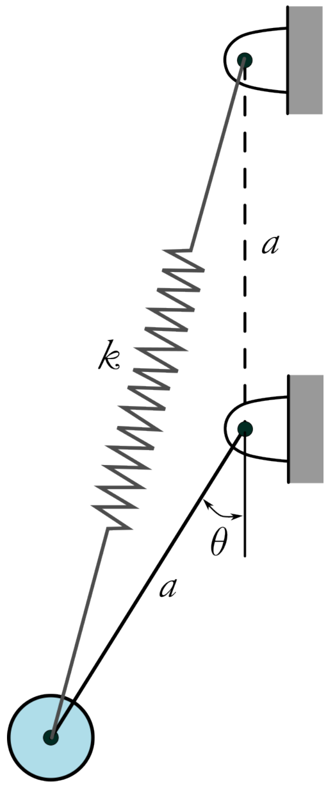
$$\begin{aligned} x &= 5a \operatorname{sen}\theta \\ \delta x &= 5a\cos\theta\delta\theta \\ y &= 2a\cos\theta \\ \delta y &= -2a\operatorname{sen}\theta\delta\theta \end{aligned}$$

Voltando ao $[\delta U = 0]$:

$$\begin{aligned} \delta U &= Q\delta y + P\delta x = 0 \\ \delta U &= Q\left(-2a\operatorname{sen}\theta\delta\theta\right) + P5a\cos\theta\delta\theta = 0 \\ \delta U &= \left[-Q2a\operatorname{sen}\theta + P5a\cos\theta\right]\delta\theta = 0 \\ -Q2a&\operatorname{sen}\theta + P5a\cos\theta = 0 \\ \frac{P}{Q} &= \frac{2}{5}\tan\theta \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

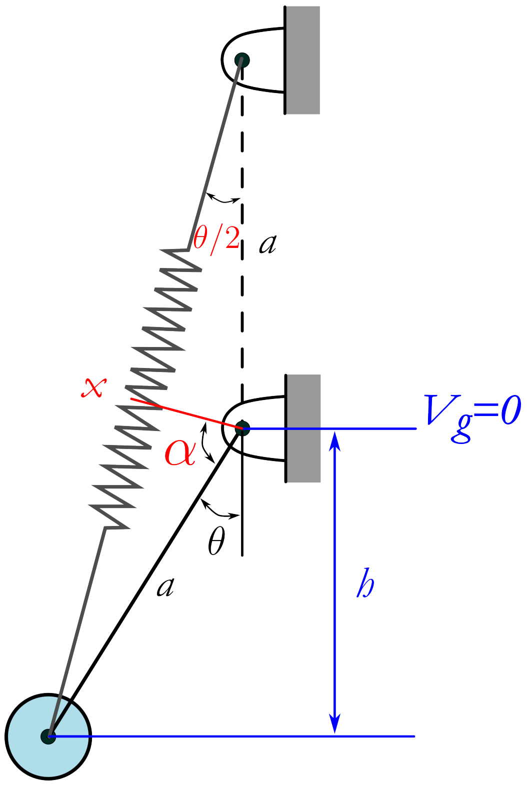
2 [60] Determine o menor valor de $\frac{mg}{ka}$ para o qual o pêndulo estará em equilíbrio estável na posição $\theta = 0$. Mostre que $\theta = 0$ é uma posição de equilíbrio. A massa na extremidade possui massa m, a mola possui constante da mola k e se encontra indeformada quando $\theta = 90°$.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

A figura a seguir representa o diagrama de forças ativas do sistema.



O deslocamento da mola é representado po x na figura. Importante notar que $\theta + 2\alpha = 180°$, logo $\alpha = 90° - \frac{\theta}{2}$. Assim podemos determinar o deslocamento da mola x como:

$$\frac{x}{2} = a \operatorname{sen} \alpha = a \operatorname{sen}\left(90° - \frac{\theta}{2}\right) = a \cos\frac{\theta}{2}$$
$$x = 2a\cos\frac{\theta}{2}$$
$$x_0 = a\sqrt{2}$$

Outra forma de é reconhecer que o ângulo no pino superior é $\frac{\theta}{2}$ e obter $x = 2a\cos\frac{\theta}{2}$ diretamente com um triângulo retângulo. Assim podemos escrever a energia potencial elástica da mola como:

$$\left[V_e = \frac{1}{2}k\,(x - x_0)^2\right] \therefore V_e = \frac{1}{2}k\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - a\sqrt{2}\right)^2$$

Tomando o ponto de apoio do pêndulo como a referência para a energia potencial gravitacional, temos que $h = -b\cos\theta$, então:

$$[V_g = mgh] \therefore V_g = mgh = -mga\cos\theta$$

A energia potencial total é então:

$$V = V_g + V_e = -mga\cos\theta + \frac{1}{2}k\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - a\sqrt{2}\right)^2$$

Logo, o equilíbrio ocorre para $dV/d\theta = 0$, de forma que:

Continue a solução no verso ⟹

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{d\theta} &= mga \operatorname{sen}\theta + k\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - a\sqrt{2}\right)\left(-a\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) \\
&= mga \operatorname{sen}\theta + ka^2\left(-2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) \\
&= mga \operatorname{sen}\theta + ka^2\left(-\operatorname{sen}\theta + \sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Para $\theta = 0$ temos que $\dfrac{dV}{d\theta} = 0$, sendo, portanto, uma posição de equilíbrio. A outra posição de equilíbrio poderia ser obtida fazendo:

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{d\theta} &= mga \operatorname{sen}\theta + ka^2\left(-\operatorname{sen}\theta + \sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) \\
\frac{dV}{d\theta} &= \operatorname{sen}\theta\left[mga - ka^2 + \sqrt{2}ka^2\frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}\right] \\
& \operatorname{sen}\theta = 0 \therefore \theta = 0 \\
mga - ka^2 + \sqrt{2}ka^2\frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}} &= 0 \therefore \cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{mg}{ka} - 1\right)}
\end{aligned}
$$

Para analisar a estabilidade determinamos $\frac{d^2V}{d\theta^2}$:

$$
\frac{d^2V}{d\theta^2} = mga\cos\theta + ka^2\left(-\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)
$$

Queremos analisar a estabilidade em $\theta = 0$ e para ser equilíbrio estável buscamos $\frac{d^2V}{d\theta^2} > 0$:

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} &= mga + ka^2\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0 \\
\frac{mg}{ka} &> 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.2928932
\end{aligned}
$$

Logo, para $\frac{mg}{ka} > 0.293$ o equilíbrio é estável em $\theta = 0$.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$