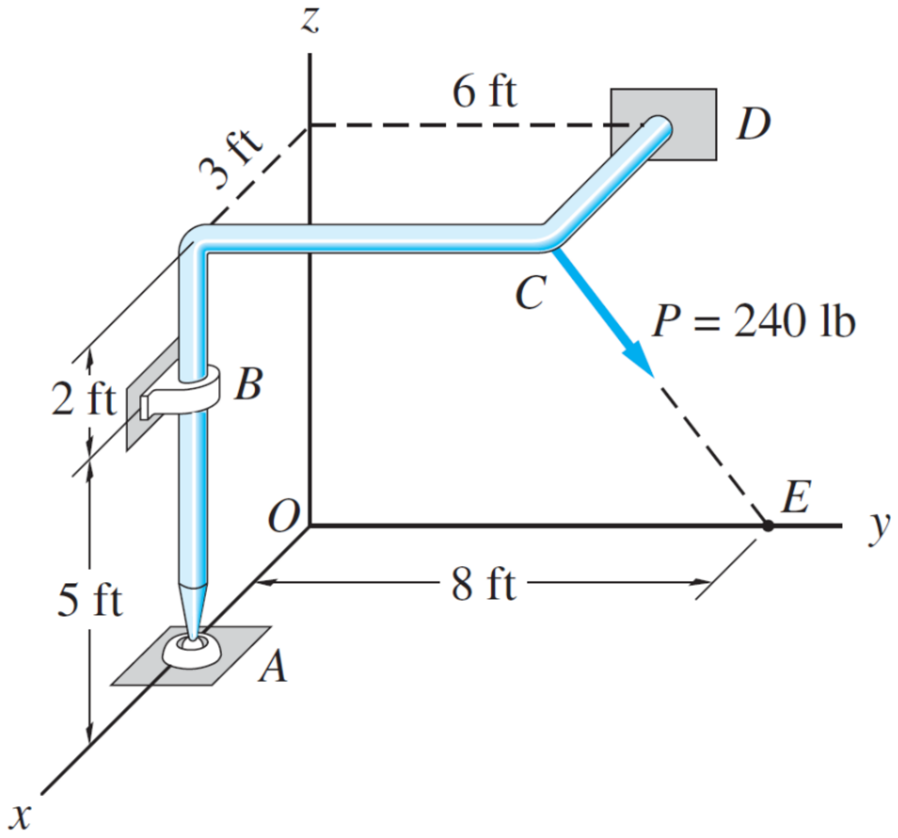
TEA005 - Mecânica dos Sólidos I
Curso de Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
Exame Final, 2 Julho 2026
Prof. Michael Mannich

Final

NOME: GABARITO ______________________ Assinatura: ______________________

---

1 [20] Calcule o momento da força $P = 240\,\text{lb}$ aplicada no ponto C da figura em torno do apoio articulado em A. **Resolva o problema obrigatoriamente de forma vetorial em unidade lb.ft.**



