1 [25] Considere a seguinte relação entre x e y:

$$f(x, y) = x - y^2 - 2 = 0.$$

Use o teorema da função implícita e determine se existe, e em que pontos existe, a função $y(x)$.

$f(x,0) = x - 0^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

verificam $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0$ em $y = 0 \Rightarrow y(x)$ existe em todos os pontos, exceto no ponto $(x=2, y=0)$.

2 [25] Considere a transformação (coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas):

$$x = r\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = r\cos\phi.$$

O Jacobiano da transformação acima é definido por:

$$J = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\phi & \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\phi & \partial y/\partial\theta \\ \partial z/\partial r & \partial z/\partial\phi & \partial z/\partial\theta \end{vmatrix}.$$

(a) [10] Calcule J e mostrando que $J = r^2\,\mathrm{sen}\,\phi$.
(b) [5] Determine em que pontos o jacobiano se anula.
(c) [10] Descreva com palavras qual é a implicação do jacobiano ser nulo para a transformação de coordenadas.

(a) $$J = \begin{vmatrix} \mathrm{sen}\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\phi\,\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\phi\,\mathrm{sen}\theta & r\cos\phi\,\mathrm{sen}\theta & r\,\mathrm{sen}\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -r\,\mathrm{sen}\phi & 0 \end{vmatrix} = r^2(\mathrm{sen}\phi\cos^2\phi\cos^2\theta + \mathrm{sen}^3\phi\,\mathrm{sen}^2\theta + \mathrm{sen}\phi\cos^2\phi\,\mathrm{sen}^2\theta + \mathrm{sen}^3\phi\cos^2\theta)$$
$$= r^2\left(\mathrm{sen}\phi\cos^2\phi + \mathrm{sen}^3\phi\right) = r^2\,\mathrm{sen}\phi.$$

(b) $J = r^2\,\mathrm{sen}\phi = 0 \Rightarrow r = 0$, $\phi_n = \{0, \pi, 2\pi, \ldots\} = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

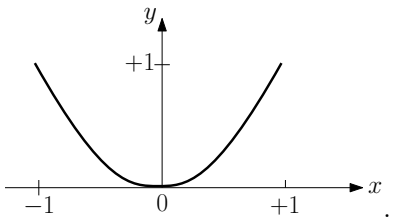
(c) nos pontos $r = 0$, $\phi_n = n\pi$, não existem funções inversas

$$r = r(x,y,z); \quad \theta = \theta(x,y,z); \quad \phi = \phi(x,y,z)$$

3 [25] Considere a parábola entre -1 e 1:

$$y = x^2, \quad -1 \le x \le 1.$$

Veja figura. Qual é o comprimento da curva que forma esse trecho da parábola (linha forte da figura)



Dica 1: fórmula para o comprimento da curva $L = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\mathbf{R}' \cdot \mathbf{R}'} d\tau$, onde τ é o parâmetro da curva, $\mathbf{R} = (x(\tau), y(\tau), z(\tau))$.
Dica 2: para integrar, transforme a variável de integração para θ e use $\sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta}$ e $\sec^2\theta = (\tan\theta)'$.

$\underset{\sim}{R} = (x, y, z)$; $\begin{cases} x = \tau \\ y = \tau^2 \\ z = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\underset{\sim}{R}'(\tau) = (1, 2\tau, 0) \Rightarrow \dot{R}(\tau) \cdot \dot{R}(\tau) = 1 + 4\tau^2$

$L = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1+4\tau^2}\, d\tau$

$= 2\int_0^1 \sqrt{1+4\tau^2}\, d\tau$

usar:

$4\tau^2 = \tan^2\theta \Rightarrow \tau = \frac{\tan\theta}{2}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{1+4\tau^2} = \sqrt{1+\tan^2\theta}$

$8\tau\, d\tau = 2\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta \Rightarrow d\tau = \frac{1}{8}\frac{2}{\tan\theta} 2\tan\theta\sec^2\theta$

$L = \int_0^{\arctan(2)} \sec^3\theta\, d\theta$ = (partes) $\int_0^{\arctan 2} \sec\theta \sec^2\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta\Big|_0^{\arctan 2} - \int_0^{\arctan 2} (\sec^3\theta - \sec\theta)\, d\theta$

$u = \sec\theta$, $dv = \sec^2\theta\, d\theta$

$\Downarrow$

$du = \sec\theta\tan\theta\, d\theta$, $v = \tan\theta$

$uv\Big|_0^{\arctan 2} - \int_0^{\arctan 2} v\, du$

quem chegou aqui ganha 20 pts.

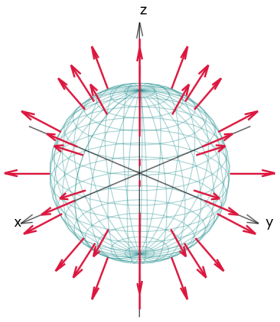
$2L = \left(\sec\theta\tan\theta\Big|_0^{\arctan 2} + \int_0^{\arctan 2} \sec\theta\, d\theta\right) = \sec\theta\tan\theta\Big|_0^{\arctan 2} + \ln(\sec\theta + \tan\theta)\Big|_0^{\arctan 2}$

$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\left[\sec\theta\tan\theta + \ln(\sec\theta + \tan\theta)\right]\Big|_0^{\arctan 2}$

nos limites $\rightarrow \arctan 2 \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2 \Rightarrow \sec\theta = \sqrt{5}$, $\tan\theta = 2$:

$L = \frac{1}{2}\sqrt{5}(2) + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{5}+2)$ //

4 [25] A figura mostra um campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ atravessando a superfície dada pela esfera unitária centrada na origem.Calcule o fluxo total do camnpo $\mathbf{F}(x, y, z)$ através da superfície esférica S, ou seja, calcule $\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$, onde $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário em cada área elementar dA da superfície S da esfera.



.

Dica: Teorema de Gauss: $\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \oiint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA$

$\oiint_S \underset{\sim}{F} \cdot \hat{\underset{\sim}{n}} dA$ é o fluxo; por Gauss:

$$\oiint_S \underset{\sim}{F} \cdot \hat{\underset{\sim}{n}} dA = \iiint_V \nabla \cdot \underset{\sim}{F} dV = \iiint_V \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dV$$

($\frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2$, $\frac{\partial}{\partial y}(2y) = 2$, $\frac{\partial}{\partial z}(2z) = 2$)

$$= \iiint_V (2+2+2) dV = 6 \iiint_V dV = 6\left(\frac{4}{3}\pi (1)^3\right) =$$

$$= 8\pi //$$