

1 [30] Resolva o problema para $u(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + t \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad u(x, 0) = x^2; \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0;$$

usando o método das características, começando com $x = X(s)$, $t = T(s)$, $u(x, t) = u(x = X(s), t = T(s)) = U(s)$.

SOLUÇÃO:

$$u(x, t) = u(X(s), T(s)) = U(s), \quad x = X(s), \quad t = T(s)$$

$$\frac{dU}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dT}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dX}{ds}$$

(a) (b) (c)

$$\frac{dT}{ds} = 0 \Rightarrow T(s) = s = t$$

$$\frac{dX}{ds} = t = s \Rightarrow \begin{cases} X(s) - X(0) = \frac{s^2}{2} \\ X(0) = \frac{s^2}{2} - X(s) \quad (*) \end{cases}$$

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dU}{ds} = 0 \Rightarrow U(s) - U(0) = 0 \Rightarrow U(s) = U(0)$$

mas, como $u(x, 0) = f(x) = x^2$
 $\uparrow$
 $t = s = 0$

$$U(s) = U(s=0) = u(X(s=0), T(s=0)) = f(X(0)) = X(0)^2$$

usando (*) $X(0) = \frac{s^2}{2} - X(s)$

$$U(s) = \left(\frac{s^2}{2} - x\right)^2 = \frac{s^4}{4} - t^2 x + x^2 = u(x, t)$$

2 [70] Considere o problema de uma corda de piano vibrando. O comprimento da corda é d e a corda está presa em $x = 0$ e $x = d$. A corda está inicialmente em sua posição de equilíbrio $y(x, 0) = 0$ no momento inicial $t = 0$ em que o martelo do piano acerta a corda exatamente no seu centro ($d/2$) impondo uma velocidade à corda que pode ser aproximada por uma função delta de Dirac $\partial y / \partial t|_{x,0} = \delta(x - d/2)$. O problema é o deslocamento $y(x, t)$ da corda pela equação da onda mais condições inicial e de contorno:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{x,0} = \delta(x - d/2); \quad y(0, t) = y(d, t) = 0,$$

- (a) [40] Usando separação de variáveis, resolva o problema (Fórmulas de Fourier para o problema estão abaixo, mas você pode usar outras versões se forem mais convenientes.)
 (b) [10] Identifique o problema de Sturm-Liouville envolvido e identifique a equação diferencial, os autovalores e os autovetores.
 (c) [20] sabendo que a corda vibra como ondas com velocidades $\pm c$ (nas direções $\pm x$), mostre que a solução encontrada é compatível com a solução geral de D'Alembert $y = f(x - ct) + g(x + ct)$, ou seja descubra quem são f e g para o caso deste problema.

Formulário:

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), & x_0 \text{ está entre } a \text{ e } b \\ 0, & x_0 \text{ não está entre } a \text{ e } b \end{cases}; \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{d}; \quad B_n = \frac{2}{L} \int_a^b f(x) \sin \frac{n\pi x}{d} dx;$$

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]; \quad \int_a^b \sin \frac{m\pi x}{d} \sin \frac{n\pi x}{d} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{d}{2}, & n = m \end{cases}$$

SOLUÇÃO:

$$y = X(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = \underbrace{-k^2}_{\lambda} \quad (\text{autovalores negativos para termos senos / cosenos})$$

$$\begin{aligned} X'' = -k^2 X &\Rightarrow X = A \cos kx + B \sin kx, \quad \begin{cases} X(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ X(d) = 0 \Rightarrow B \sin kd = 0 \\ kd = n\pi \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{d} // \\ X_n = \sin \frac{n\pi x}{d} \end{cases} \\ \text{Sturm-Liouville} &\left\{ \begin{array}{l} \text{autovalores: } -\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 \\ \text{autofunções: } \sin \frac{n\pi x}{d} \end{array} \right. \\ (b) &\end{aligned}$$

$$\text{para } t: \quad T'' = -\left(\frac{n\pi c}{d}\right)^2 T \Rightarrow T_n = C_n \cos \frac{n\pi c t}{d} + D_n \sin \frac{n\pi c t}{d}$$

Solução é a soma total: $(C_n = 0 \text{ pois } y(x, 0) = 0)$

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{d} \left[C_n \cos \frac{n\pi c t}{d} + D_n \sin \frac{n\pi c t}{d} \right]. \quad \text{Em } t=0, \quad \frac{\partial y}{\partial t} \text{ é } \delta(x - \frac{d}{2})$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{d} D_n \sin \frac{n\pi x}{d} = \delta(x - \frac{d}{2}); \quad \left(\times \sin \frac{m\pi x}{d} \text{ e integramos} \right)$$

$$\int_0^d \sin \frac{m\pi x}{d} \delta(x - \frac{d}{2}) dx = \sum \frac{n\pi c}{d} D_n \int_0^d \sin \frac{n\pi x}{d} \sin \frac{m\pi x}{d} dx \Rightarrow \sin \frac{m\pi}{2} = \frac{n\pi c}{d} D_n \frac{d}{2}$$

$$D_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2}{n\pi c}, \quad n=1, 3, 5, \dots \Rightarrow y(x, t) = \sum_{1, 3, 5, \dots} \frac{2}{n\pi c} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{n\pi x}{d} \sin \frac{n\pi c t}{d} \quad (a)$$

$$(c) \quad y(x, t) = \underbrace{\sum \frac{1}{n\pi c} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} (x - ct)}_{f(x - ct)} + \underbrace{\sum \frac{1}{n\pi c} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} (x + ct)}_{f(x + ct)} //$$