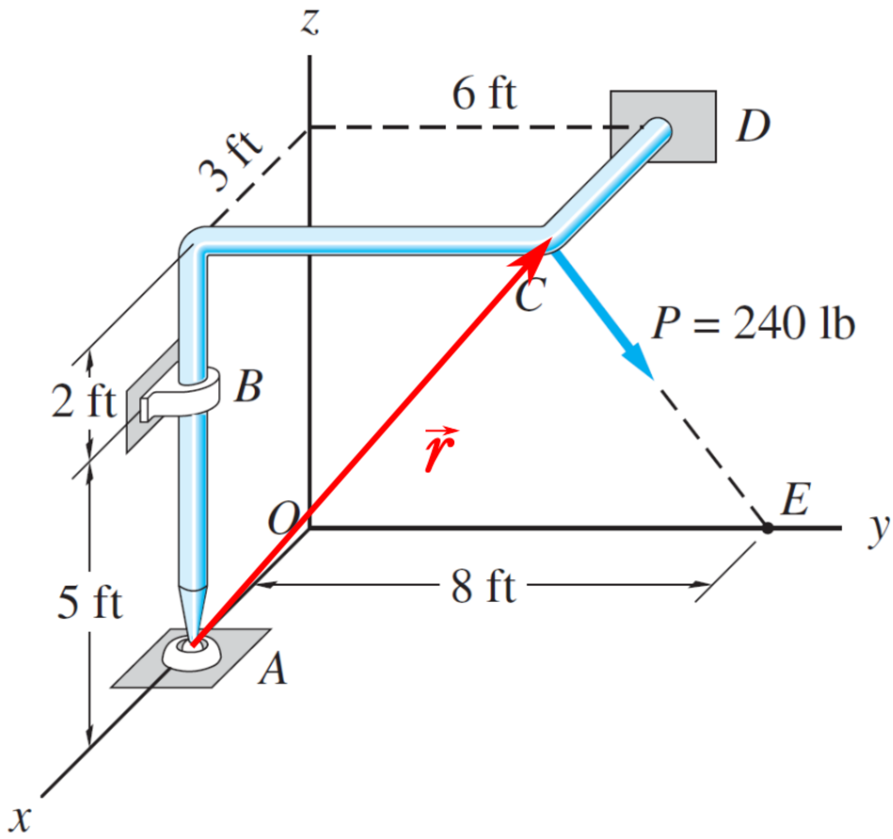
Use a formulação

$$\vec{M_O} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{M_O} = \left(r_y F_z - r_z F_y\right)\hat{\imath} + \left(r_z F_x - r_x F_z\right)\hat{\jmath} + \left(r_x F_y - r_y F_z\right)\hat{k}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹



Vamos decompor F e determinar o vetor $\vec{r}$.

$$\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{P}$$

$$\vec{P} = P\vec{u}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{CE}}{CE} = \frac{-3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 7\hat{k}}{\sqrt{62}}$$

$$\vec{u} = P\frac{-3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 7\hat{k}}{\sqrt{62}}$$

$$\vec{P} = 60.96\hat{\imath} - 91.44\hat{\jmath} - 213.36\hat{k}\,\text{lb}$$

$$\vec{r} = \vec{AC} = 0\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 7\hat{k}\,\text{ft}$$

$$\vec{M}_o = \frac{240}{\sqrt{62}}\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 6 & 7 \\ -3 & 2 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{M}_o = \frac{240}{\sqrt{62}}\left(-56\hat{\imath} - 21\hat{\jmath} + 18\hat{k}\right)\,\text{lb}\cdot\text{ft}$$

$$\vec{M}_o = -1706.88\hat{\imath} - 640.08\hat{\jmath} - 548.64\hat{k}\,\text{lb}\cdot\text{ft}$$

Também poderíamos escolher o $\vec{r} = \vec{AE} = -3\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} + 0\hat{k}$ ft

$$\vec{r} = \vec{AC} = -3\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} + 0\hat{k}\,\text{ft}$$

$$\vec{M}_o = \frac{240}{\sqrt{62}}\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -3 & 8 & 0 \\ -3 & 2 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{M}_o = \frac{240}{\sqrt{62}}\left(-56\hat{\imath} - 21\hat{\jmath} + 18\hat{k}\right)\,\text{lb}\cdot\text{ft}$$

$$\vec{M}_o = -1706.88\hat{\imath} - 640.08\hat{\jmath} - 548.64\hat{k}\,\text{lb}\cdot\text{ft}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Considere a região formada pelas funções:

$$y = \ln(x+1)$$

$$y = 1 - x$$

$$y = 0$$

sabendo que a interseção entre as funções ocorre em $x = 0.557146$.

a) [5] Esboce graficamente as funções e os limites de integração para cálculo da área e centroide.

b) [20] Determine o centroide $\bar{x}$ por integração.

$$A = \int dA$$
$$A\bar{x} = \int x_c dA$$
$$A\bar{y} = \int y_c dA$$

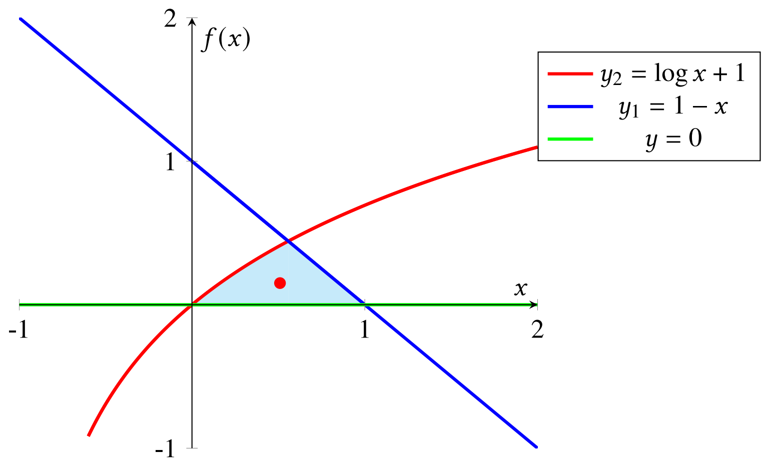
Somente se necessário use:

$$\int \ln z dz = z \ln z - z + C$$

$$\lim_{z \to 0} z \ln z = 0$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$



