

1 [25] Sabe-se que a potência (quantidade de energia gerada por unidade de tempo) P de uma usina hidrelétrica deve ser função do peso específico (força peso por unidade de volume) da água γ , da altura da barragem H , da vazão volumétrica (volume por unidade de tempo) Q passando pelas turbinas, e da taxa de dissipação (quantidade de energia perdida por unidade de tempo) $\dot{q}$ por atrito/calor. Você não conhece a fórmula exata entre essas variáveis para determinar P . Use análise dimensional para simplificar a relação funcional acima. Lembre-se que energia tem unidade de $(\text{massa}) \times (\text{velocidade})^2$.

	P	Q	H	γ	$\dot{q}$
M	1	0	0	1	1
L	2	3	1	-2	2
T	-3	-1	0	-2	-3

LI posto = 3

$$\pi_1 = P Q^2 H^3 \gamma^2 \Rightarrow M^0 L^0 T^0 = M^1 L^2 T^{-3} L^3 T^{-2} L^4 M^3 L^{-23} T^3$$

$$x=y=z=-1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{P}{\gamma Q H}$$

$$\pi_2 = \dot{q} Q^4 H^2 \gamma^2 \Rightarrow \text{igual a } \pi_1 !!$$

$$\pi_2 = \frac{\dot{q}}{\gamma Q H}$$

$$\Rightarrow \pi_1 = f(\pi_2) \Rightarrow P = \gamma Q H f(\pi_2)$$

Sem perda de calor

$$P = \gamma Q H !!!$$

2 [25] Sabemos como multiplicar duas matrizes quadradas (tensores) $n \times n$ e que o resultado é um tensor. A figura ilustra o procedimento para o caso 2×2 .

$[A] \equiv A_{ij}$
 $[B] \equiv B_{ij}$
 $[C] \equiv C_{ij}$

$\{P\} \equiv P_{ij}$
 $\{Q\} \equiv Q_{ij}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

$U_{11}V_{11} + U_{12}V_{21}$

$\rightarrow$ soma se dá com colunas de U e linhas de V .

Se $[A]$, $[B]$, $[C]$ são 3 tensores $n \times n$, escreva em notação indicial os produtos:

(a) [10pts] $[P] = [A][B]$.

exempb!

$$P_{13} = A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} + \dots + A_{1n}B_{n3} = \sum_{k=1}^n A_{1k}B_{k3}$$

soma nos índices k

$$\Rightarrow P_{ij} = A_{ik}B_{kj} //$$

$$i, j, k = 1, 2, 3, \dots, n$$

(b) [15pts] $[Q] = [A]([B][C]) = [A][S]$ onde $[S] = [B][C]$.

Basta fazermos o item (a) 2 vezes:

$$S_{pk} = B_{pk}C_{kq}$$

$$Q_{ij} = A_{im}S_{mj} = A_{im}B_{mk}C_{kj} //$$

obs
 todos os índices
 $i, j, k, p, q, m = 1, 2, \dots, n$.

3 [45] Considere o espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ com base ortonormal $[\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$. Considere os seguintes 2 vetores deste espaço em termos desta base: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Evidentemente, esses 2 vetores formam (geram) um plano que os contém.

(a) [25] Encontre **um** vetor (existem infinitos deles) que seja perpendicular a este plano.

(b) [20 EXTRA] Encontre a equação $z = f(x, y)$ deste plano, onde (x, y, z) são as coordenadas nas direções $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, respectivamente.

$$(a) \quad \underline{v} = u \hat{i} + v \hat{j} + w \hat{k} ; \quad \underline{v} \cdot \underline{a} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (2)u + (-1)v + (1)w = 0 \\ \underline{v} \cdot \underline{b} = 0 \Rightarrow (0)u + (1)v + (2)w = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = -2w \Rightarrow 2u + 3w = 0 \Rightarrow u = -\frac{3}{2}w \\ w = \text{qualquer número, p.ex } w = 2. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{v} = (-3, -4, 2) //$$

(b) um vetor qualquer no plano está numa comb. linear de $\underline{a}$ e $\underline{b}$:

$$\underline{v} = A \underline{a} + B \underline{b} = \underbrace{2A \hat{i} - A \hat{j} + A \hat{k}}_{A \underline{a}} + \underbrace{B \hat{j} + 2B \hat{k}}_{B \underline{b}}$$

$$\underline{v} = (2A+B) \hat{i} + (B-A) \hat{j} + (A+2B) \hat{k}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2A+B=x \\ -A+B=y \\ A+2B=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{x-z}{3} \\ B = \frac{y+z}{3} \end{cases} \Rightarrow x - z + 2y + 2z = 3z \Rightarrow x + 2y + z = 3z \Rightarrow z = \frac{x}{2} + y //$$

4 [25] Para a matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) [5pts] escreva o problema de autovalor/autovetor associado e encontre o polinômio característico;
(b) [10pts] encontre os autovalores;
(c) [10pts] encontre os autovetores.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 1 + 1 - 3(1-\lambda) = 0$$
$$\cancel{1-3\lambda+3\lambda^2-\lambda^3} - \cancel{1+3\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda^2(3-\lambda) = 0$$

autovalores 0 e 3 $\rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$
1 duplicidade

$$\lambda = 0: \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 3: \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{eq 1} &= \text{eq 2} - \text{eq 3} \quad !! \\ \Rightarrow \text{arbitrio } z &= \alpha \Rightarrow x = -y = \alpha \\ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

autovetores!