O ponto de interseção pode ser verificado fazendo $y_1 = y_2$, que ocorre em $x = 0.557146$, logo $y = 0.442854$. Fazemos $y_2 = 1 - x$ e $y_1 = \ln(x+1)$ de modo que temos $x_2 = 1 - y$ e $x_1 = e^y - 1$. Selecionamos um elemento diferencial de comprimento $(x_2 - x_1)$ e altura dy, o centroide é calculado em torno desse retângulo e depois utilizado para toda a área através da integração. Dessa forma, o elemento infinitesimal de área e a área total são iguais a

$$dA = (x_2 - x_1)dy = (1 - y - e^y + 1)\,dy = (2 - y - e^y)\,dy$$
$$A = \int dA = \int_0^{0.442854} (2 - y - e^y)\,dy$$
$$A = \left(2y - \frac{y^2}{2} - e^y\right)_0^{0.442854} = 0.230503\,ua$$

A coordenada x do centroide do elemento retangular é $x_c = \frac{x_1+x_2}{2}$, que é simplesmente a largura. A coordenada x do centroide da área completa é dada por

$$A\bar{x} = \int x_c dA = \int \frac{x_1 + x_2}{2}(x_2 - x_1)dy = \int \frac{x_2^2 - x_1^2}{2}dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{0.442854} \left[(1-y)^2 - (e^y - 1)^2\right] dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{0.442854} \left[1 - 2y + y^2 - \left(e^{2y} - 2e^y + 1\right)\right] dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{0.442854} \left[y^2 - 2y + 2e^y - e^{2y}\right] dy$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3} - y^2 + 2e^y - \frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^{0.442854} = 0.117385$$
$$\bar{x} = \frac{0.117385}{0.230503} = 0.509257\,uc$$

A coordenada y do centroide do elemento retangular é $y_c = y$, que é simplesmente a largura. A coordenada y do centroide da área completa é dada por

$$A\bar{y} = \int y_c dA = \int y(x_2 - x_1)dx = \int_0^{0.442854} y\,(2 - y - e^y)\,dy$$
$$= \int_0^{0.442854} \left(2y - y^2 - ye^y\right) dy$$
$$= \left[y^2 - \frac{y^3}{3} - (y-1)e^y\right]_0^{0.442854} = 0.034726$$
$$\bar{y} = \frac{0.034726}{0.230503} = 0.150653\,uc$$

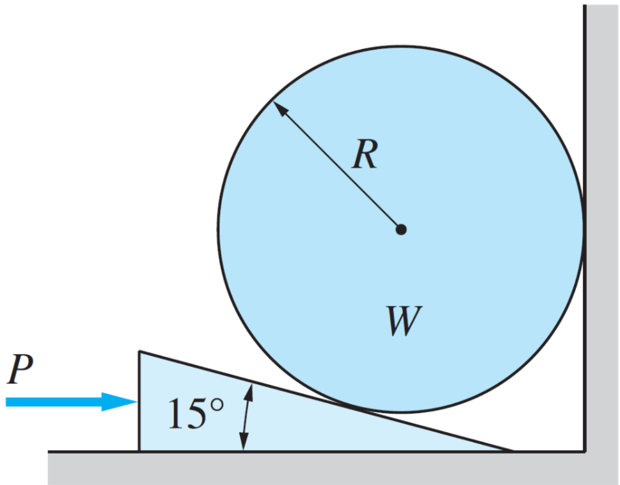
Continue a solução no verso ⟹

Se você precisasse determinar o ponto de interseção faríamos $y_1 = y_2$ ou $x_1 = x_2$. Assim para $x_1 = x_2$ temos $1 - y = e^y - 1$. Claramente é uma equação transcedental em y. Vamos resolver por Newton Raphson fazendo $f(y) = e^y + y - 2 = 0$ e $f'(y) = e^y + 1$. Vamos partir de uma aproximação inicial igual a 0.5.

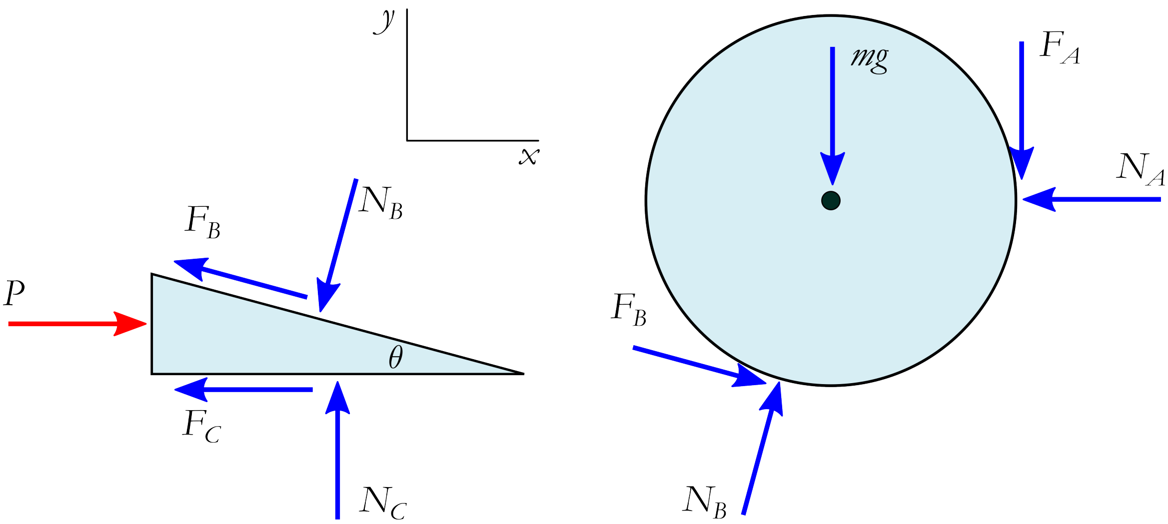
i	n	$f(y)$	$f'(y)$
1	0.5	0.148721	2.648721
2	0.443852	0.002551	2.558699
3	0.442855	7.74E-07	2.557146
4	0.442854	7.11E-14	2.557146
5	0.442854	0	2.557146

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

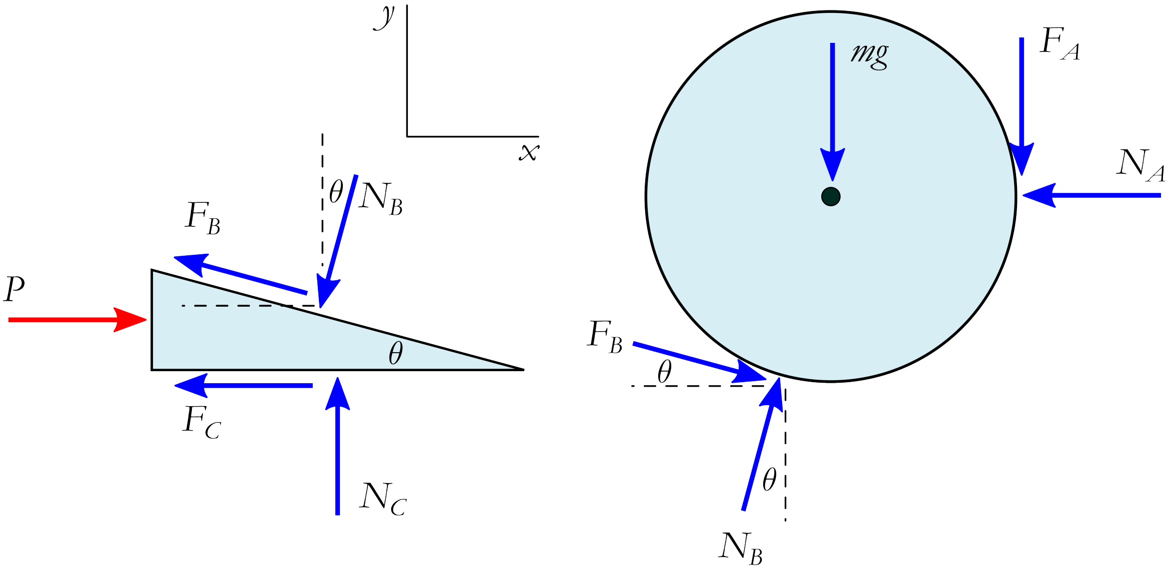
3 [30] Determine a menor força P necessária para mover a cunha para a direita se o coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies é $\mu_s = 0.5$. O cilindro uniforme possui massa m e o peso da cunha é desprezível. Parta do DCL fornecido. Suponha inicialmente que o cilindro não escorrega em B na superfície em contato com a cunha, isto é, ele escorrega contra a parede e gira em B. Verifique esta hipótese durante a solução do problema mostrando que $F_B < \mu N_B$.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:



Continue a solução no verso ⟹



No cilindro vamos considerar que há escorregamento em A mas não em B. Note que se supormos escorregamento nas duas superfícies a força P precisaria ser ainda maior. Fazemos então:

$$
\begin{aligned}
\sum M_O &= 0 \therefore -F_B r + F_A r = 0 \rightarrow F_B = F_A = \mu N_A \\
\sum M_B &= 0 \therefore -mgr \operatorname{sen}\theta + N_A r\cos\theta - F_A\left(r + r\operatorname{sen}\theta\right) = 0 \\
&- mgr\operatorname{sen}\theta + N_A r\cos\theta - \mu N_A\left(r + r\operatorname{sen}\theta\right) = 0 \\
N_A &= mg\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - \mu\left(1+\operatorname{sen}\theta\right)} \\
N_A &= mg\frac{\operatorname{sen}15^\circ}{\cos 15^\circ - 0.5\left(1+\operatorname{sen}15^\circ\right)} = 0.769113mg \\
\sum F_y &= 0 \therefore -mg - F_A + N_B\cos\theta - F_B\operatorname{sen}\theta = 0 \\
&- mg - \mu N_A + N_B\cos\theta - \mu N_A\operatorname{sen}\theta = 0 \\
N_B\cos\theta &= mg + N_A\mu\left(1+\operatorname{sen}\theta\right) \\
N_B\cos\theta &= mg + mg\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - \mu\left(1+\operatorname{sen}\theta\right)}\mu\left(1+\operatorname{sen}\theta\right) \\
N_B &= \frac{mg}{\cos\theta}\left[1 + \frac{\mu\left(1+\operatorname{sen}\theta\right)\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - \mu\left(1+\operatorname{sen}\theta\right)}\right] \\
N_B &= \frac{mg}{\cos 15^\circ}\left[1 + \frac{0.5\operatorname{sen}15^\circ\left(1+\operatorname{sen}15^\circ\right)}{\cos 15^\circ - 0.5\left(1+\operatorname{sen}15^\circ\right)}\right] = 1.536440mg
\end{aligned}
$$

Agora comparamos com a força de atrito máxima em B que seria $F_B = muN_B$. Temos então

$$
\begin{aligned}
F_B &= \mu N_A = 0.5\cdot 0.769113mg = 0.384556mg \\
F_{B,max} &= \mu N_B = 0.5\cdot 1.536440mg = 0.768220mg
\end{aligned}
$$

Logo $F_B < F_{B,max} = \mu N_B$ e a hipótese de não escorregamento em B é verdadeira.
Agora para a cunha temos:

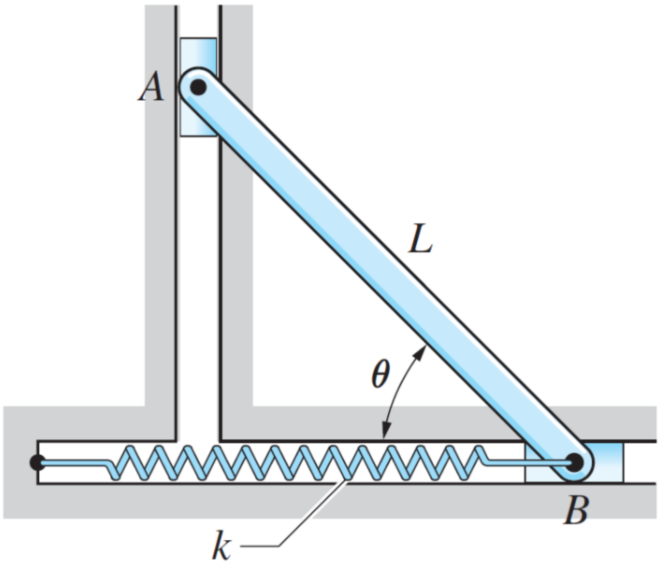
Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

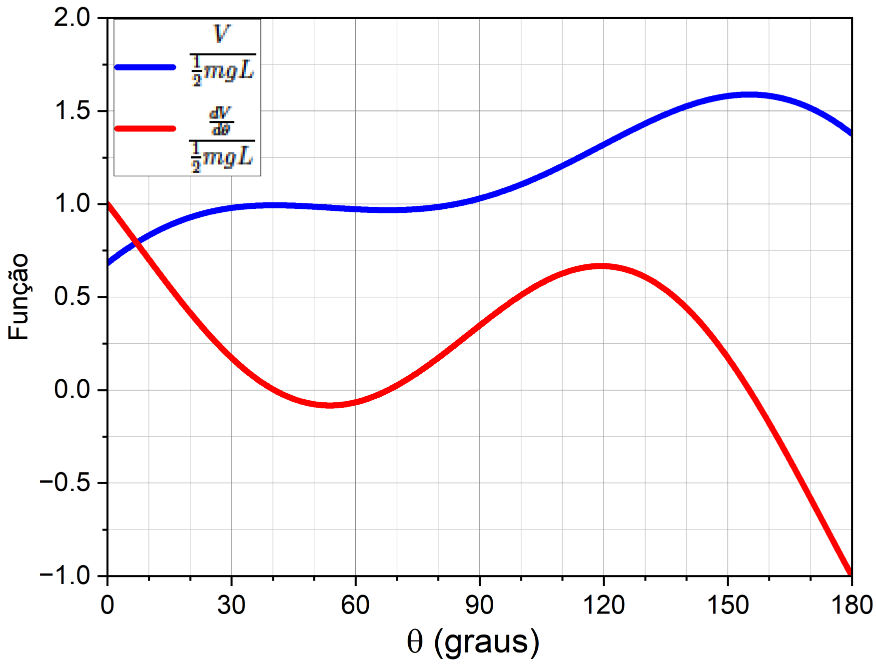
$$
\begin{aligned}
&\sum F_x = 0 \therefore P - F_C - F_B \cos\theta - N_B \operatorname{sen}\theta = 0\\
&\quad P = F_C + F_B \cos\theta + N_B \operatorname{sen}\theta = \mu N_C + F_B \cos\theta + N_B \operatorname{sen}\theta\\
&\sum F_y = 0 \therefore N_C + F_B \operatorname{sen}\theta - N_B \cos\theta = 0\\
&\quad N_C = N_B \cos\theta - F_B \operatorname{sen}\theta\\
&\quad P = \mu N_C + F_B \cos\theta + N_B \operatorname{sen}\theta\\
&\quad P = \mu\left(N_B \cos\theta - F_B \operatorname{sen}\theta\right) + F_B \cos\theta + N_B \operatorname{sen}\theta\\
&\quad P = F_B \cos\theta\,(1-\mu) + N_B\left(\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta\right)\\
&\quad P = 0.384556mg \cos 15^\circ\,(1-0.5) + 1.536440mg\left(\operatorname{sen} 15^\circ + 0.5\cos 15^\circ\right)\\
&\quad P = 1.461391mg
\end{aligned}
$$

Logo a força mínima de P nestas condições é $P = 1.461mg$.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] A massa da barra uniforme AB de comprimento L é m. A mola de constante k está indeformada quando a barra AB apresenta um ângulo com a horizontal $\theta = 60°$. Se escolhemos uma mola com constante k tal que $mg = kL$. Desenvolva a equação a ser resolvida para determinar as posições de equilíbrio. Determine as posições de equilíbrio θ a partir do gráfico auxiliar e verifique a sua estabilidade.

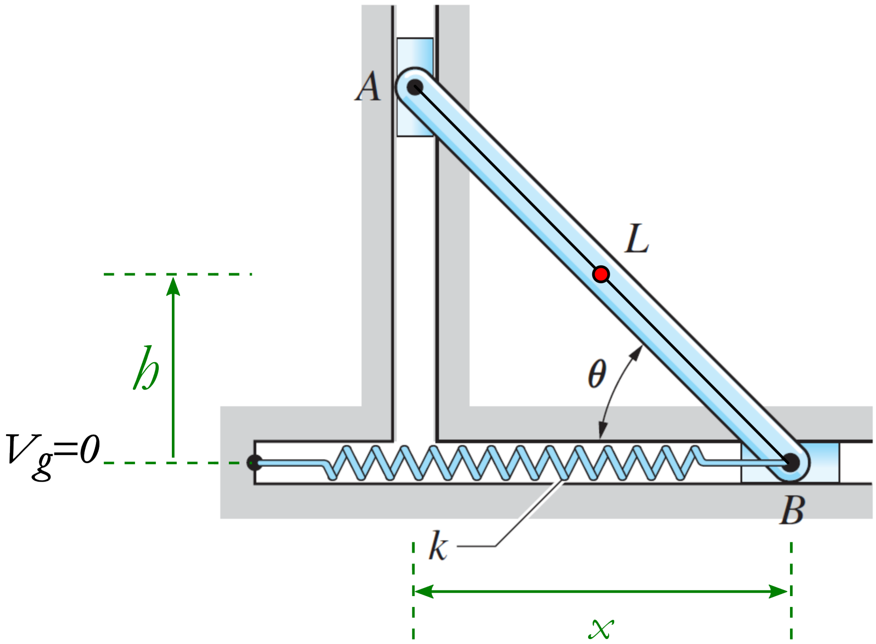




SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

A figura a seguir representa o diagrama de forças ativas do sistema.



O deslocamento da mola é representado por x na figura. O deslocamento da mola $x = L\cos\theta - L\cos\theta_0 = L\,(\cos\theta - \cos\theta_0)$ Assim podemos escrever a energia potencial elástica da mola como:

$$V_e = \frac{1}{2}kL^2\,(\cos\theta - \cos\theta_0)^2$$

Para a energia potencial gravitacional, temos que $h = \frac{L}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta$, então:

$$[V_g = mgh] \therefore V_g = mgh = mg\frac{L}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

A energia potencial total é então:

$$V = V_g + V_e = mg\frac{L}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{2}kL^2\,(\cos\theta - \cos\theta_0)^2$$

Logo, o equilíbrio ocorre para $dV/d\theta = 0$, de forma que:

$$\frac{dV}{d\theta} = mg\frac{L}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}kL^2 2\,\mathrm{sen}\,\theta\,(\cos\theta - \cos\theta_0)$$
$$\frac{dV}{d\theta} = mg\frac{L}{2}\cos\theta - kL^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Como temos que $mg = kL$ podemos simplificar um pouco as duas expressões:

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
V &= mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}kL^2\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)^2 \\
V &= mg\frac{L}{2}\left[\operatorname{sen}\theta + \left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)^2\right] \\
\frac{V}{mg\frac{L}{2}} &= \operatorname{sen}\theta + \left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)^2 \\
\frac{dV}{d\theta} &= mg\frac{L}{2}\cos\theta - kL^2\operatorname{sen}\theta\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right) \\
\frac{dV}{d\theta} &= mg\frac{L}{2}\left[\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)\right] \\
\frac{\frac{dV}{d\theta}}{mg\frac{L}{2}} &= \cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)
\end{aligned}
$$

A partir do gráfico notamos 3 posições de equilíbrio entre $0 < \theta < \pi$. As soluções aproximadas são:

$$
\begin{aligned}
\theta_1 &= 0.704392\,\text{rad} = 40.358661^\circ \\
\theta_2 &= 1.183760\,\text{rad} = 67.824469^\circ \\
\theta_3 &= 2.708473\,\text{rad} = 155.184058^\circ
\end{aligned}
$$

Para analisar a estabilidade determinamos $\frac{d^2V}{d\theta^2}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2V}{d\theta^2} &= mg\frac{L}{2}\left[-\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right) + 2\operatorname{sen}^2\theta\right] \\
\frac{\frac{d^2V}{d\theta^2}}{mg\frac{L}{2}} &= -\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right) + 2\operatorname{sen}^2\theta
\end{aligned}
$$

Agora podemos avaliar em cada posição de equilíbrio:

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\frac{d^2V}{d\theta^2}}{mg\frac{L}{2}}\right|_{\theta_1=40.4^\circ} &= -0.705 \text{ INSTÁVEL} \\
\left.\frac{\frac{d^2V}{d\theta^2}}{mg\frac{L}{2}}\right|_{\theta_1=67.8^\circ} &= 0.635 \text{ ESTÁVEL} \\
\left.\frac{\frac{d^2V}{d\theta^2}}{mg\frac{L}{2}}\right|_{\theta_1=155.2^\circ} &= -2.030 \text{ INSTÁVEL}
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$